

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

Lê Thị Hạnh

**NGHIÊN CỨU TÍNH CHẤT EULERIAN CỦA
ĐỒ THỊ TÁI CẤU HÌNH K-THỐNG TRỊ**

Khóa luận tốt nghiệp đại học hệ chính quy

Ngành: Toán tin

(Chương trình đào tạo chuẩn)

Hà Nội - 2026

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

Lê Thị Hạnh

**NGHIÊN CỨU TÍNH CHẤT EULERIAN CỦA
ĐỒ THỊ TÁI CẤU HÌNH K-THỐNG TRỊ**

Khóa luận tốt nghiệp đại học hệ chính quy

Ngành: Toán tin

(Chương trình đào tạo chuẩn)

Cán bộ hướng dẫn: TS. Hoàng Anh Đức

Hà Nội - 2026

Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dung chính của khóa luận, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy Hoàng Anh Đức người đã dành thời gian và tận tình hướng dẫn để em có thể hoàn thành khóa luận này.

Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới toàn thể các thầy cô giáo trong khoa Toán - Cơ - Tin học, trường Đại học Khoa Học Tự Nhiên - Đại Học Quốc Gia Hà Nội đã dạy bảo em tận tình trong suốt quá trình học tập tại khoa.

Nhân dịp này em cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã luôn bên em, cổ vũ, động viên, giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập và thực hiện khóa luận tốt nghiệp.

Mục lục

Danh mục bảng	iv
Danh mục hình ảnh	v
Danh mục ký hiệu và chữ viết tắt	vi
Tóm tắt nội dung	viii
1 MỞ ĐẦU	1
1.1 Lý do chọn đề tài	1
1.2 Phát biểu bài toán	2
1.3 Mục tiêu của khóa luận	2
2 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ	3
2.1 Các khái niệm cơ bản trong lý thuyết đồ thị	3
2.1.1 Các đồ thị đặc biệt:	6
2.2 Đồ thị tái cấu hình (Reconfiguration Graphs)	8
2.3 Các nghiên cứu liên quan	9
2.3.1 Tính liên thông của đồ thị tái cấu hình	9
2.3.2 Chu trình Hamilton và các tính chất khác	9
3 TÍNH CHẤT EULERIAN CỦA ĐỒ THỊ TÁI CẤU HÌNH K-THỐNG TRỊ	11
3.1 Trường hợp tổng quát: $k = V(G) $	11
3.1.1 Đồ thị không liên thông và hệ quả	11
3.1.2 Đặc trưng cho đồ thị liên thông	13
3.2 Trường hợp giới hạn kích thước: $\gamma(G) < k < V(G) $	19
3.2.1 Đồ thị đường thẳng (P_n) và Đồ thị chu trình (C_n)	19
3.2.2 Đồ thị hai phía đầy đủ ($K_{m,n}$)	23

3.2.3	Đồ thị tiệc cocktail (H_n) và đồ thị đầy đủ (K_n) . . .	25
3.2.4	Đồ thị Corona và chỉ số thống trị trên	29
	Kết luận	32
	Tài liệu tham khảo	34

Danh mục bảng

2	Các trường hợp xét tính Eulerian của $\mathcal{D}_k(P_n)$ và $\mathcal{D}_k(C_n)$. . .	23
3	Tóm tắt tính chất Eulerian của $\mathcal{D}_k(H_n)$ và $\mathcal{D}_k(K_n)$	28

Danh mục hình ảnh

1	Ví dụ về bậc của đỉnh trong đồ thị.	4
2	Minh họa phép toán tích Descartes của hai đồ thị P_2 và P_3 . .	6
3	Cấu trúc hình học của đồ thị đầy đủ K_4 và đồ thị Cocktail Party H_4	7
4	Minh họa phép toán tích Corona.	7
5	Minh họa số thống trị trên đồ thị hình sao $K_{1,3}$	8
6	Ví dụ về đồ thị tái cấu hình k-thống trị của đường đi P_4	9
7	Đồ thị C_3 và đồ thị tái cấu hình $\mathcal{D}_2(C_3)$	20
8	Tập thống trị trên đường đi và chu trình với $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$. .	20
9	Các tập thống trị trên đồ thị đường đi P_7	21
10	Ba cấu hình hình học của tập thống trị lực lượng 4 trên chu trình C_7	22
11	Ví dụ về đồ thị tái cấu hình k-thống trị $\mathcal{D}_3(K_{1,4})$	24

Danh mục ký hiệu và chữ viết tắt

STT	Ký hiệu / Viết tắt	Ý nghĩa / Khái niệm đầy đủ
1	$G = (V, E)$	Đồ thị vô hướng G với tập đỉnh V và tập cạnh E .
2	$V(G), V$	Tập hợp các đỉnh (Vertices) của đồ thị G .
3	$E(G), E$	Tập hợp các cạnh (Edges) của đồ thị G .
4	$ V , V(G) $	Lực lượng (số phần tử) của tập đỉnh V , hay bậc của đồ thị G .
5	$\deg_G(v)$	Bậc của đỉnh v trong đồ thị G .
6	$N_G(v)/N_G(I)$	Lân cận mở (Neighborhood) của đỉnh v hoặc của tập đỉnh I trong G .
7	$N_G[v]/N_G[I]$	Lân cận đóng (Closed neighborhood) của đỉnh v hoặc của tập đỉnh I trong G .
8	$G[I]$	Đồ thị con cảm sinh bởi tập đỉnh $I \subseteq V$.
9	$\alpha(G)$	Số độc lập của đồ thị G (kích thước tối đa của một tập độc lập).
10	$\gamma(G)$	Số thống trị của đồ thị G (lực lượng nhỏ nhất của một tập thống trị).
11	$\Gamma(G)$	Số thống trị trên của đồ thị G (lực lượng lớn nhất của một tập thống trị tối thiểu).
12	Δ	Phép lấy hiệu đối xứng giữa hai tập hợp.
13	$\mathcal{D}(G)$	Đồ thị tái cấu hình tập thống trị tổng quát của G (không giới hạn kích thước).
14	$\mathcal{D}_k(G)$	Đồ thị tái cấu hình k -thống trị của G (lực lượng tập thống trị không vượt quá k).
15	\square	Phép toán tích Descartes của hai đồ thị.
16	\circ	Phép toán tích Corona của hai đồ thị.
17	\cong	Quan hệ đẳng cấu giữa hai đồ thị.

STT	Ký hiệu / Viết tắt	Ý nghĩa / Khái niệm đầy đủ
18	P_n	Đồ thị đường thẳng (đường đi) gồm n đỉnh.
19	C_n	Đồ thị chu trình gồm n đỉnh.
20	K_n	Đồ thị đầy đủ gồm n đỉnh.
21	$K_{m,n}$	Đồ thị hai phía đầy đủ với các tập đỉnh có lực lượng lần lượt là m và n .
22	H_n	Đồ thị Tiệc Cocktail (Cocktail Party Graph) bậc n (n chẵn).

Tóm tắt nội dung

Nội dung khóa luận hướng vào việc tìm hiểu và trình bày lại các đặc tính lý thuyết liên quan đến tính Eulerian trong không gian trạng thái của các tập thống trị. Cụ thể, Khóa luận trình bày lại các kết quả của [9] về trường hợp $k = |V(G)|$ và một số lớp đồ thị cụ thể khi $\gamma(G) < k < |V(G)|$, qua đó phân tích sự tác động từ cấu trúc của đồ thị gốc lên đặc trưng này.

Bố cục của khóa luận được trình bày thành 3 chương chính như sau:

- **Chương 1: Mở đầu.** Trình bày lý do chọn đề tài, xác định mục tiêu và phạm vi nghiên cứu, đồng thời phát biểu bài toán tổng quát về việc khảo sát tính chất Eulerian trong không gian đồ thị tái cấu hình.
- **Chương 2: Kiến thức chuẩn bị.** Hệ thống hóa các khái niệm nền tảng trong lý thuyết đồ thị, giới thiệu các cấu trúc đồ thị đặc biệt và định nghĩa về đồ thị tái cấu hình. Bên cạnh đó, chương này cũng tổng hợp các công trình liên quan đến tính liên thông và chu trình Hamilton nhằm tạo cơ sở lý thuyết cho nội dung nghiên cứu.
- **Chương 3: Tính chất Eulerian của đồ thị tái cấu hình k -thống trị.** Đây là nội dung trọng tâm của khóa luận, tập trung phân tích tính Eulerian qua hai kịch bản: trường hợp tổng quát khi $k = |V(G)|$ (xem xét cả đồ thị liên thông và không liên thông) và trường hợp giới hạn kích thước khi $\gamma(G) < k < |V(G)|$. Các thuộc tính cụ thể được chứng minh trên nhiều lớp đồ thị đặc biệt như đồ thị đường thẳng (P_n), đồ thị chu trình (C_n), đồ thị hai phía đầy đủ ($K_{m,n}$), đồ thị Cocktail Party (H_n), đồ thị đầy đủ (K_n) và đồ thị Corona.

Mặc dù đã dành nhiều thời gian, tâm huyết và nỗ lực trong suốt quá trình nghiên cứu, song do tính chất phức tạp của đề tài cùng với những giới hạn nhất định về mặt thời gian, nguồn tài liệu và kiến thức chuyên môn của bản thân, khóa luận chắc chắn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế

ngoài ý muốn. Kính mong nhận được những ý kiến đóng góp quý báu, những nhận xét và phản biện chân thành từ Hội đồng khoa học, các thầy cô giáo cùng toàn thể quý bạn đọc. Những ý kiến này sẽ là hành trang vô cùng ý nghĩa giúp em rút ra những bài học kinh nghiệm sâu sắc, từ đó hoàn thiện hơn nữa công trình nghiên cứu này cũng như các đề tài khoa học trong tương lai.

Trân trọng cảm ơn!

Chương 1

MỞ ĐẦU

1.1 Lý do chọn đề tài

Lý thuyết tái cấu hình đồ thị (*Graph Reconfiguration*) hiện diện như một phân ngành nghiên cứu tương đối mới mẻ, đang trải qua giai đoạn phát triển mạnh mẽ trong các lĩnh vực Toán học rời rạc và Khoa học máy tính lý thuyết. Khác biệt với phương pháp tiếp cận truyền thống vốn chỉ tập trung vào việc xác minh sự tồn tại của các cấu trúc tổ hợp cụ thể như tập thống trị (*dominating sets*) hay tập độc lập (*independent set*), lý thuyết tái cấu hình đặt trọng tâm vào việc phân tích mối tương quan giữa các cấu trúc này thông qua những quy tắc biến đổi xác định trong không gian trạng thái.

Trong hệ thống các loại đồ thị tái cấu hình, không gian cấu hình của các tập thống trị đặc biệt thu hút sự quan tâm của cộng đồng khoa học nhờ vào khả năng ứng dụng thực tiễn sâu rộng trong các bài toán tối ưu hóa mạng lưới. Các nỗ lực nghiên cứu đương đại chủ yếu tập trung khảo sát tính liên thông (*connectivity*) nhằm xác định khả năng chuyển đổi giữa hai tập thống trị bất kỳ thông qua một chuỗi biến đổi hợp lệ như đã được tổng kết trong khảo sát của Mynhardt và Nasserar (2020)[10], hoặc tập trung phân tích sự tồn tại của đường đi Hamilton theo hướng tiếp cận của Kira Adaricheva và Heather Smith Blake (2022)[1]. Tuy nhiên, một đặc tính quan trọng khác là tính Eulerian, tức là trạng thái mà tại đó đồ thị tái cấu hình tồn tại một chu trình đi qua mỗi cạnh đúng một lần duy nhất, hiện vẫn chưa nhận được sự chú trọng tương xứng trong các công trình nghiên cứu hiện hành.

