VNU-HUS MAT3302: Toán rời rạc	GV: Phan Thị Hà Dương (lý thuyết)
Bài tập tuần 7	
01/12/2025	GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Chú ý

(1) Danh sách bài tập mỗi tuần có ở `https://hoanganhduc.github.io/teaching/VNU-HUS/2025/winter/MAT3302/`.

(2) Tham gia Google Classroom (`https://classroom.google.com/c/ODAwMzkxNzA3OTEy?cjc=y6rexxh5`) để biết cách tính điểm thường xuyên qua việc lên bảng và điểm danh.

(3) Các bài tập đánh dấu sao ($\star$) có thể cần thời gian suy nghĩ lâu hơn.

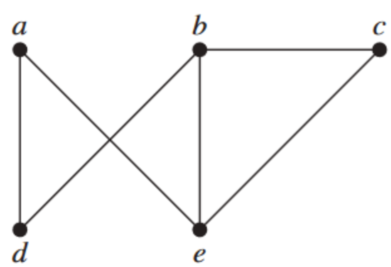
Bài tập 1. Mỗi danh sách các đỉnh sau có tạo thành một đường đi (path) trong đồ thị ở Hình 1 không? Đường đi nào là đường đi đơn (simple path)? Đường đi nào là chu trình (circuit)? Độ dài (length) của các đường đi là bao nhiêu?

(a) a, e, b, c, b

(b) a, e, a, d, b, c, a

(c) e, b, a, d, b, e

(d) c, b, d, a, e, c



Hình 1: Đồ thị cho bài tập 1

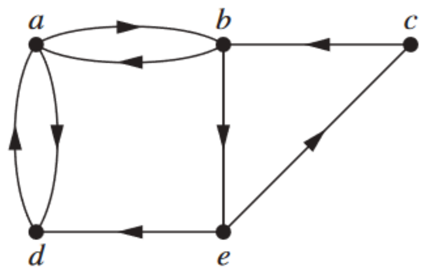
Bài tập 2. Mỗi danh sách các đỉnh sau có tạo thành một đường đi trong đồ thị ở Hình 2 không? Đường đi nào là đường đi đơn? Đường đi nào là chu trình? Độ dài của các đường đi là bao nhiêu?

(a) a, b, e, c, b

(b) a, d, a, d, a

(c) a, d, b, e, a

(d) a, b, e, c, b, d, a



Hình 2: Đồ thị cho bài tập 2

Bài tập 3. Nhắc lại rằng các đồ thị con của một đồ thị có hướng G mà liên thông mạnh (strongly connected) nhưng không nằm trong một đồ thị con liên thông mạnh lớn hơn, tức là *các đồ thị con liên thông mạnh cực đại (maximal strongly connected subgraphs)*, được gọi là *các thành phần liên thông mạnh (strongly connected components)* hoặc *các thành phần mạnh (strong components)* của G.

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Một đỉnh $w \in V$ được gọi là *hướng tới được (reachable)* từ một đỉnh $v \in V$ nếu tồn tại một đường đi có hướng từ v đến w. Các đỉnh v và w được gọi là *lẫn nhau hướng tới được (mutually reachable)* nếu tồn tại cả đường đi có hướng từ v đến w và đường đi có hướng từ w đến v trong G.

(a) Chứng minh rằng nếu $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng và u, v, w là các đỉnh trong V sao cho u và v lẫn nhau hướng tới được và v và w lẫn nhau hướng tới được, thì u và w lẫn nhau hướng tới được.

(b) Chứng minh rằng nếu $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng, thì các thành phần mạnh (strong components) của hai đỉnh u và v của V hoặc giống nhau hoặc rời nhau. (**Gợi ý:** Sử dụng câu (a).)

Bài tập 4. Tìm số lượng đường đi có độ dài n giữa hai đỉnh khác nhau trong K_4 nếu n là:

(a) 2.

(b) 3.

(c) 4.

(d) 5.

Bài tập 5 ($\star$)**.** Chứng minh rằng mọi đồ thị liên thông với n đỉnh ($n \geq 1$) có ít nhất $n - 1$ cạnh.

Bài tập 6 ($\star$)**.** Chứng minh rằng trong mọi đồ thị đơn, tồn tại một đường đi từ mỗi đỉnh có bậc lẻ đến một đỉnh khác có bậc lẻ.

