VNU-HUS MAT3302: Toán rời rạc | GV: Phan Thị Hà Dương (lý thuyết)

Bài tập tuần 4

02/10/2025 | GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Chú ý

(1) Danh sách bài tập mỗi tuần có ở `https://hoanganhduc.github.io/teaching/VNU-HUS/2025/winter/MAT3302/`.

(2) Tham gia Google Classroom (`https://classroom.google.com/c/ODAwMzkxNzA3OTEy?cjc=y6rexxh5`) để biết cách tính điểm thường xuyên qua việc lên bảng và điểm danh.

(3) Các bài tập đánh dấu sao ($\star$) có thể cần thời gian suy nghĩ lâu hơn.

Bài tập 1. (a) Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 10 chứa

- (i) chính xác bốn chữ số 1?
- (ii) nhiều nhất bốn chữ số 1?
- (iii) ít nhất bốn chữ số 1?
- (iv) số chữ số 0 và 1 bằng nhau?

(b) Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 12 chứa

- (i) chính xác ba chữ số 1?
- (ii) nhiều nhất ba chữ số 1?
- (iii) ít nhất ba chữ số 1?
- (iv) số chữ số 0 và 1 bằng nhau?

(c) Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 10 chứa

- (i) chính xác ba chữ số 0?
- (ii) nhiều chữ số 0 hơn chữ số 1?
- (iii) ít nhất bảy chữ số 1?
- (iv) ít nhất ba chữ số 1?

Bài tập 2. (a) Có bao nhiêu cách sắp xếp 8 bạn nam và 5 bạn nữ thành một hàng sao cho không có hai bạn nữ đứng cạnh nhau? (**Gợi ý:** Đầu tiên xếp các bạn nam rồi xét các vị trí có thể cho bạn nữ.)

(b) Có bao nhiêu cách sắp xếp 10 bạn nữ và 6 bạn nam thành một hàng sao cho không có hai bạn nam đứng cạnh nhau? (**Gợi ý:** Đầu tiên xếp các bạn nữ rồi xét các vị trí có thể cho bạn nam.)

(c) Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 bạn nam và 5 bạn nữ thành một hàng sao cho

   (i) tất cả bạn nam đứng cạnh nhau?

   (ii) tất cả bạn nữ đứng cạnh nhau?

Bài tập 3. (a) Giả sử một lớp học có 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một ban cán sự gồm 6 thành viên nếu ban cán sự phải có số nam và nữ bằng nhau?

(b) Giả sử một lớp học có 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một ban cán sự gồm 6 thành viên nếu ban cán sự phải có nhiều nữ hơn nam?

Bài tập 4. Một *sắp xếp vòng r của n người (circular r-permutation of n people)* là cách xếp r trong số n người quanh một bàn tròn, trong đó hai cách xếp được coi là giống nhau nếu có thể thu được từ nhau bằng phép quay bàn.

(a) Tìm số sắp xếp vòng 3 của 5 người.

(b) Tìm công thức cho số sắp xếp vòng r của n người.

(c) Tìm công thức cho số cách xếp r trong n người quanh một bàn tròn, trong đó hai cách xếp được coi là giống nhau nếu mỗi người có cùng hai người hàng xóm mà không phân biệt họ ngồi bên trái hay bên phải.

Bài tập 5. Hãy đếm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$, với x_i, $i = 1, \ldots, 6$, là số nguyên không âm thỏa mãn:

(a) $x_i > 1$ cho mọi $i = 1, \ldots, 6$;

(b) $x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 3,\ x_4 \geq 4,\ x_5 > 5,\ x_6 \geq 6$;

(c) $x_1 \leq 5$;

(d) $x_1 < 8$ và $x_2 > 8$.

Bài tập 6. Có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$, với x_1, x_2, x_3 là các số nguyên không âm? (**Gợi ý:** Giới thiệu biến phụ x_4 sao cho $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$.)

Bài tập 7. Hiệp hội Máy tính Hoa Kỳ (Association for Computing Machinery - ACM)—một hội chuyên nghiệp lớn cho các nhà khoa học máy tính—thường tổ chức các cuộc thi lập trình cho sinh viên. Các đội sinh viên dành vài giờ để giải một số bài toán lập trình (với các mức độ khó khác nhau).

(a) Giả sử tại một trường đại học ở vùng Trung Tây, có 141 sinh viên chuyên ngành Khoa học Máy tính. Một đội tham gia cuộc thi lập trình gồm 3 sinh viên. Có bao nhiêu cách để chọn một đội?

(b) Giả sử tại một cuộc thi lập trình, các đội được giao 10 bài toán để cố gắng giải. Khi cuộc thi bắt đầu, mỗi thành viên trong số 3 thành viên của đội phải chọn một bài để suy nghĩ trước. (Nhiều thành viên có thể chọn cùng một bài.) Có bao nhiêu cách để 3 thành viên đội lựa chọn bài để suy nghĩ trước?

(c) Ở hầu hết các cuộc thi lập trình, đội được tính điểm bằng số bài họ giải đúng. Một đội có thể nộp nhiều lời giải cho cùng một bài. Giả sử một đội đã tính toán rằng họ có thời gian để lập trình và nộp 20 lần thử khác nhau cho 10 câu hỏi trong cuộc thi. Có bao nhiêu cách khác nhau để họ phân bổ 20 lần nộp này cho 10 bài? (Thứ tự nộp không quan trọng.)