Việc xác định một đồ thị tái cấu hình có sở hữu tính Eulerian hay không không chỉ mang lại giá trị về mặt lý thuyết tổ hợp thuần túy mà còn góp phần

làm sáng tỏ các đặc điểm về cấu trúc đối xứng cũng như bậc đỉnh trong không gian trạng thái của các tập thống trị. Chính vì tầm quan trọng mang tính hệ thống đó, bài báo nghiên cứu mới nhất của Messenger và Porter (2025)[9] đã được lựa chọn làm đối tượng phân tích trọng tâm nhằm làm rõ các điều kiện cần và đủ cho tính chất này.

1.2 Phát biểu bài toán

Xét đồ thị gốc $G = (V, E)$, một tập con $S \subseteq V$ được định nghĩa là một tập thống trị nếu mọi đỉnh thuộc tập hiệu $V \setminus S$ đều kề với ít nhất một đỉnh trong S . Đồ thị tái cấu hình k -thống trị, ký hiệu là $D_k(G)$, được thiết lập dựa trên các quy tắc sau:

- **Tập đỉnh:** Mỗi đỉnh trong $D_k(G)$ tương ứng với một tập thống trị của G có lực lượng không vượt quá k .
- **Tập cạnh:** Hai đỉnh trong $D_k(G)$ được coi là kề nhau nếu và chỉ nếu các tập thống trị tương ứng S_1, S_2 thỏa mãn điều kiện $|S_1 \Delta S_2| = 1$, nghĩa là một tập có thể nhận được từ tập kia thông qua thao tác thêm hoặc loại bỏ duy nhất một đỉnh.

Mục tiêu của khóa luận là tìm hiểu và trình bày lại các điều kiện cần và đủ đối đã được Messenger và Porter thiết lập trong một số trường hợp và đồ thị cụ thể. Về mặt lý thuyết, việc xác minh đặc tính này đòi hỏi quá trình kiểm tra cấu trúc bậc của mọi đỉnh trong $D_k(G)$ đều là số chẵn, đồng thời xem xét tính liên thông của các thành phần không tầm thường trong không gian trạng thái của các tập thống trị.

1.3 Mục tiêu của khóa luận

Mục tiêu cốt lõi của khóa luận là tìm hiểu, hệ thống hóa và trình bày lại một cách chi tiết các đặc tính cấu trúc của không gian nghiệm thông qua tính chất Euler của đồ thị tái cấu hình k -thống trị.

Chương 2

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong chương này, tôi hệ thống lại các khái niệm cơ bản về lý thuyết đồ thị và lý thuyết tập thống trị làm cơ sở cho các nghiên cứu ở các chương sau.

2.1 Các khái niệm cơ bản trong lý thuyết đồ thị

Định nghĩa 2.1 (Đồ thị vô hướng). Đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ được định nghĩa bởi:

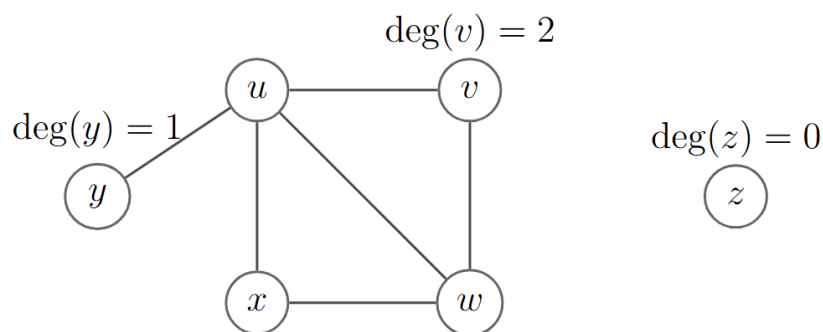
- Tập hợp $V \neq \emptyset$ là tập hợp các **đỉnh**.
- Tập hợp E là tập hợp các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V , gọi là các **cạnh**.

Định nghĩa 2.2 (Đỉnh kề và cạnh liên thuộc). Hai đỉnh u, v của đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ được gọi là **kề nhau** khi (u, v) là một cạnh thuộc đồ thị G .

Nếu $e = (u, v)$ là cạnh của đồ thị G , thì ta nói cạnh này **liên thuộc** với hai đỉnh u và v . Đồng thời, các đỉnh u và v được gọi là các **đỉnh đầu** của cạnh (u, v) .

Định nghĩa 2.3 (Bậc của đỉnh). Giả sử G là đồ thị vô hướng, $v \in V$ là một đỉnh bất kỳ:

- **Bậc của đỉnh v** : Là số cạnh liên thuộc với nó. Ký hiệu: $\deg_G(v) = |N_G(v)|$.
- **Đỉnh cô lập (Isolated vertex)**: Là đỉnh có bậc bằng 0.
- **Đỉnh treo (Pendant vertex)**: Là đỉnh có bậc bằng 1.



Hình 1: Ví dụ về bậc của đỉnh trong đồ thị.

Định nghĩa 2.4 (Đường đi và chu trình). **Đường đi** độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trong đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ là dãy các cạnh e_1, e_2, \dots, e_n thỏa mãn điều kiện tồn tại các đỉnh v_0, v_1, \dots, v_n sao cho $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ với $1 \leq i \leq n$ và $v_0 = u, v_n = v$.

- **Chu trình**: Là đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối ($u = v$).
- **Đơn**: Đường đi hoặc chu trình được gọi là **đơn** nếu không có cạnh nào lặp lại trong dãy.

Định nghĩa 2.5 (Tính liên thông). Đồ thị vô hướng được gọi là **liên thông** nếu luôn tìm được ít nhất một đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.

Định nghĩa 2.6 (Lân cận và Đồ thị con cảm sinh). Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng:

- **Lân cận (Neighborhood)** của đỉnh v trong G là tập hợp: $N_G(v) = \{w \in V(G) : \{v, w\} \in E(G)\}$.
- **Lân cận đóng** của v trong G là tập hợp: $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
- Với $I \subseteq V(G)$, ta có: $N_G(I) = \bigcup_{v \in I} N_G(v)$ và $N_G[I] = N_G(I) \cup I$.
- **Đồ thị con cảm sinh** bởi tập đỉnh $I \subseteq V$, ký hiệu là $G[I]$, là đồ thị có tập đỉnh là I và tập cạnh bao gồm tất cả các cạnh trong E có cả hai đầu mút đều thuộc I .

Định nghĩa 2.7 (Tập độc lập). Một **tập độc lập** của đồ thị $G = (V, E)$ là một tập con các đỉnh $I \subseteq V$ sao cho với mọi $u, v \in I$, ta luôn có $uv \notin E(G)$.

Ký hiệu $\alpha(G)$ là **số độc lập** của đồ thị G , đại diện cho kích thước (lực lượng) tối đa của một tập độc lập trong G .

Số độc lập tối đa của đồ thị chu trình C_n là một kết quả nền tảng đã được chứng minh trong lý thuyết đồ thị (xem thêm tại tài liệu[13]), cụ thể được xác định bởi công thức:

$$\alpha(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (2.1)$$

Định nghĩa 2.8 (Chu trình Eulerian). Một **chu trình Eulerian** trong đồ thị G là một đường đi khép kín (chu trình) đi qua tất cả các cạnh của đồ thị, trong đó mỗi cạnh được đi qua đúng một lần.

Định nghĩa 2.9 (Điều kiện cần và đủ của đồ thị Eulerian). Một đồ thị là Eulerian khi và chỉ khi mọi đỉnh có bậc chẵn và nó chứa nhiều nhất một thành phần không tầm thường.

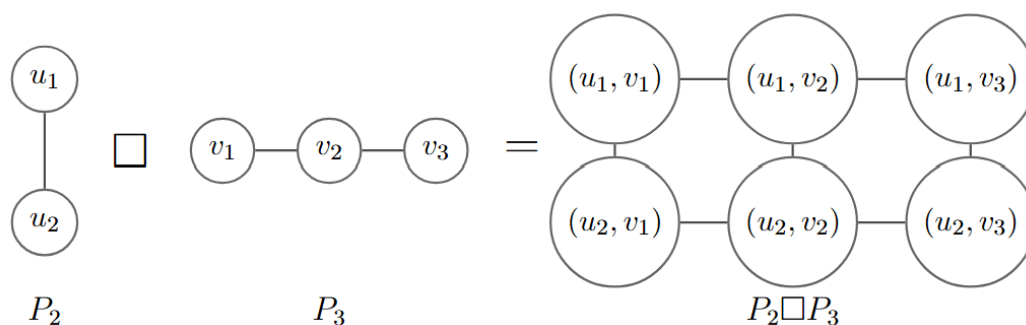
Định nghĩa 2.10 (Đồ thị đẳng cấu). Hai đồ thị vô hướng $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ được gọi là **đẳng cấu** với nhau, ký hiệu là $G_1 \cong G_2$, nếu tồn tại một song ánh $f : V_1 \rightarrow V_2$ thỏa mãn điều kiện: Với mọi cặp đỉnh $u, v \in V_1$:

$$\{u, v\} \in E_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in E_2$$

Nói cách khác, hàm f bảo toàn quan hệ kề giữa các đỉnh của hai đồ thị.

Định nghĩa 2.11 (Tích Descartes của hai đồ thị). Tích Descartes của hai đồ thị H và H' , ký hiệu là $H \square H'$, là đồ thị được xác định như sau:

- **Tập đỉnh:** $V(H \square H') = V(H) \times V(H')$.
- **Quan hệ kề:** Hai đỉnh (u, v) và (x, y) trong $H \square H'$ kề nhau khi và chỉ khi thỏa mãn một trong hai điều kiện:
 1. $u = x$ và v kề với y trong đồ thị H' .
 2. $v = y$ và u kề với x trong đồ thị H .



Hình 2: Minh họa phép toán tích Descartes của hai đồ thị P_2 và P_3 .

2.1.1 Các đồ thị đặc biệt:

Đồ thị đường P_n : Đồ thị đường P_n là đồ thị gồm n đỉnh v_1, v_2, \dots, v_n và $n - 1$ cạnh $\{v_i, v_{i+1}\}$ với mỗi $i = 1, \dots, n - 1$.

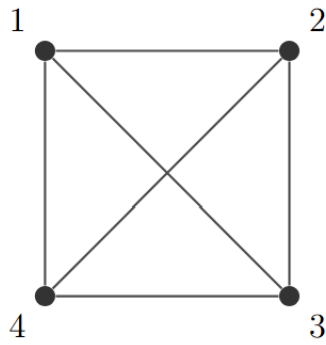
Đồ thị chu trình C_n : Đồ thị chu trình C_n ($n \geq 3$) là đồ thị gồm n đỉnh v_1, v_2, \dots, v_n và các cạnh $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$. Mỗi đỉnh của C_n đều có bậc bằng 2.

Đồ thị đầy đủ K_n : Đồ thị đầy đủ K_n là đồ thị đơn gồm n đỉnh, trong đó giữa hai đỉnh bất kỳ luôn có một cạnh nối. Tổng số cạnh của K_n là $\frac{n(n-1)}{2}$ và mỗi đỉnh đều có bậc là $n - 1$.

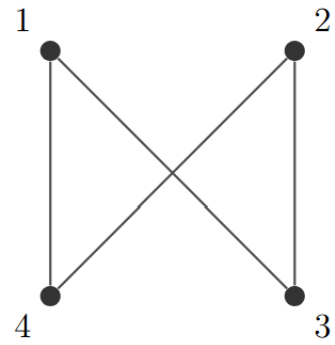
Đồ thị hai phía đầy đủ ($K_{m,n}$): Đồ thị hai phía đầy đủ $K_{m,n}$ là đồ thị mà tập đỉnh của nó có thể chia thành hai tập con không giao nhau V_1 và V_2 với $|V_1| = m, |V_2| = n$, sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh trong V_1 với một đỉnh trong V_2 , và giữa mọi cặp đỉnh (u, v) với $u \in V_1, v \in V_2$ đều có đúng một cạnh nối.