Bài tập 7 ($\star$)**.** Chứng minh rằng một đồ thị đơn có ít nhất hai đỉnh luôn có ít nhất hai đỉnh không là đỉnh cắt (cut vertices).

Bài tập 8. Chứng minh rằng nếu G là một đồ thị liên thông, thì có thể bỏ đi các đỉnh để làm G không còn liên thông khi và chỉ khi G không phải là đồ thị đầy đủ.

Bài tập 9 ($\star$)**.** Chứng minh rằng nếu một đồ thị đơn G có k thành phần liên thông và các thành phần này lần lượt có $n_1, n_2, \ldots, n_k$ đỉnh, thì số cạnh của G không vượt quá

$$\sum_{i=1}^{k} \binom{n_i}{2}.$$

Bài tập 10. Chứng minh rằng mỗi đồ thị sau không có đỉnh cắt.

(a) C_n với $n \geq 3$.

(b) W_n với $n \geq 3$.

(c) $K_{m,n}$ với $m \geq 2$ và $n \geq 2$.

(d) Q_n với $n \geq 2$.

Bài tập 11. Xác định xem các đồ thị trong Hình 3 có một chu trình Euler hay không. Nếu có, hãy xây dựng một chu trình như vậy. Nếu không có chu trình Euler, xác định xem đồ thị có một đường đi Euler hay không và xây dựng một đường đi như vậy nếu nó tồn tại.

Bài tập 12. Xác định xem các đồ thị trong Hình 4 có một chu trình Hamilton hay không. Nếu có, hãy tìm (xây dựng) một chu trình như vậy. Nếu không, hãy nêu lập luận chứng minh vì sao không tồn tại chu trình Hamilton.

Bài tập 13. Với các giá trị m và n nào thì đồ thị hai phần đầy đủ (complete bipartite graph) $K_{m,n}$ có một chu trình Hamilton?

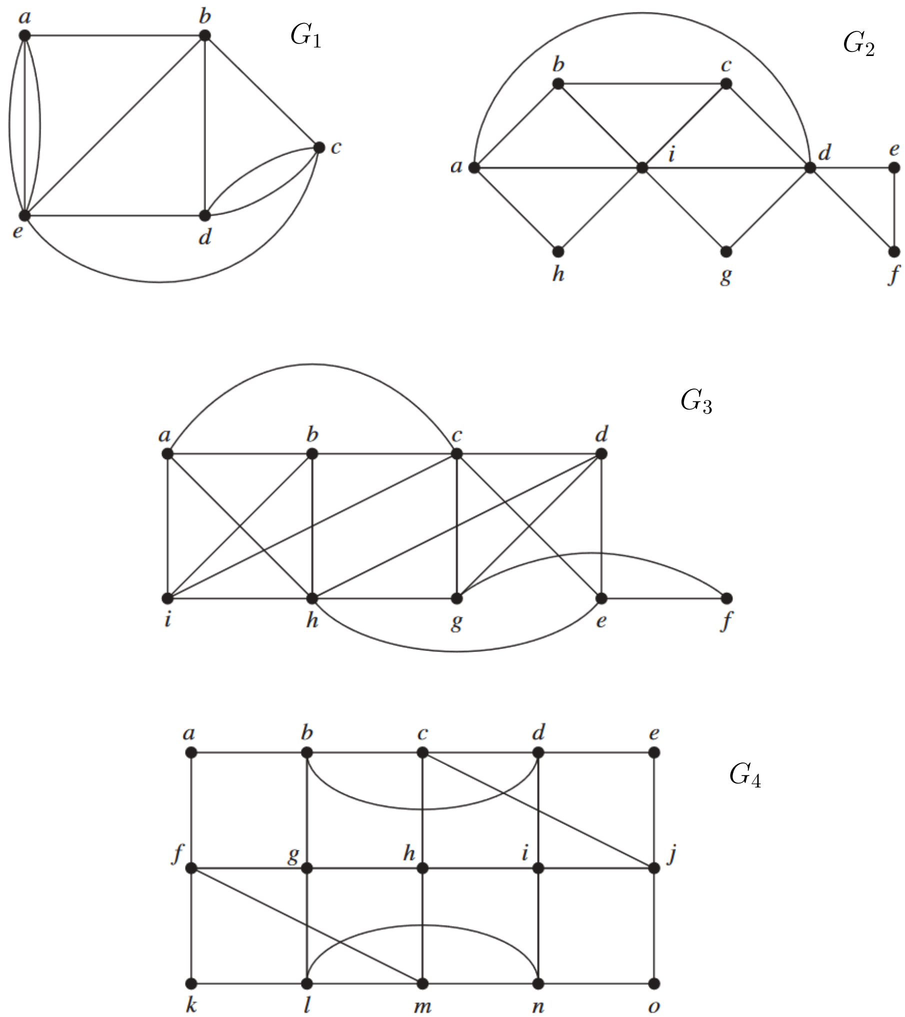
Bài tập 14 ($\star$)**.** Định lý Dirac phát biểu như sau:

Định lý 15 (Định lý Dirac)**.** *Nếu $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng gồm n đỉnh ($n \geq 3$) thỏa mãn điều kiện bậc của mỗi đỉnh trong G lớn hơn hoặc bằng $n/2$ thì G có một chu trình Hamilton*

Chứng minh Định lý Dirac bằng cách hoàn thành các phần sau:

(a) Chứng minh Định lý Dirac đúng với $n = 3$. Do đó, trong các phần còn lại, ta có thể giả sử $n \geq 4$.

(b) Chứng minh G là đồ thị liên thông.

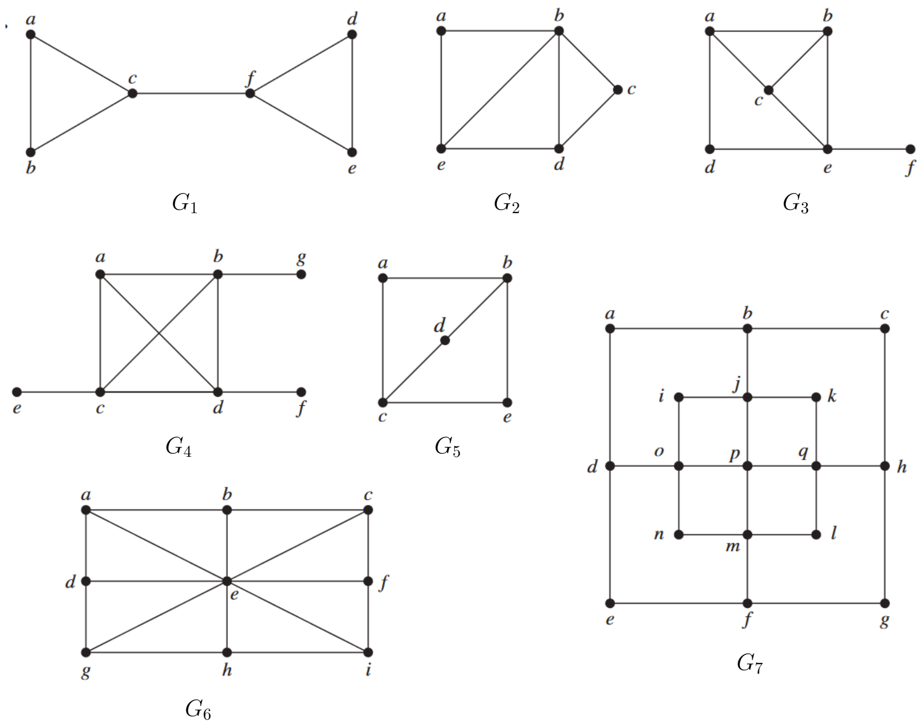


Hình 3: Đồ thị cho bài tập 11

(c) Gọi $P = v_0, v_1, \ldots, v_k$ là đường đi đơn có độ dài lớn nhất trong G ($0 \le k \le n-1$). Chứng minh rằng có một chu trình trong G đi qua mỗi đỉnh của P chính xác một lần.

(d) Chứng minh rằng P chứa tất cả các đỉnh của G, từ đó suy ra G có một chu trình Hamilton.

Bài tập 16. Bạn có thể tìm một đồ thị đơn có n đỉnh với $n \ge 3$ mà không có chu trình Hamilton, nhưng bậc của mọi đỉnh trong đồ thị đều ít nhất $\dfrac{n-1}{2}$ không?



Hình 4: Đồ thị cho bài tập 12

Tài liệu

[1] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 8th edition, McGraw-Hill, 2018.

[2] Liben-Nowell, David, *Connecting Discrete Mathematics and Computer Science*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2022.