Bài tập 8. Trong *học máy (machine learning)*, ta sử dụng một tập dữ liệu huấn luyện—ví dụ một tập lớn các cặp *hình ảnh, chữ cái* gồm ảnh chữ viết tay và chữ Latinh tương ứng—để tính một mô hình dự đoán có hiệu quả trên tập dữ liệu thử mới. Một nguy cơ là *overfitting*: mô hình có thể bị ảnh hưởng quá mức bởi các đặc thù của dữ liệu huấn luyện. Một cách giảm rủi ro là *cross-validation*: chia dữ liệu huấn luyện thành nhiều tập con, rồi với mỗi tập con S huấn luyện trên $\overline{S}$ và kiểm tra trên S. Ví dụ trong ten-fold cross-validation trên một tập huấn luyện có n phần tử, ta chia n phần tử thành các tập rời $S_1, S_2, \ldots, S_{10}$ sao cho $|S_i| = n/10$. (Giả thiết n luôn chia hết cho 10.)

Hỏi: Có bao nhiêu cách chia một tập có n phần tử thành 10 tập rời $S_1, \ldots, S_{10}$ mỗi tập có kích thước $n/10$? (Lưu ý: thứ tự các tập con không quan trọng, cũng như thứ tự phần tử trong mỗi tập con.)

Bài tập 9. (a) Một nhà xuất bản có 3000 bản sao của một cuốn sách về toán rời rạc. Có bao nhiêu cách phân phối những bản sao này vào ba kho hàng nếu các bản sao là không phân biệt?

(b) Có bao nhiêu cách phân phối 6 quả bóng không phân biệt vào 9 thùng phân biệt?

(c) Có bao nhiêu cách phân phối 12 quả bóng không phân biệt vào 6 thùng phân biệt?

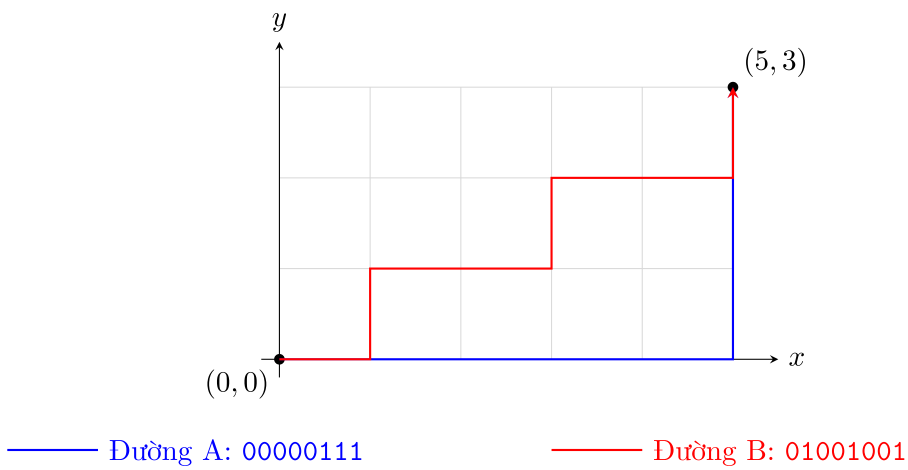
(d) Có bao nhiêu cách phân phối 12 quả bóng phân biệt vào 6 hộp phân biệt sao cho mỗi hộp chứa đúng hai quả bóng?

Bài tập 10. (a) Có thể tạo được bao nhiêu xâu khác nhau từ các chữ cái của từ `MISSISSIPPI`, sử dụng tất cả các chữ cái?

(b) Có thể tạo được bao nhiêu xâu khác nhau từ các chữ cái của từ `ABRACADABRA`, sử dụng tất cả các chữ cái?

(c) Có thể tạo được bao nhiêu xâu khác nhau từ các chữ cái của từ `AARDVARK`, sử dụng tất cả các chữ cái, nếu ba chữ `A` phải đứng liền nhau?

Bài tập 11 ($\star$)**.** Trong bài này, ta đếm số đường đi trên mặt phẳng xy từ gốc tọa độ $(0,0)$ đến điểm (m,n) với $m,n \geq 0$ sao cho mỗi bước là dịch phải một đơn vị hoặc dịch lên một đơn vị (không được phép đi trái hay xuống). Ví dụ sau minh họa hai đường đi từ $(0,0)$ đến $(5,3)$:



(a) Chứng minh rằng mỗi đường đi như mô tả có thể được biểu diễn bằng một xâu bit gồm m chữ số 0 và n chữ số 1, trong đó chữ số 0 biểu diễn một bước sang phải một đơn vị và chữ số 1 biểu diễn một bước lên một đơn vị. Từ đó suy ra số đường đi từ $(0,0)$ đến (m,n) là $\begin{pmatrix} m+n \\ n \end{pmatrix}$.

(b) Sử dụng câu (a) để chứng minh rằng $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$ với mọi số nguyên k thỏa $0 \leq k \leq n$. (**Gợi ý:** Xét số đường đi từ $(0,0)$ đến $(n-k,k)$ và từ $(0,0)$ đến $(k,n-k)$.)

Tài liệu

[1] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 8th edition, McGraw-Hill, 2018.

[2] Liben-Nowell, David, *Connecting Discrete Mathematics and Computer Science*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2022.