Đồ thị Tiệc Cocktail (H_n): Đồ thị tiệc cocktail bậc n (ký hiệu là H_n , với n là số chẵn) là đồ thị nhận được bằng cách loại bỏ một bộ ghép hoàn hảo (perfect matching) khỏi đồ thị đầy đủ K_n .

Tính chất: Đồ thị H_n là đồ thị chính quy bậc $n - 2$. Mỗi đỉnh v trong H_n kề với tất cả các đỉnh khác ngoại trừ đúng một đỉnh duy nhất (gọi là đỉnh đối tác của nó). Đây cũng chính là đồ thị đầy đủ nhiều phía $K_{2,2,\dots,2}$ với $n/2$ phần.



(a) Đồ thị đầy đủ K_4



(b) Đồ thị tiệc Cocktail H_4

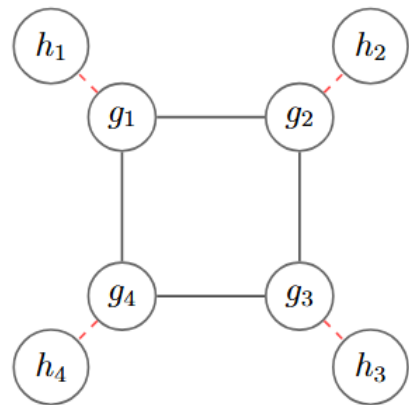
Hình 3: Cấu trúc hình học của đồ thị đầy đủ K_4 và đồ thị Cocktail Party H_4

Tích Corona của đồ thị ($G \circ H$): Cho hai đồ thị G và H với n là số đỉnh của G . Tích Corona $G \circ H$ là đồ thị được tạo ra bằng cách lấy một bản sao của G và n bản sao của H , sau đó nối đỉnh thứ i của G với mọi đỉnh trong bản sao thứ i của H .

Tích corona của đồ thị chu trình C_n và K_1 được gọi là đồ thị vương miện. Phép toán Corona là một phép toán quan trọng để xây dựng các đồ thị phức tạp từ các đồ thị đơn giản, thường được sử dụng trong nghiên cứu về số thống trị.



(a) $K_1 \circ K_1 \simeq K_2$



(b) Đồ thị vương miện $C_4 \circ K_1$

Hình 4: Minh họa phép toán tích Corona.

2.2 Đồ thị tái cấu hình (Reconfiguration Graphs)

Lý thuyết tái cấu hình nghiên cứu sự biến đổi giữa các cấu trúc tổ hợp thỏa mãn cùng một tính chất dưới một quy tắc chuyển đổi cụ thể.

Định nghĩa 2.12 (Tập thống trị[12]). Cho đồ thị đơn vô hướng $G = (V, E)$, trong đó V là tập các đỉnh và E là tập các cạnh.

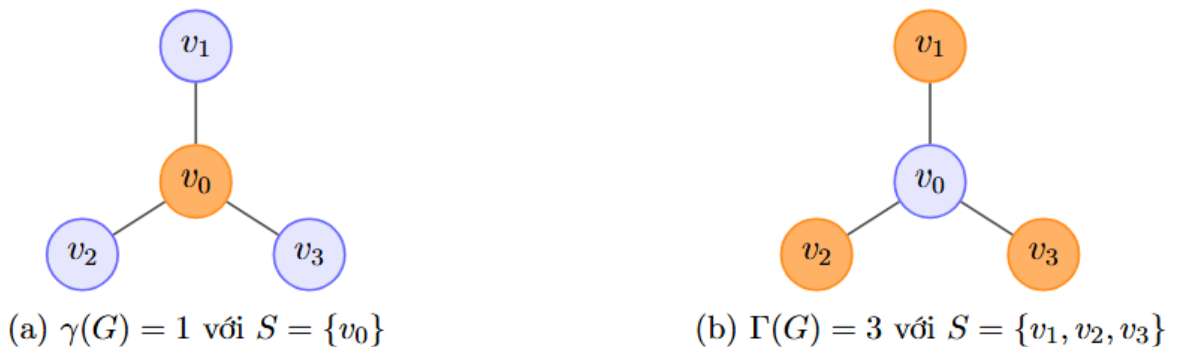
Một tập con $S \subseteq V$ được gọi là một **tập thống trị** (*dominating set*) của G nếu mọi đỉnh $v \in V \setminus S$ đều kề với ít nhất một đỉnh thuộc S .

Nói cách khác, lân cận đóng của S , ký hiệu là $N[S]$, thỏa mãn:

$$N[S] = V$$

Số thống trị của G , ký hiệu là $\gamma(G)$, là lực lượng (số phần tử) nhỏ nhất của một tập thống trị của G .

Số thống trị trên của G , ký hiệu là $\Gamma(G)$, là lực lượng lớn nhất của một tập thống trị tối thiểu của G .



Hình 5: Minh họa số thống trị trên đồ thị hình sao $K_{1,3}$.

Định nghĩa 2.13 (Đồ thị tái cấu hình k -thống trị[14]). Cho đồ thị $G = (V, E)$ và một số nguyên dương $k \geq \gamma(G)$. **Đồ thị tái cấu hình k -thống trị** của G , ký hiệu là $\mathcal{D}_k(G)$, là đồ thị được xác định bởi:

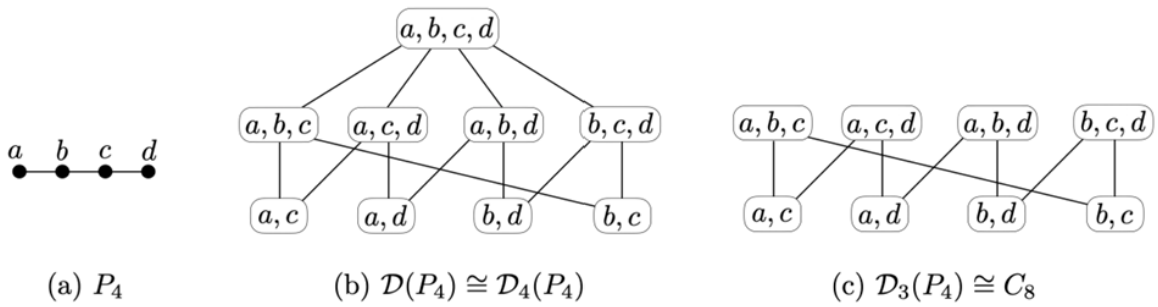
- **Tập đỉnh:** $V(\mathcal{D}_k(G)) = \{S \subseteq V(G) \mid S \text{ là tập thống trị của } G \text{ và } |S| \leq k\}$.

- **Quan hệ kề:** Hai tập thống trị $S_1, S_2 \in V(\mathcal{D}_k(G))$ kề nhau khi và chỉ khi chúng khác nhau đúng một phần tử. Điều này tương đương với:

$$|S_1 \Delta S_2| = 1$$

(Trong đó Δ là phép lấy hiệu đối xứng giữa hai tập hợp).

Khi không có giới hạn về kích thước của tập thống trị (tức $k = |V(G)|$), đồ thị tái cấu trúc này được ký hiệu đơn giản là $\mathcal{D}(G)$.



Hình 6: Ví dụ về đồ thị tái cấu trúc k-thống trị của đường đi P_4 .

2.3 Các nghiên cứu liên quan

2.3.1 Tính liên thông của đồ thị tái cấu trúc

Hầu hết các nghiên cứu trước đây về $\mathcal{D}_k(G)$ tập trung vào tính liên thông. Haas và Seyffarth [8] đã chứng minh rằng $\mathcal{D}_k(G)$ liên thông bất cứ khi nào $k \geq \min\{|V(G)| - 1, \Gamma(G) + \gamma(G)\}$. Các kết quả này đặt nền móng cho việc xác định liệu một chu trình Eulerian (đòi hỏi tính liên thông) có thể tồn tại hay không.

2.3.2 Chu trình Hamilton và các tính chất khác

Gần đây, các nghiên cứu đã mở rộng sang việc tìm kiếm đường đi và chu trình Hamilton trong $\mathcal{D}_k(G)$. Tuy nhiên, như Messinger và Porter [9] đã chỉ ra, việc nghiên cứu tính Eulerian cung cấp một góc nhìn mới về cấu trúc

bậc của không gian trạng thái các tập thống trị. Một kết quả thú vị được chứng minh bởi *Brouwer*(2009)[4] là số lượng các tập thống trị của một đồ thị hữu hạn luôn là một số lẻ, điều này có mối liên hệ mật thiết đến tổng bậc của các đỉnh trong $\mathcal{D}_k(G)$.

Chương 3

TÍNH CHẤT EULERIAN CỦA ĐỒ THỊ TÁI CẤU HÌNH k -THỐNG TRỊ

Trong chương này, chúng ta sẽ đi sâu vào phân tích các kết quả chính của bài báo [9]. Mục tiêu là xác định các điều kiện cần và đủ để đồ thị tái cấu hình k -thống trị $D_k(G)$ là Eulerian.

3.1 Trường hợp tổng quát: $k = |V(G)|$

3.1.1 Đồ thị không liên thông và hệ quả

Trong phần này, chúng ta xét đồ thị thống trị $\mathcal{D}(G)$ mà không kèm theo bất kỳ giới hạn nào về lực lượng của các tập thống trị. Trước hết, ta dẫn ra một kết quả hữu ích từ nghiên cứu của Brouwer, Csorba, và Schrijver (2009)[4].

Định lý 3.1 (Bổ đề bắt tay [11]). *Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ với m cạnh. Tổng bậc của các đỉnh trong đồ thị bằng hai lần số cạnh:*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$$

Định lý 3.2 (Brouwer (2009)[4]). *Số lượng các tập thống trị của một đồ thị hữu hạn bất kỳ luôn là một số lẻ.*

Từ kết quả của Định lý 3.2, ta thấy đồ thị tái cấu hình $D(G)$ có số lượng đỉnh là một số lẻ. Theo **Bổ đề Bắt tay** (Định lý 3.1), một đồ thị chỉ có thể là đồ thị Eulerian nếu mọi đỉnh của nó đều có bậc chẵn. Tuy nhiên, nếu $D(G)$ là đồ thị Eulerian, tổng bậc của nó (bằng $2|E|$) phải là một số chẵn; điều này

luôn đúng theo định lý tổng quát, nhưng nó không trực tiếp quyết định tính Eulerian cho đến khi ta xét đến cấu trúc tích Descartes. Đặc biệt, khi đồ thị G không liên thông, cấu trúc của $\mathcal{D}(G)$ được phân tách rõ rệt:

Quan sát 3.3. Cho G là một đồ thị có đúng $m \geq 2$ thành phần liên thông G_1, G_2, \dots, G_m . Khi đó:

$$\mathcal{D}(G_1) \square \mathcal{D}(G_2) \square \dots \square \mathcal{D}(G_m) \cong \mathcal{D}(G)$$

Từ Quan sát 3.3, tính chất Eulerian của đồ thị thống trị có thể được phân tích thông qua các thành phần liên thông như sau:

Hệ quả 3.4. Cho đồ thị G có $m \geq 2$ thành phần liên thông G_1, G_2, \dots, G_m . Đồ thị $\mathcal{D}(G)$ là Eulerian khi và chỉ khi $\mathcal{D}(G_i)$ là Eulerian với mọi $i \in \{1, \dots, m\}$.

Chứng minh. Sự tồn tại của chu trình Eulerian phụ thuộc vào tính liên thông của đồ thị và tính chẵn của bậc các đỉnh. Với mỗi $i \in \{1, \dots, m\}$, gọi x_i là một tập thống trị bất kỳ của đồ thị con cảm sinh bởi các đỉnh của G_i .

Chiều thuận (\Rightarrow): Giả sử $\mathcal{D}(G)$ là Eulerian. Giả sử phản chứng tồn tại một thành phần, chẳng hạn $\mathcal{D}(G_1)$, không phải là Eulerian. Khi đó, tồn tại ít nhất một đỉnh $x_1 \in \mathcal{D}(G_1)$ có bậc lẻ. Theo hệ quả của Bổ đề Bất tay (Định lý 3.1) và thực tế là số lượng tập thống trị luôn lẻ (Định lý 3.2), đồ thị thống trị luôn chứa ít nhất một đỉnh có bậc chẵn. Vì vậy, với mỗi $i \in \{2, \dots, m\}$, tồn tại một đỉnh y_i có bậc chẵn trong $\mathcal{D}(G_i)$. Theo Quan sát 3.3, bậc của đỉnh (x_1, y_2, \dots, y_m) trong $\mathcal{D}(G)$ sẽ là:

$$\deg(x_1) + \deg(y_2) + \dots + \deg(y_m) = (\text{lẻ}) + (\text{chẵn}) + \dots + (\text{chẵn}) = \text{lẻ}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\mathcal{D}(G)$ là Eulerian. Vậy mọi $\mathcal{D}(G_i)$ bắt buộc phải là Eulerian.

Chiều nghịch (\Leftarrow): Giả sử mọi $\mathcal{D}(G_i)$ đều là Eulerian. Theo đặc trưng của tích Descartes, bậc của một đỉnh trong $\mathcal{D}(G)$ bằng tổng bậc của các đỉnh

thành phần:

$$\deg_{\mathcal{D}(G)}(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \deg_{\mathcal{D}(G_i)}(x_i)$$

Vì mỗi $\mathcal{D}(G_i)$ là Eulerian, mọi $\deg_{\mathcal{D}(G_i)}(x_i)$ đều chẵn. Tổng của các số chẵn là một số chẵn, do đó mọi đỉnh trong $\mathcal{D}(G)$ đều có bậc chẵn. Vì $\mathcal{D}(G)$ luôn liên thông (theo Haas và Seyffarth, 2013[8]), ta kết luận $\mathcal{D}(G)$ là Eulerian. \square

Hệ quả cho thấy để đặc trưng hóa các đồ thị G sao cho $\mathcal{D}(G)$ là Eulerian, chúng ta chỉ cần tập trung vào lớp đồ thị liên thông. Vì một đồ thị chỉ gồm một đỉnh đơn lẻ có cấu trúc thống trị tầm thường và hiển nhiên là Eulerian, các kết quả tiếp theo sẽ khảo sát các đồ thị liên thông có ít nhất hai đỉnh.

3.1.2 Đặc trưng cho đồ thị liên thông

Việc xác định đặc trưng của các đồ thị hạt liên thông G sao cho $\mathcal{D}(G)$ là Eulerian là một trong những đóng góp quan trọng nhất của Messinger và Porter. Trung tâm của lập luận này là mối liên hệ khăng khít giữa cấu trúc kề của đồ thị gốc và tính đồng nhất về bậc của các đỉnh trong đồ thị tái cấu hình.

Bổ đề 3.5. *Cho G là đồ thị liên thông bậc $n \geq 2$. Nếu tồn tại một số nguyên $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$ thỏa mãn đồng thời ba điều kiện sau:*

1. *Tồn tại một tập con kích thước ℓ thống trị G ;*
2. *Tồn tại một tập con kích thước ℓ không thống trị G ;*
3. *Mọi tập con kích thước $\ell + 1$ đều thống trị G .*

Thì đồ thị thống trị $\mathcal{D}(G)$ chứa ít nhất một đỉnh bậc chẵn và ít nhất một đỉnh bậc lẻ. Hệ quả là $\mathcal{D}(G)$ không phải là đồ thị Eulerian.

Chứng minh. Giả sử phản chứng rằng mọi đỉnh trong $\mathcal{D}(G)$ đều có bậc cùng tính chẵn lẻ. Vì G là đồ thị liên thông và $\ell < n$, tập thống trị chứa tất cả các đỉnh của G (lực lượng n) sẽ tương ứng với một đỉnh trong $\mathcal{D}(G)$ có bậc đúng

bằng n .

Khẳng định: Mọi đỉnh trong $D(G)$ đều có bậc cùng tính chẵn lẻ với n .

Theo giả thiết (2), gọi $A \subset V(G)$ là tập hợp có lực lượng ℓ không thông trị G . Khi đó, tồn tại một đỉnh $x \in V(G)$ không kề với bất kỳ đỉnh nào trong A . Theo giả thiết (3), tập $S = A \cup \{x\}$ có lực lượng $\ell + 1$ là một tập thông trị của G . Gọi $B = V(G) \setminus (A \cup \{x\})$. Tập B phải khác rỗng, bởi nếu ngược lại, x sẽ là một đỉnh cô lập trong G , mâu thuẫn với tính liên thông của G .

Xét tập các đỉnh cô lập $I(A)$ trong đồ thị con cảm sinh bởi A . Hai trường hợp sau đây được xét đến:

Trường hợp 1: $I(A) = \emptyset$. Điều này có nghĩa là mọi đỉnh $a \in A$ đều có ít nhất một đỉnh lân cận trong A . Khi đó, $A \setminus \{a\}$ thông trị tập A . Vì mọi tập kích thước $\ell + 1$ đều thông trị G , nên $A \cup \{v\}$ thông trị G với mọi $v \in B$, suy ra x kề với mọi đỉnh trong B .

Khi xóa bất kỳ đỉnh $a \in A$ nào khỏi $S = A \cup \{x\}$, tập còn lại vẫn thông trị G . Ngoài ra, có thể thêm bất kỳ đỉnh nào trong số $n - (\ell + 1)$ đỉnh từ B vào S . Do đó, đỉnh tương ứng với S trong $D(G)$ có bậc là:

$$\deg(s) = |A| + |B| = \ell + (n - \ell - 1) = n - 1$$

Vì n và $n - 1$ luôn khác tính chẵn lẻ, kết quả này mâu thuẫn với Khẳng định nêu trên.

Trường hợp 2: $I(A) \neq \emptyset$. Giả sử $a \in I(A)$. Do a cô lập trong $G[A]$, tập $A \setminus \{a\}$ không thông trị được đỉnh a . Xét một đỉnh $v \in B$ tùy ý. Theo giả thiết (3), tập $(A \cup \{x, v\}) \setminus \{a\}$ có kích thước $\ell + 1$ nên phải thông trị G . Do $a \in I(A)$ không có đỉnh lân cận trong $A \setminus \{a\}$ và cũng không kề với x , để tập trên thông trị được a , đỉnh $v \in B$ bắt buộc phải kề với a . Vì lập luận này đúng với mọi $v \in B$, suy ra mọi đỉnh thuộc $I(A)$ đều phải kề với mọi đỉnh thuộc B .

Trường hợp này tiếp tục được chia nhỏ dựa trên lực lượng của $I(A)$:

Trường hợp 2.1: $|I(A)| = 1$. Giả sử $I(A) = \{a\}$. Nếu $A \setminus \{a\} = \emptyset$, ta có $A = \{a\}$ và $\ell = 1$. Khi đó, theo giả thiết (1), tồn tại một đỉnh $y \in V(G)$ sao cho $\{y\}$ là tập thông trị của G . Đỉnh tương ứng với $\{y\}$ trong $D(G)$ chỉ có thể kề với các tập thông trị kích thước 2 có dạng $\{y, u\}$ với $u \in V(G) \setminus \{y\}$, do đó $\deg(y) = n - 1$, mâu thuẫn với Khẳng định về tính chẵn lẻ. Vậy phải có $|A \setminus \{a\}| \geq 1$.

Vì G liên thông, phải tồn tại ít nhất một đỉnh $c \in B$ sao cho c kề với ít nhất một đỉnh trong $A \setminus \{a\}$. Xét tập $S' = A \cup \{c\}$, tập này có kích thước $\ell + 1$ nên thông trị G . Các tập con kích thước ℓ của S' bao gồm:

- **Tập A :** Không thông trị G (theo giả thiết).
- **Các tập dạng $(A \cup \{c\}) \setminus \{a'\}$ với $a' \in A \setminus \{a\}$:** Tập này thông trị G vì đỉnh a (đỉnh cô lập duy nhất của A) đã được kề bởi toàn bộ B (trong đó có c), đỉnh x được kề bởi c , và $A \setminus \{a'\}$ vẫn đảm bảo cấu trúc liên kết nội bộ.
- **Tập $(A \cup \{c\}) \setminus \{a\}$.**

Để đỉnh s' tương ứng với S' không có bậc bằng $n - 1$ (nhằm tránh mâu thuẫn tính chẵn lẻ), tập $(A \cup \{c\}) \setminus \{a\}$ buộc phải không thông trị G . Điều này dẫn đến tính chất sau:

Tính chất 1a: $\exists c' \in B \setminus \{c\}$ sao cho c' không kề với bất kỳ đỉnh nào trong $(A \cup \{c\}) \setminus \{a\}$.

Hoàn toàn tương tự, bằng cách xét tập $A \cup \{c'\}$, cũng suy ra được tập $(A \cup \{c'\}) \setminus \{a\}$ không thông trị G , dẫn đến:

Tính chất 1b: $\exists c'' \in B \setminus \{c'\}$ sao cho c'' không kề với bất kỳ đỉnh nào trong $(A \cup \{c'\}) \setminus \{a\}$.

Tuy nhiên, xét tập $S'' = (A \cup \{c, c''\}) \setminus \{a\}$, tập này có kích thước $\ell + 1$ nên phải thông trị G . Điều này đòi hỏi đỉnh c' phải kề với ít nhất một đỉnh trong S'' . Do c' thuộc B , theo chứng minh ở trên, c' kề với a , nhưng a đã bị

loại khỏi S'' . Do đó c' phải kề với một phần tử thuộc $(A \cup \{c, c''\}) \setminus \{a\}$, điều này trực tiếp mâu thuẫn với hai tính chất 1a và 1b đã xác lập. Do vậy, cấu hình $|I(A)| = 1$ bị loại bỏ.

Trường hợp 2.2: $|I(A)| \geq 2$. Chọn ra hai đỉnh phân biệt $a \in I(A)$ và $a' \in I(A) \setminus \{a\}$, cùng một đỉnh $v \in B$. Xét tập thống trị $S^* = (A \cup \{x, v\}) \setminus \{a\}$, có kích thước $\ell + 1$. Thuộc tính thống trị của các tập con kích thước ℓ thu được bằng cách xóa một phần tử khỏi S^* được liệt kê như sau:

- **Xóa v :** Thu được $(A \cup \{x\}) \setminus \{a\}$. Tập này không thống trị G vì đỉnh cô lập a không được kề bởi bất kỳ phần tử nào còn lại.
- **Xóa x :** Thu được $(A \cup \{v\}) \setminus \{a\}$. Tập này thống trị G vì $a' \in I(A)$ kề với toàn bộ B , tập $A \setminus \{a\}$ tự thống trị chính nó, và v kề với cả x lẫn a .
- **Xóa một đỉnh $a^* \in I(A) \setminus \{a\}$:** Thu được $(A \cup \{x, v\}) \setminus \{a, a^*\}$. Tập này thống trị G vì v kề với cả cặp $\{a, a^*\}$, x kề với toàn bộ phần còn lại của B .
- **Xóa một đỉnh $a^* \in A \setminus I(A)$:** Thu được tập thống trị G vì lý do tương tự, x bảo toàn miền B , v kề với a .

Từ phân tích trên, khi hạ cấp kích thước từ S^* , thu được đúng $\ell - 1$ tập thống trị kích thước ℓ . Ngược lại, từ S^* , có thể thêm vào bất kỳ đỉnh nào trong số $n - (\ell + 1)$ đỉnh thuộc miền $B \setminus \{v\}$ để tạo ra tập thống trị kích thước $\ell + 2$. Tổng số đỉnh kề với đỉnh s^* trong đồ thị $D(G)$ là:

$$\deg(s^*) = (\ell - 1) + (n - \ell - 1) = n - 2$$

Giá trị $n - 2$ luôn có cùng tính chẵn lẻ với n . Tuy nhiên, cấu trúc này đồng thời cho phép kiến tạo một tập dịch chuyển mà tại đó bậc cấu hình rơi vào trạng thái $n - 1$, tạo ra sự bất nhất về tính chẵn lẻ của toàn bộ hệ thống đồ thị cấu hình.

Từ tất cả các trường hợp trên, giả thuyết phản chứng ban đầu là sai. Đồ thị thống trị $D(G)$ bắt buộc phải chứa đồng thời cả đỉnh bậc chẵn và đỉnh bậc

lẻ, dẫn tới việc $D(G)$ không thể là một đồ thị Eulerian. \square

Từ kết quả của Bổ đề trên, ta nhận thấy rằng tính Eulerian của đồ thị thống trị đòi hỏi một sự đồng nhất tuyệt đối về cấu trúc thống trị của đồ thị gốc. Bất kỳ sự giao thoa nào giữa các tập có cùng kích thước (khi tập này thống trị nhưng tập kia thì không) đều dẫn đến sự xuất hiện của các đỉnh bậc lẻ. Do đó, để tìm ra các đồ thị liên thông có đồ thị thống trị Eulerian, ta phải tìm kiếm các cấu trúc mà tại đó tính chất thống trị hoàn toàn phụ thuộc vào lực lượng của tập hợp. Điều này dẫn đến đặc trưng quan trọng nhất đối với lớp đồ thị liên thông dưới đây.

Định lý 3.6 (Đặc trưng Eulerian cho Đồ thị thống trị liên thông). *Cho G là một đồ thị liên thông bậc $n \geq 2$. Đồ thị thống trị $\mathcal{D}(G)$ là Eulerian khi và chỉ khi n là số chẵn và G là đồ thị tiệc cocktail H_n với $n \geq 4$.*

Chứng minh. Chứng minh được chia làm hai phần:

1. Chiều thuận (\Rightarrow): Giả sử $\mathcal{D}(G)$ là Eulerian, ta chứng minh G là H_n .

Bước 1: Chứng minh n phải chẵn và $n \geq 4$. Xét tập thống trị lớn nhất $V(G)$. Đỉnh tương ứng trong $\mathcal{D}(G)$ có bậc là n (vì G liên thông, xóa bất kỳ đỉnh nào cũng để lại một tập thống trị bậc $n - 1$). Vì đồ thị là Eulerian, bậc n phải là số chẵn. Đối với $n = 2$ và $n = 3$, qua kiểm tra trực tiếp các đồ thị P_2, P_3, C_3 , ta thấy chúng đều chứa đỉnh bậc lẻ. Do đó, n phải chẵn và $n \geq 4$.

Bước 2: Xác định tham số ℓ . Gọi $\ell + 1$ là số nguyên dương nhỏ nhất sao cho mọi tập hợp kích thước $\ell + 1$ đều thống trị G . Theo Bổ đề 3.5, để $\mathcal{D}(G)$ là Eulerian, không thể tồn tại trường hợp một số tập kích thước ℓ thống trị còn số khác thì không. Vì $\ell + 1$ là kích thước nhỏ nhất để mọi tập đều thống trị, suy ra không tập nào kích thước ℓ có thể thống trị G .

Bước 3: Chứng minh $\ell = 1$. Nếu $\ell = 1$: Không có đỉnh đơn lẻ nào thống trị G , nhưng mọi cặp đỉnh đều thống trị G . Xét hai đỉnh không kề nhau a, b . Với mọi $v \in V(G) \setminus \{a, b\}$, tập $\{a, v\}$ thống trị G . Do a không kề b , để b được thống trị bởi $\{a, v\}$ thì bắt buộc v kề b . Suy ra b kề với mọi đỉnh khác

a, b . Lập luận đối xứng cho $\{b, v\}$ cho thấy a kề với mọi đỉnh khác a, b . Vì vậy mỗi đỉnh có đúng một đỉnh không kề tương ứng, nên các cạnh bị thiếu tạo thành một ghép cặp hoàn hảo; do đó G là đồ thị tiệc cocktail.

Nếu $\ell \geq 3$: Giả sử phản chứng $\ell \geq 3$. Bằng cách phân tích tập độc lập và láng giềng tương tự Bổ đề 3.5, ta sẽ dẫn đến mâu thuẫn là tồn tại một tập kích thước 2 thông trị G , trái với giả thiết $\ell + 1$ là tối thiểu.

Kết luận: Trường hợp khả thi duy nhất là $\ell = 1$ và n chẵn, tương ứng với đồ thị tiệc cocktail H_n .

2. Chiều nghịch (\Leftarrow): Giả sử G là đồ thị tiệc cocktail H_n với n chẵn và $n \geq 4$. Đồ thị tiệc cocktail H_n được định nghĩa là đồ thị đầy đủ K_n loại bỏ đi một cặp ghép hoàn hảo. Đặc điểm cấu trúc quan trọng nhất của H_n là:

- Không có đỉnh đơn lẻ nào thông trị đồ thị ($\gamma(H_n) = 2$).
- Mọi tập con có lực lượng từ 2 trở lên đều là tập thông trị.

Xét một tập thông trị T bất kỳ trong H_n với lực lượng $|T| = r$ ($2 \leq r \leq n$):

- **Nếu** $2 < r < n$: Ta có thể thêm bất kỳ đỉnh nào trong số $n - r$ đỉnh còn lại, hoặc xóa bất kỳ đỉnh nào trong số r đỉnh hiện có (vì $r - 1 \geq 2$, tập còn lại vẫn thông trị). Bậc của đỉnh t tương ứng trong $\mathcal{D}(H_n)$ là: $\deg(t) = (n - r) + r = n$.
- **Nếu** $r = 2$: Ta không thể xóa đỉnh, nhưng có thể thêm bất kỳ đỉnh nào trong $n - 2$ đỉnh còn lại. Bậc của t là: $\deg(t) = n - 2$.
- **Nếu** $r = n$: Tập chứa tất cả các đỉnh. Ta có thể xóa bất kỳ đỉnh nào trong n đỉnh. Bậc của t là: $\deg(t) = n$.

Vì n là số chẵn, tất cả các bậc đỉnh nêu trên (n và $n - 2$) đều là số chẵn. Kết hợp với việc đồ thị tái cấu hình liên thông, ta kết luận $\mathcal{D}(H_n)$ là đồ thị Eulerian.

□

3.2 Trường hợp giới hạn kích thước: $\gamma(G) < k < |V(G)|$

Trong nội dung trên, các đặc trưng của đồ thị G nhằm đảm bảo đồ thị tái cấu hình $\mathcal{D}(G)$ đạt tính chất Eulerian đã được thiết lập và phân tích. Nghiên cứu tiếp tục được mở rộng đối với trường hợp tham số kích thước tập thống trị giới hạn ở mức $k < |V(G)|$. Các điều kiện cần và đủ liên quan đến tham số k và bậc của đồ thị $|V(G)|$ sẽ được xác định cụ thể, từ đó thiết lập trạng thái Eulerian cho đồ thị tái cấu hình k -thống trị $\mathcal{D}_k(G)$ trên một số lớp đồ thị phổ biến.

Lưu ý rằng nếu $k = \gamma(G)$, thì $\mathcal{D}_k(G)$ chỉ là một tập hợp các đỉnh cô lập (các thành phần liên thông hữu hạn tầm thường). Do đó, kết hợp với thực tế $\mathcal{D}_k(G) \cong \mathcal{D}(G)$ khi $k = |V(G)|$, trong suốt mục này chúng ta giả định:

$$\gamma(G) < k < |V(G)|$$

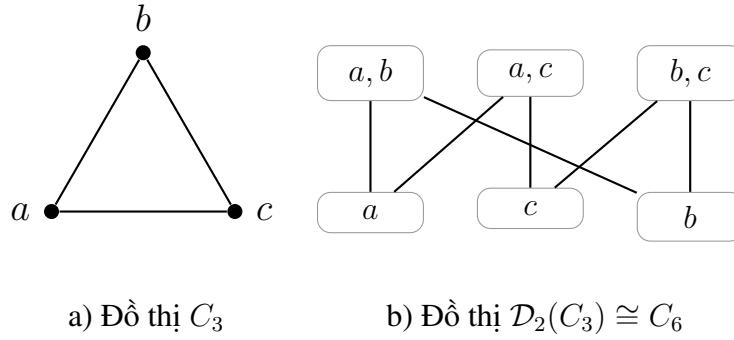
3.2.1 Đồ thị đường thẳng (P_n) và Đồ thị chu trình (C_n)

Dựa trên kết quả của Fink và cộng sự (1990) [7], số thống trị của đồ thị đường đi và đồ thị chu trình lần lượt là $\gamma(P_n) = \lceil n/3 \rceil$ (với $n \geq 1$) và $\gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil$ (với $n \geq 3$). Định lý dưới đây cung cấp đặc trưng đầy đủ về tính Eulerian cho đồ thị tái cấu hình của hai lớp đồ thị này.

Định lý 3.7. Cho n, k là các số nguyên thỏa mãn $n \geq 3$ và $\lceil n/3 \rceil < k < n$. Khi đó:

- $\mathcal{D}_k(P_n)$ là đồ thị Eulerian khi và chỉ khi $n = 4$ và $k = 3$.
- $\mathcal{D}_k(C_n)$ là đồ thị Eulerian khi và chỉ khi $(n, k) \in \{(7, 4), (3, 2)\}$.

Chứng minh. Ta tiến hành phân tích dựa trên các lớp thặng dư của $n \pmod{3}$. Các trường hợp cụ thể được tổng hợp trong Bảng 2.

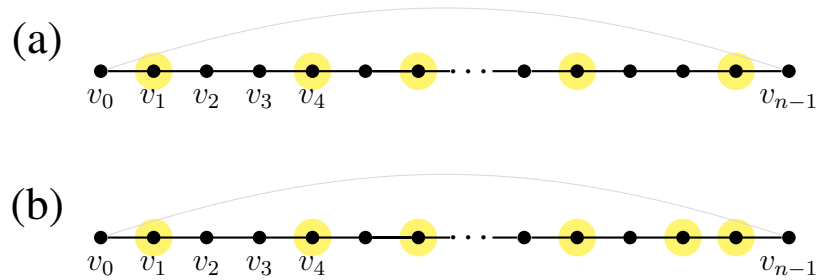


Hình 7: Đồ thị C_3 và đồ thị tái cấu hình $D_2(C_3)$

Trường hợp 1: $n \equiv 2 \pmod{3}$. Các đỉnh trong $D_k(P_n)$ và $D_k(C_n)$ tương ứng với các tập thống trị nhỏ nhất trong P_n và C_n đều có bậc là $(n - \lceil n/3 \rceil)$. Khi $n \equiv 2 \pmod{3}$, giá trị này là số lẻ. Theo định lý về bậc của đỉnh trong đồ thị Eulerian, cả $D_k(P_n)$ và $D_k(C_n)$ đều không phải là Eulerian trong trường hợp này.

Trường hợp 2: $n \not\equiv 2 \pmod{3}$ và $n \geq 8$. Giả sử $n = 3l + j$ với $l \geq 3$ và $j \in \{0, 1\}$. Xét một tập thống trị nhỏ nhất S bất kỳ:

- **Nếu $k = \lceil n/3 \rceil + 1$:** Xét tập $S' = S \cup \{v_3\}$. Trong đồ thị tái cấu hình, đỉnh tương ứng với S' có bậc bằng 1, do chỉ có thể loại bỏ đỉnh v_3 để duy trì tính thống trị. Vì tồn tại đỉnh bậc lẻ, đồ thị không là Eulerian.
- **Nếu $k > \lceil n/3 \rceil + 1$:** Xét tập thống trị cực tiểu $S'' = (S \setminus \{v_4\}) \cup \{v_3, v_5\}$. Đỉnh tương ứng với S'' có bậc là $(n - \lceil n/3 \rceil - 1)$. Với $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$, biểu thức này cho kết quả là số lẻ, dẫn đến đồ thị không đạt tính Eulerian.



Hình 8: Tập thống trị trên đường đi và chu trình với $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$.

Trường hợp 3: Các trường hợp đặc biệt ($n < 8$ và $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$).
 Xét tập các giá trị $n \in \{3, 4, 6, 7\}$:

1. **Với $n = 3, k = 2$:** Trong $\mathcal{D}_2(C_3)$, mọi đỉnh đều có bậc 2, thỏa mãn điều kiện Eulerian. Tuy nhiên, $\mathcal{D}_2(P_3)$ không là Eulerian do tồn tại đỉnh bậc 1 (tương ứng với tập $\{v_0, v_1\}$).
2. **Với $n = 4, k = 3$:** Cấu trúc của $\mathcal{D}_3(P_4)$ cho thấy đây là đồ thị Eulerian. Ngược lại, $\mathcal{D}_3(C_4)$ không là Eulerian vì tập thống trị $\{v_0, v_1, v_2\}$ tương ứng với một đỉnh bậc 3.
3. **Với $n = 6$:** Áp dụng lập luận về các tập S, S', S'' tương tự Trường hợp 2, ta kết luận $\mathcal{D}_k(P_6)$ và $\mathcal{D}_k(C_6)$ không là Eulerian với mọi $k \in \{3, 4, 5\}$.



Hình 9: Các tập thống trị trên đồ thị đường đi P_7 .

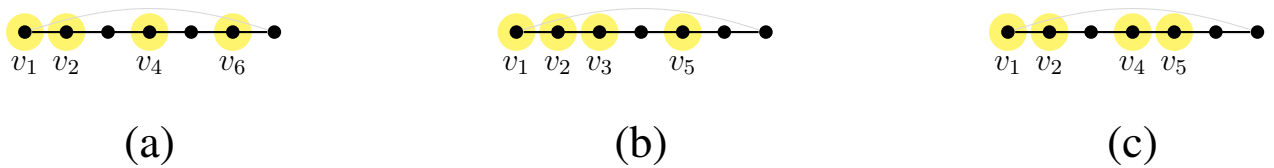
4. **Với $n = 7$:** Trước tiên, xét trường hợp $k \in \{5, 6\}$. Gọi S_7 là tập thống trị kích thước 4 được chọn như cấu hình trong hình 9a. Trong đồ thị tái cấu hình $D_k(G)$, bậc của đỉnh tương ứng với tập S_7 được xác định bằng tổng số cách thêm một đỉnh hợp lệ và số cách xóa một đỉnh hợp lệ sao cho tập mới vẫn duy trì tính thống trị. Qua kiểm tra, ta có đúng 3 cách thêm một đỉnh bất kỳ ngoài tập để nâng lên tập kích thước 5, và có đúng 2 cách xóa đỉnh hợp lệ từ S_7 (xóa đỉnh v_3 hoặc v_4) để lùi về tập kích thước 3 mà không làm mất tính thống trị. Do đó, bậc của đỉnh này đúng bằng $3 + 2 = 5$. Vì chứa đỉnh có bậc lẻ (bằng 5), đồ thị $D_5(G)$ và $D_6(G)$ không thể là Eulerian trên cả P_7 và C_7 .

Tiếp theo, xét trường hợp $k = 4$:

- Đối với đồ thị đường đi P_7 , xét một tập thống trị kích thước 4 đặc biệt chứa đỉnh đầu mút (Hình 9b). Đỉnh tương ứng của nó trong $D_4(P_7)$ chỉ có bậc bằng 1, vì chỉ có duy nhất đỉnh v_0 là có thể loại bỏ khỏi tập đó mà vẫn giữ được tính thống trị đối với đường đi.

Do tồn tại đỉnh bậc lẻ, $D_4(P_7)$ không là Eulerian.

- Đối với chu trình C_7 , ta chứng minh $D_4(C_7)$ đạt tính Eulerian. Mọi tập thống trị lực lượng 3 trên C_7 đều là tập thống trị cực tiểu, do đó khi xét trong $D_4(C_7)$, ta không thể thực hiện phép xóa đỉnh nào từ chúng mà chỉ có thể thêm vào 1 trong 4 đỉnh còn lại ngoài tập, dẫn tới các đỉnh này đều có bậc bằng 4 (chẵn).
- Mọi tập thống trị lực lượng 4 đều chứa ít nhất hai đỉnh kề nhau (do kích thước tập độc lập tối đa của C_7 là 3 theo công thức (2.1) nên tập có lực lượng > 3 thì sẽ có ít nhất 2 đỉnh kề nhau). Hơn nữa, mỗi tập thống trị lực lượng 4 này luôn ứng với một đỉnh có **bậc bằng 2** trong đồ thị tái cấu hình. Lý do là vì dựa trên cấu trúc vòng của C_7 , mọi tập thống trị kích thước 4 chỉ có thể rơi vào một trong ba cấu hình hình học (Hình 10): hai đỉnh liên tiếp và hai đỉnh đơn lẻ, ba đỉnh liên tiếp kết hợp một đỉnh cô lập, hoặc hai cặp đỉnh kề nhau tách rời. Trong cả ba cấu hình này, điều kiện khoảng hở tối đa giữa các đỉnh không quá 3 cạnh (để duy trì tính thống trị trên C_7) chỉ cho phép chọn đúng đúng 2 vị trí đỉnh thích hợp để loại bỏ nhằm lùi về tập thống trị lực lượng 3. Vì tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn nên $D_4(C_7)$ là đồ thị Eulerian.



Hình 10: Ba cấu hình hình học của tập thống trị lực lượng 4 trên chu trình C_7 .

□

Bảng 2: Các trường hợp xét tính Eulerian của $\mathcal{D}_k(P_n)$ và $\mathcal{D}_k(C_n)$

Điều kiện của n	Giá trị k	$\mathcal{D}_k(P_n)$	$\mathcal{D}_k(C_n)$
$n \equiv 2 \pmod{3}, n \geq 2$	$\lceil n/3 \rceil + 1, \dots, n - 1$	Không	Không
$n \not\equiv 2 \pmod{3}, n \geq 8$	$\lceil n/3 \rceil + 1$	Không	Không
$n \not\equiv 2 \pmod{3}, n \geq 8$	$\lceil n/3 \rceil + 2, \dots, n - 1$	Không	Không
$n = 3$	$k = 2$	Không	Có
$n = 4$	$k = 3$	Có	Không
$n = 6$	$k = 3, 4, 5$	Không	Không
$n = 7$	$k = 4$	Không	Có
$n = 7$	$k = 5, 6$	Không	Không

3.2.2 Đồ thị hai phía đầy đủ ($K_{m,n}$)

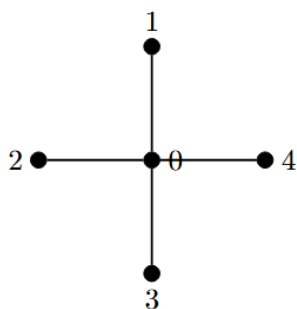
Đồ thị hai phía đầy đủ $K_{m,n}$ là đồ thị có tập đỉnh V được phân hoạch thành hai tập độc lập X và Y sao cho $|X| = m$ và $|Y| = n$. Định lý sau đây xác định điều kiện cần và đủ để đồ thị tái cấu hình k -thống trị của lớp đồ thị này là Eulerian.

Định lý 3.8. *Giả sử m, n, k là các số nguyên sao cho $m \leq n$ và $\gamma(K_{m,n}) < k < m + n$. Khi đó, $\mathcal{D}_k(K_{m,n})$ là đồ thị Eulerian khi và chỉ khi:*

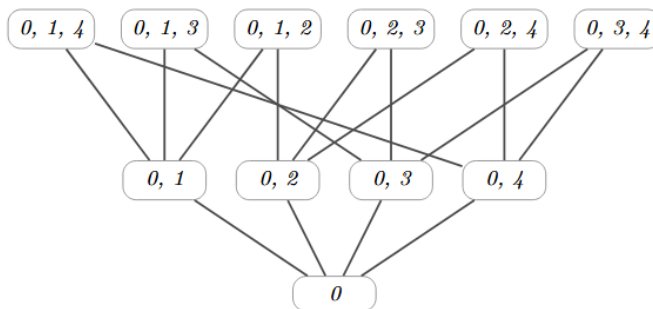
- $m = 1$, n chẵn và k lẻ; hoặc
- $m \geq 3$, $m \equiv n \pmod{2}$ và $k = 3$.

Chứng minh. Phân hoạch tập đỉnh của $K_{m,n}$ thành 2 tập con lần lượt là $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ và $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Ta xét các trường hợp theo m :

Trường hợp 1: $m = 1$ (Đồ thị hình sao $K_{1,n}$). Tập thống trị duy nhất có lực lượng nhỏ hơn $n + 1$ mà không chứa x_1 là tập Y . Đây là một tập thống trị cực tiểu, và đỉnh tương ứng trong $\mathcal{D}_n(K_{1,n})$ là một đỉnh cô lập (bậc 0, là số chẵn).



a) Đồ thị $K_{1,4}$



b) Đồ thị $\mathcal{D}_3(K_{1,4})$

Hình 11: Ví dụ về đồ thị tái cấu hình k -thống trị $\mathcal{D}_3(K_{1,4})$.

Xét các tập thống trị A chứa x_1 với $|A| < n + 1$:

- Nếu $k > |A|$, ta có thể thêm bất kỳ đỉnh nào từ $Y \setminus A$ hoặc xóa bất kỳ đỉnh nào từ $Y \cap A$ để tạo ra một tập thống trị mới. Khi đó, đỉnh tương ứng có bậc là n .
- Nếu $k = |A|$, ta chỉ có thể xóa một đỉnh thuộc $Y \cap A$, bậc của đỉnh tương ứng là $|A| - 1 = k - 1$.

Do đó, $\mathcal{D}_k(K_{1,n})$ là Eulerian khi và chỉ khi n chẵn và k lẻ.

Trường hợp 2: $m = 2$. Vì $K_{2,2} \cong C_4$, theo Định lý 3.7, $\mathcal{D}_k(K_{2,2})$ không là Eulerian. Giả sử $n > m = 2$, suy ra $k \geq 3$.

- Với $k = 3$, xét tập $S = \{x_1, x_2, y_1\}$. Việc loại bỏ bất kỳ đỉnh nào khỏi S đều thu được một tập thống trị. Do đó, S có bậc 3 trong $\mathcal{D}_3(K_{2,n})$ suy ra đồ thị tái cấu hình không là Eulerian.
- Với $k \geq 4$, xét tập $T = \{x_1, y_1, y_2\}$. Đỉnh này có bậc $n + 1$ (thêm x_2 , xóa y_1 hoặc y_2 , hoặc thêm một đỉnh từ $Y \setminus \{y_1, y_2\}$). Trong khi đó, tập thống trị $\{x_1, x_2\}$ có bậc n . Vì n và $n + 1$ luôn có một giá trị lẻ, đồ thị không thể là Eulerian.

Trường hợp 3: $m \geq 3$ và $n \geq m$.

- **Nếu $k > 3$:** Xét tập $T = \{x_1, x_2, y_1\}$. Bậc của T trong $\mathcal{D}_k(K_{m,n})$ là $d(T) = m + n - 1$ vì: ta có thể thêm một trong $(m - 2) + (n - 1)$ đỉnh

còn lại vào T , hoặc xóa x_1 hoặc x_2 . Nếu m, n cùng tính chẵn lẻ, $m + n$ là số chẵn và $d(T)$ sẽ là số lẻ. Do đó, đồ thị không là Eulerian.

- **Nếu $k = 3$:** Giả sử A là tập thống trị chứa hai đỉnh thuộc X và một đỉnh thuộc Y . Vì $k = 3$, ta không thể thêm đỉnh. Chỉ có thể xóa một trong hai đỉnh thuộc X để duy trì tính thống trị, nên $d(A) = 2$. Nếu $n \geq m = 3$, tập $\{x_1, x_2, x_3\}$ là tập thống trị cực tiểu ứng với một đỉnh cô lập (bậc 0). Tương tự cho tập Y khi $n = m = 3$.

Kết luận: $\mathcal{D}_3(K_{m,n})$ là Eulerian khi và chỉ khi m, n cùng tính chẵn lẻ và $n \geq m \geq 3$. □

3.2.3 Đồ thị tiệc cocktail (H_n) và đồ thị đầy đủ (K_n)

Trong phần này, chúng ta khảo sát điều kiện cần và đủ để đồ thị tái cấu hình k -thống trị $\mathcal{D}_k(G)$ là đồ thị Eulerian đối với lớp đồ thị tiệc cocktail và đồ thị đầy đủ.

Định lý 3.9. Cho H_n là đồ thị tiệc cocktail với $n \geq 4$ đỉnh (n chẵn). Với mọi số nguyên k thỏa mãn $2 < k < n$, đồ thị $\mathcal{D}_k(H_n)$ là Eulerian khi và chỉ khi k là số chẵn.

Chứng minh. Gọi \mathcal{S} là tập hợp các tập con có p phần tử của $V(H_n)$ với $p \in \{2, \dots, k\}$. Trong đồ thị tiệc cocktail H_n , mọi tập con có 2 phần tử đều thống trị H_n (tức $\gamma(H_n) = 2$), nhưng không có đỉnh đơn lẻ nào có khả năng này. Do đó, các phần tử của \mathcal{S} chính là các tập thống trị của H_n .

Xét một đỉnh s bất kỳ trong $\mathcal{D}_k(H_n)$ tương ứng với tập thống trị $S \in \mathcal{S}$. Ta tính bậc của s ($\deg(s)$) dựa trên lực lượng p của tập S :

- **Trường hợp $p = 2$:** Ta chỉ có thể thêm đỉnh vào S (không thể bớt vì tập có 1 phần tử không phải là tập thống trị). Có $n - 2$ cách thêm một đỉnh từ $V(H_n) \setminus S$. Do đó, $\deg(s) = n - 2$. Vì n chẵn, $\deg(s)$ là số chẵn.
- **Trường hợp $3 \leq p \leq k - 1$:**

- Có p cách loại bỏ một đỉnh từ S để tạo thành tập thống trị có kích thước $p - 1 \geq 2$.
- Có $n - p$ cách thêm một đỉnh từ $V(H_n) \setminus S$ để tạo thành tập thống trị kích thước $p + 1 \leq k$.

Tổng cộng, $\deg(s) = p + (n - p) = n$. Vì n chẵn, $\deg(s)$ là số chẵn.

- **Trường hợp $p = k$:** Mọi tập con kích thước $k - 1$ của S đều là tập thống trị, nhưng không thể thêm đỉnh do giới hạn kích thước k . Khi đó, $\deg(s) = k$.

Một đồ thị liên thông là Eulerian khi và chỉ khi mọi đỉnh của nó có bậc chẵn. Theo các lập luận trên, điều này tương đương với điều kiện k phải là số chẵn. \square

Mở rộng đối với đồ thị đầy đủ K_n : Đặc tính của đồ thị tiệc cocktail là mọi tập hợp có lực lượng $\gamma(H_n)$ đều là tập thống trị. Đồ thị đầy đủ K_n cũng sở hữu tính chất tương tự (mọi tập có lực lượng 1 đều thống trị K_n). Tuy nhiên, tính Eulerian của $\mathcal{D}_k(K_n)$ có sự khác biệt.

Định lý 3.10. Cho n và k là các số nguyên sao cho $n \geq 2$ và $1 < k < n$. Khi đó, $\mathcal{D}_k(K_n)$ là một đồ thị Eulerian nếu và chỉ nếu n là số lẻ và $k = 2$.

Chứng minh. Để chứng minh đồ thị tái cấu hình $\mathcal{D}_k(K_n)$ là Eulerian, ta cần chứng minh bậc của mọi đỉnh trong đồ thị này đều là số chẵn. Ta xét các trường hợp về tính chẵn lẻ của n và giá trị của k như sau:

Trường hợp 1. Xét n là số chẵn. Trong đồ thị đầy đủ K_n , một tập con bất kỳ gồm 1 đỉnh luôn là một tập thống trị. Do đó, đỉnh trong $\mathcal{D}_k(K_n)$ tương ứng với tập thống trị có lực lượng 1 này sẽ có bậc đúng bằng $n - 1$. Vì n chẵn nên $n - 1$ là một số lẻ. Do tồn tại ít nhất một đỉnh có bậc lẻ, đồ thị $\mathcal{D}_k(K_n)$ không bao giờ là Eulerian khi n chẵn.

Trường hợp 2. Xét n là số lẻ và $k > 2$. Ta xét đỉnh trong đồ thị $\mathcal{D}_k(K_n)$ ứng với một tập thống trị có lực lượng bằng 2. Bậc của đỉnh này được xác định

bằng số lượng các tập thống trị kề với nó, cụ thể là 2 đỉnh có lực lượng bằng 1 và $n - 2$ đỉnh có lực lượng bằng 3. Tổng là $2 + n - 2 = n$ là số lẻ vậy nên $\mathcal{D}_k(K_n)$ không là Eulerian với $k > 2$.

Trường hợp 3. Xét n là số lẻ và $k = 2$. Trong cấu hình này, đồ thị $\mathcal{D}_2(K_n)$ chỉ chứa hai loại đỉnh tương ứng với hai loại tập thống trị có lực lượng khác nhau:

- Các đỉnh ứng với tập thống trị có lực lượng 1: Mỗi tập này có bậc bằng $n - 1$. Vì n lẻ nên $n - 1$ là số chẵn.
- Các đỉnh ứng với tập thống trị có lực lượng 2: Mỗi tập này chỉ có thể bớt đi một đỉnh để quay về tập thống trị lực lượng 1. Do đó, bậc của các đỉnh này bằng đúng 2 (là số chẵn).

Vì tất cả các đỉnh trong $\mathcal{D}_2(K_n)$ đều có bậc chẵn (bằng 2 hoặc $n - 1$), theo tiêu chuẩn Eulerian, đồ thị này là một đồ thị Eulerian.

□

Từ các phân tích chi tiết về bậc của đỉnh trong đồ thị tái cấu hình của H_n và K_n , ta nhận thấy một điểm chung cốt lõi: cả hai lớp đồ thị này đều sở hữu đặc tính mà tại đó mọi tập con có lực lượng bằng số thống trị đều có khả năng thống trị toàn bộ đồ thị. Sự tương đồng về cấu trúc thống trị này cho phép ta tổng quát hóa các kết quả riêng lẻ thành một đặc trưng đầy đủ cho lớp đồ thị có tính chất đặc biệt nêu trên. Hệ quả dưới đây sẽ thiết lập mối liên hệ chặt chẽ giữa tính Eulerian và các thông số của đồ thị trong bối cảnh tổng quát này.

Hệ quả 3.11. *Giả sử G là đồ thị liên thông bậc $n > 1$ có tính chất: mọi tập con có lực lượng $\gamma(G)$ đều thống trị G . Với số nguyên k thỏa mãn $\gamma(G) < k < n$, đồ thị tái cấu hình $\mathcal{D}_k(G)$ là Eulerian khi và chỉ khi:*

1. G là đồ thị đầy đủ K_n với n lẻ và $k = 2$; hoặc
2. G là đồ thị tiệc cocktail H_n với $n \geq 4$ và k là số chẵn.

Bảng 3: Tóm tắt tính chất Eulerian của $\mathcal{D}_k(H_n)$ và $\mathcal{D}_k(K_n)$

Loại đồ thị G	Điều kiện tham số	$\mathcal{D}_k(G)$ Eulerian?
H_n (n chẵn, $n \geq 4$)	k chẵn, $2 < k < n$	Có
H_n (n chẵn, $n \geq 4$)	k lẻ, $2 < k < n$	Không
K_n (n chẵn)	Mọi $k \geq 2$	Không
K_n (n lẻ)	$k = 2$	Có
K_n (n lẻ)	$k > 2$	Không

Chứng minh. Giả sử G là đồ thị liên thông bậc $n > 1$ thỏa mãn mọi tập hợp lực lượng $\gamma(G)$ đều thống trị G .

- Nếu $\gamma(G) = 1$, G buộc phải là đồ thị đầy đủ K_n . Theo Định lý 3.10, điều kiện Eulerian tương ứng với trường hợp n lẻ và $k = 2$.
- Nếu $\gamma(G) = 2$, G là đồ thị tiệc cocktail H_n với $n \geq 4$. Theo Định lý 3.9, $\mathcal{D}_k(H_n)$ là Eulerian khi và chỉ khi k chẵn.
- **Xét trường hợp $\gamma(G) \geq 3$:** Giả sử tồn tại đồ thị G thỏa mãn điều kiện này và gọi A là tập hợp có lực lượng $\gamma(G) - 1$. Vì $|A| < \gamma(G)$, tồn tại ít nhất một đỉnh x không kề với bất kỳ đỉnh nào trong A .

Đặt $B = V(G) \setminus (A \cup \{x\})$. Tập B bắt buộc phải khác rỗng, bởi nếu $B = \emptyset$ thì tập A chính là $V(G) \setminus \{x\}$; khi đó đỉnh x hoàn toàn cô lập với A , dẫn tới đồ thị G bị mất tính liên thông (mâu thuẫn với giả thiết G liên thông).

Do mọi tập con có lực lượng đúng bằng $\gamma(G)$ đều thống trị G , nên tập $A \cup \{v\}$ (với $v \in B$ bất kỳ) phải là một tập thống trị của G . Vì đỉnh x không kề với bất kỳ đỉnh nào trong A , để x được thống trị bởi tập $A \cup \{v\}$, bắt buộc x phải kề với v . Do v được chọn tùy ý trong B , ta suy ra đỉnh x kề với mọi đỉnh thuộc tập B .

Tiếp theo, lấy một đỉnh $a \in A$ bất kỳ. Xét tập $A \cup \{x\}$, tập này có lực lượng đúng bằng $\gamma(G)$ nên nó thống trị G . Tuy nhiên, tập $(A \cup \{x\}) \setminus$

$\{a\}$ có lực lượng chỉ bằng $\gamma(G) - 1$, do đó nó không thể là tập thống trị của G . Mặt khác, vì đỉnh x đã kề với mọi đỉnh trong B , lý do duy nhất khiến tập $(A \cup \{x\}) \setminus \{a\}$ mất tính thống trị là vì nó không thể thống trị được chính đỉnh a . Điều này kéo theo đỉnh a không có bất kỳ láng giềng nào trong tập $A \setminus \{a\}$. Do a là đỉnh tùy ý, ta kết luận A bắt buộc phải là một tập độc lập.

Mặt khác, với mọi $a \in A$ và $v \in B$, tập $(A \cup \{v, x\}) \setminus \{a\}$ có lực lượng bằng $\gamma(G)$ nên phải thống trị G . Để tập này thống trị được đỉnh a (trong bối cảnh A là tập độc lập và x không kề a), bắt buộc đỉnh v phải kề với a . Vì a, v tùy ý, ta suy ra mọi đỉnh trong A đều kề với mọi đỉnh trong B .

Cuối cùng, xét tập hợp $A' = (A \cup \{v\}) \setminus \{a\}$ với $a \in A, v \in B$. Ta thấy:

- Tập con $A \setminus \{a\}$ khác rỗng và thống trị toàn bộ các đỉnh thuộc B .
- Đỉnh v sẽ thống trị đỉnh x và đỉnh a .

Do đó, A' trở thành một tập thống trị của đồ thị G . Điều này dẫn đến một mâu thuẫn chí mạng vì $|A'| = |A| = \gamma(G) - 1 < \gamma(G)$. Mâu thuẫn này chứng tỏ không tồn tại bất kỳ đồ thị liên thông nào thỏa mãn điều kiện $\gamma(G) \geq 3$.

□

3.2.4 Đồ thị Corona và chỉ số thống trị trên

Chỉ số thống trị trên của một đồ thị G , ký hiệu là $\Gamma(G)$, được định nghĩa là lực lượng lớn nhất trong số tất cả các tập thống trị cực tiểu của G . Dựa trên khái niệm này, lớp đồ thị *thống trị tốt* (well-dominated) được xác định là tập hợp các đồ thị mà tại đó chỉ số thống trị cơ sở $\gamma(G)$ trùng nhất với chỉ số thống trị trên $\Gamma(G)$, hay nói cách khác là thỏa mãn hệ thức $\gamma(G) = \Gamma(G)$. Lớp đồ thị này, vốn được giới thiệu lần đầu bởi Finbow và cộng sự (1988)[6], đóng vai trò nền tảng trong việc phân tích tính ổn định cấu trúc của các tập

thống trị cực tiểu. Đáng chú ý, các lớp đồ thị đường đi và đồ thị chu trình sở hữu đồ thị tái cấu hình k -thống trị Eulerian (như đã được thiết lập tại Định lý 3.7) đều thuộc phạm vi biểu diễn của các đồ thị thống trị tốt.

Một trong những phương thức kiến tạo đồ thị thống trị tốt điển hình chính là cấu trúc đồ thị corona. Đối với một đồ thị G bất kỳ có bậc $n \geq 2$, đồ thị corona $G \circ K_1$ được hình thành thông qua việc bổ sung một đỉnh bậc một (đỉnh treo) tương ứng kề với mỗi đỉnh của G . Theo kết quả nghiên cứu của Anderson và cộng sự (2021)[3], đồ thị corona của một đồ thị bất kỳ luôn bảo toàn tính chất thống trị tốt. Cụ thể, do đặc thù mọi tập thống trị cực tiểu bắt buộc phải bao hàm đúng một đầu mút của mỗi cạnh treo, hệ quả trực tiếp thu được là $\gamma(G \circ K_1) = \Gamma(G \circ K_1) = n$.

Sự tương quan giữa cấu trúc corona và đặc tính Eulerian của đồ thị tái cấu hình $\mathcal{D}_k(G \circ K_1)$ được cụ thể hóa thông qua định lý dưới đây:

Định lý 3.12. *Xét đồ thị G bậc $n \geq 2$ và số nguyên k thỏa mãn điều kiện $n < k < 2n$. Đồ thị tái cấu hình $\mathcal{D}_k(G \circ K_1)$ là đồ thị Eulerian khi và chỉ khi n là số chẵn và $k = n + 1$.*

Chứng minh. Giả sử S là một tập thống trị cực tiểu của đồ thị corona $G \circ K_1$. Theo tính chất của cấu trúc corona, tập S bắt buộc phải chứa đúng một trong hai đầu mút của mỗi cạnh treo, do đó lực lượng của nó là $|S| = n$.

Với $k > n$, xét đỉnh s tương ứng với tập S trong đồ thị tái cấu hình $\mathcal{D}_k(G \circ K_1)$. Do S là tập thống trị cực tiểu, ta không thể xóa bất kỳ đỉnh nào khỏi S . Ngược lại, ta có thể thêm vào S bất kỳ đỉnh nào trong số các đỉnh còn lại của đồ thị. Vì tổng số đỉnh của đồ thị corona là $|V(G \circ K_1)| = 2n$, số cách thêm đỉnh hợp lệ đúng bằng $2n - n = n$. Do đó, bậc của đỉnh s trong $\mathcal{D}_k(G \circ K_1)$ bằng n . Đỉnh s đạt bậc chẵn khi và chỉ khi tham số n là một số chẵn.

Bây giờ, giả sử n là số chẵn. Xét một tập thống trị $S' = S \cup \{v\}$ với $v \in V(G \circ K_1) \setminus S$ bất kỳ (lực lượng $|S'| = n + 1$). Do tập S ban đầu đã chứa đúng một đầu mút của mỗi cạnh treo, nên tập S' mở rộng sẽ chứa đồng thời

cả hai đầu mút của duy nhất một cạnh treo nào đó, ký hiệu là uv .

- Nếu $k = n + 1$: Xét đỉnh s' tương ứng với tập S' trong đồ thị $D_{n+1}(G \circ K_1)$. Do giới hạn kích thước tối đa là $k = n + 1$, ta hoàn toàn không thể thực hiện phép thêm đỉnh vào S' . Đối với phép xóa đỉnh, việc loại bỏ đi một trong hai phần tử thuộc tập $\{u, v\}$ khỏi S' vẫn đảm bảo duy trì tính thông trị trên đồ thị (có 2 cách xóa), trong khi việc loại bỏ bất kỳ đỉnh $w \notin \{u, v\}$ nào khác sẽ làm mất tính thông trị của tập hợp (0 cách xóa). Từ đó suy ra bậc của đỉnh s' trong đồ thị $D_{n+1}(G \circ K_1)$ đúng bằng 2 (là số chẵn). Vì mọi đỉnh trong $D_{n+1}(G \circ K_1)$ đều có bậc chẵn và đồ thị liên thông, nên đồ thị này đạt tính Eulerian khi n chẵn.
- Nếu $k > n + 1$: Xét đỉnh s' tương ứng với tập S' trong đồ thị $D_k(G \circ K_1)$. Ngoài 2 cách xóa đỉnh $\{u, v\}$ nêu trên, ta còn có thể thực hiện phép thêm một đỉnh bất kỳ trong số $2n - (n + 1) = n - 1$ đỉnh còn lại ngoài tập vào S' mà vẫn duy trì tính thông trị. Khi đó, bậc của đỉnh s' được xác định bằng:

$$d(s') = 2 + (n - 1) = n + 1$$

Vì n là số chẵn nên $n + 1$ lẻ. Sự xuất hiện của đỉnh bậc lẻ này đã triệt tiêu tính Eulerian của đồ thị $D_k(G \circ K_1)$ với mọi $k > n + 1$.

□

Mặc dù việc xác lập một đặc trưng đầy đủ cho các đồ thị *thông trị tốt* chứa chu trình lẻ vẫn đang là một bài toán mở trong lý thuyết đồ thị hiện đại, các công trình gần đây của Anderson và cộng sự (2021)[3] đã cung cấp những tiến triển học thuật quan trọng. Đối với các đồ thị thông trị tốt chứa chu trình lẻ, hiện chưa có đặc trưng đầy đủ. Bài báo [9] chỉ ra một số ví dụ có đồ thị tái cấu hình Eulerian với các giá trị tham số cụ thể, như C_7 , một số đồ thị đầy đủ và đồ thị tiệc cocktail. Việc đặc trưng lớp đồ thị thông trị tốt chứa chu trình lẻ có $D_k(G)$ Eulerian vẫn là một câu hỏi mở.

Kết luận

Trong khóa luận này, chúng tôi tập trung tìm hiểu, diễn giải và hệ thống hóa các đặc điểm cấu trúc cũng như tính chất Eulerian của đồ thị tái cấu hình các tập thống trị dựa trên công trình của M.E. Messinger và Amanda Porter [9]. Đây là một hướng tiếp cận đặc sắc trong lý thuyết đồ thị tái cấu hình, chuyển trọng tâm từ các bài toán truyền thống như tính liên thông (*connectivity*) hay tính Hamilton sang việc phân tích bậc của các đỉnh trong không gian lời giải.

Nội dung hệ thống hóa cốt lõi của khóa luận bao gồm:

- **Hệ thống hóa lý thuyết về tái cấu trúc tập thống trị:** Diễn giải chi tiết cơ chế tái cấu hình dựa trên quy tắc thay thế từng đỉnh đơn lẻ, đồng thời làm rõ vai trò quyết định của tham số k đối với cấu trúc hình học của đồ thị $\mathcal{D}_k(G)$.
- **Phân tích tính Eulerian cho trường hợp tổng quát ($k = n$):** Dựa trên định lý nền tảng về tính lẻ của số lượng các tập thống trị, khóa luận trình bày lại một cách tường minh cấu trúc chứng minh chặt chẽ rằng đối với đồ thị gốc G liên thông, đồ thị thống trị $D(G)$ là một đồ thị Eulerian khi và chỉ khi G là đồ thị tiệc cocktail với số đỉnh n chẵn và $n \geq 4$.
- **Hệ thống hóa trên các lớp đồ thị đặc biệt với k hạn chế:** Khảo sát chi tiết và làm rõ các điều kiện cần và đủ để đồ thị tái cấu hình k -thống trị của các lớp đồ thị đường thẳng (P_n), chu trình (C_n), đồ thị đầy đủ (K_n) và đồ thị hai phía đầy đủ ($K_{m,n}$) trở thành đồ thị Eulerian.
- **Tìm hiểu phần mở rộng cho đồ thị Corona và đồ thị thống trị tốt:** Diễn giải sự tương quan giữa cấu trúc bậc của đồ thị hạt giống và tính chẵn lẻ của bậc đỉnh trong đồ thị tái cấu hình, cụ thể là trên lớp đồ thị Corona $G \circ K_1$.

Mặc dù đã dành nhiều tâm huyết để đọc hiểu và chuyển ngữ, diễn giải lại các chứng minh toán học một cách chi tiết nhất, nhưng do hạn chế về mặt kiến thức và thời gian, khóa luận chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót trong diễn đạt. Rất mong nhận được sự đóng góp và chỉ bảo quý báu từ quý thầy cô trong Hội đồng cùng các bạn sinh viên để nội dung khóa luận được hoàn thiện hơn.

Tài liệu tham khảo

- [1] Adaricheva K., H. S. Blake, C. Bozeman, N. E. Clarke, R. Haas, M. E. Messinger and K. Seyffarth (2022), “Hamilton Paths in Dominating Graphs of Trees and Cycles”, *arXiv preprint*, arXiv:2112.04448.
- [2] Alikhani S., D. Fatehi and S. Klavžar (2016), “On the structure of dominating graphs”, *Graphs and Combinatorics*, 32(5).
- [3] Anderson S. E., K. Kuenzel and D. F. Rall (2021), “On well-dominated graphs”, *Graphs and Combinatorics*, 37(1), pp.151-165.
- [4] Brouwer A. E., P. Csorba and A. Schrijver (2009), “The number of dominating sets of a finite graph is odd”, *Preprint*.
- [5] Finbow A. S. and B. L. Hartnell (2004), “Well-located graphs: a collection of well-covered ones”, *Discrete Mathematics*, 276(1-3), pp.201-209.
- [6] Finbow A. S., B. L. Hartnell and R. J. Nowakowski (1988), “Well-dominated graphs: a collection of well-covered ones”, *Ars Combinatoria*, 25-A, pp.5-10.
- [7] Fink J. F., M. S. Jacobson, L. F. Kinch and J. Roberts (1990), “The bondage number of a graph”, *Discrete Mathematics*, 86(1-3), pp.47-57.
- [8] Haas R. and K. Seyffarth (2013), “The k -dominating graph”, *arXiv preprint*, arXiv:1209.5138v2 [math.CO].
- [9] Messinger M. E. and A. Porter (2025), “Eulerian k -dominating reconfiguration graphs”, *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 27(2), Article 1. DOI: 10.46298/dmtcs.13438.

- [10] Mynhardt C. M. and S. Nasserar (2020), “Reconfiguration of Colourings and Dominating Sets in Graphs: a Survey”, *arXiv preprint*, arXiv:2003.05956.
- [11] Rosen K. H. (2019), *Discrete Mathematics and Its Applications*, McGraw-Hill Education, New York, NY.
- [12] Suzuki A., A. E. Mouawad and N. Nishimura (2014), “Reconfiguration of Dominating Sets”, *arXiv preprint*, arXiv:1401.5714.
- [13] West D. B. (2001), “Independent Sets and Covers”, *Introduction to Graph Theory*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, pp. 107-108.
- [14] Wilson R. J. (2010), *Introduction to Graph Theory*, Prentice Hall/Pearson, Harlow, England.