VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Danh sách bài tập

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN
hoanganhduc@hus.edu.vn

Ngày 6 tháng 12 năm 2025

Mục lục

1 Lôgic và Chứng minh **3**
Bài tập 1.1 • Bài tập 1.2 • Bài tập 1.3 • Bài tập 1.4 • Bài tập 1.5 • Bài tập 1.6 • Bài tập 1.7 • Bài tập 1.8 • Bài tập 1.9 • Bài tập 1.10 • Bài tập 1.11 • Bài tập 1.12 • Bài tập 1.13 • Bài tập 1.14 • Bài tập 1.15 • Bài tập 1.16 • Bài tập 1.17 • Bài tập 1.18 • Bài tập 1.19 • Bài tập 1.20 • Bài tập 1.21 • Bài tập 1.22 • Bài tập 1.23 • Bài tập 1.24 • Bài tập 1.25 • Bài tập 1.26 • Bài tập 1.27 • Bài tập 1.28 • Bài tập 1.29 • Bài tập 1.30 • Bài tập 1.31 • Bài tập 1.32 • Bài tập 1.33 • Bài tập 1.34 • Bài tập 1.35 • Bài tập 1.36 • Bài tập 1.37

2 Các cấu trúc cơ bản: Tập hợp, hàm, dãy, tổng **10**
Bài tập 2.1 • Bài tập 2.2 • Bài tập 2.3 • Bài tập 2.4 • Bài tập 2.5 • Bài tập 2.6 • Bài tập 2.7 • Bài tập 2.8 • Bài tập 2.9 • Bài tập 2.10 • Bài tập 2.11 • Bài tập 2.12 • Bài tập 2.13 • Bài tập 2.14 • Bài tập 2.15 • Bài tập 2.16 • Bài tập 2.17 • Bài tập 2.18 • Bài tập 2.19 • Bài tập 2.20 • Bài tập 2.21 • Bài tập 2.22 • Bài tập 2.23 • Bài tập 2.24 • Bài tập 2.25 • Bài tập 2.26 • Bài tập 2.27 • Bài tập 2.28 • Bài tập 2.29 • Bài tập 2.30 • Bài tập 2.31 • Bài tập 2.32 • Bài tập 2.33 • Bài tập 2.34 • Bài tập 2.35 • Bài tập 2.36 • Bài tập 2.37 • Bài tập 2.38 • Bài tập 2.39 • Bài tập 2.40 • Bài tập 2.41 • Bài tập 2.42 • Bài tập 2.43 • Bài tập 2.44 • Bài tập 2.45 • Bài tập 2.46 • Bài tập 2.47 • Bài tập 2.48 • Bài tập 2.49 • Bài tập 2.50 • Bài tập 2.51 • Bài tập 2.52 • Bài tập 2.53 • Bài tập 2.54 • Bài tập 2.55 • Bài tập 2.56 • Bài tập 2.57

3 Quy nạp và Đệ quy **19**
Bài tập 3.1 • Bài tập 3.2 • Bài tập 3.3 • Bài tập 3.4 • Bài tập 3.5 • Bài tập 3.6 • Bài tập 3.7 • Bài tập 3.8 • Bài tập 3.9 • Bài tập 3.10 • Bài tập 3.11 • Bài tập 3.12 • Bài tập 3.13 • Bài tập 3.14 • Bài tập 3.15 • Bài tập 3.16 • Bài tập 3.17 • Bài tập 3.18 • Bài tập 3.19 • Bài tập 3.20 • Bài tập 3.21 • Bài tập 3.22 • Bài tập 3.23 • Bài tập 3.24 • Bài tập 3.25 • Bài tập 3.26 • Bài tập 3.27 • Bài tập 3.28 • Bài tập 3.29 • Bài tập 3.30

4 Thuật toán **24**
Bài tập 4.1 • Bài tập 4.2 • Bài tập 4.3 • Bài tập 4.4 • Bài tập 4.5 • Bài tập 4.6 • Bài tập 4.7 • Bài tập 4.8 • Bài tập 4.9 • Bài tập 4.10 • Bài tập 4.11 • Bài tập 4.12 • Bài tập 4.13 • Bài tập 4.14 • Bài tập 4.15 • Bài tập 4.16 • Bài tập 4.17 • Bài tập 4.18 • Bài tập 4.19 • Bài tập 4.20 • Bài tập 4.21

5 Lý thuyết số cơ bản **28**
Bài tập 5.1 • Bài tập 5.2 • Bài tập 5.3 • Bài tập 5.4 • Bài tập 5.5 • Bài tập 5.6 • Bài tập 5.7 • Bài tập 5.8 • Bài tập 5.9 • Bài tập 5.10 • Bài tập 5.11 • Bài tập 5.12 • Bài tập 5.13 • Bài tập 5.14 • Bài tập 5.15 • Bài tập 5.16 • Bài tập 5.17 • Bài tập 5.18 • Bài tập 5.19 • Bài tập 5.20 • Bài tập 5.21 • Bài tập 5.22 • Bài tập 5.23 • Bài tập 5.24 • Bài tập 5.25 • Bài tập 5.26 • Bài tập 5.27 • Bài tập 5.28 • Bài tập 5.29 • Bài tập 5.30 • Bài tập 5.31 • Bài tập 5.32 • Bài tập 5.33 • Bài tập 5.34 • Bài tập 5.35

6 Các bài toán đếm 34
Bài tập 6.1 • *Bài tập 6.2* • *Bài tập 6.3* • *Bài tập 6.4* • *Bài tập 6.5* • *Bài tập 6.6* • *Bài tập 6.7* • *Bài tập 6.8* • *Bài tập 6.9* • *Bài tập 6.10* • *Bài tập 6.11* • *Bài tập 6.12* • *Bài tập 6.13* • *Bài tập 6.14* • *Bài tập 6.15* • *Bài tập 6.16* • *Bài tập 6.17* • *Bài tập 6.18* • *Bài tập 6.19* • *Bài tập 6.20* • *Bài tập 6.21* • *Bài tập 6.22* • *Bài tập 6.23* • *Bài tập 6.24* • *Bài tập 6.25* • *Bài tập 6.26* • *Bài tập 6.27* • *Bài tập 6.28* • *Bài tập 6.29* • *Bài tập 6.30* • *Bài tập 6.31* • *Bài tập 6.32* • *Bài tập 6.33* • *Bài tập 6.34* • *Bài tập 6.35* • *Bài tập 6.36* • *Bài tập 6.37* • *Bài tập 6.38* • *Bài tập 6.39* • *Bài tập 6.40* • *Bài tập 6.41* • *Bài tập 6.42*

7 Lý thuyết đồ thị 41
Bài tập 7.1 • *Bài tập 7.2* • *Bài tập 7.3* • *Bài tập 7.4* • *Bài tập 7.5* • *Bài tập 7.6* • *Bài tập 7.7* • *Bài tập 7.8* • *Bài tập 7.9* • *Bài tập 7.10* • *Bài tập 7.11* • *Bài tập 7.12* • *Bài tập 7.13* • *Bài tập 7.14* • *Bài tập 7.15* • *Bài tập 7.16* • *Bài tập 7.17* • *Bài tập 7.18* • *Bài tập 7.19* • *Bài tập 7.20* • *Bài tập 7.21* • *Bài tập 7.22* • *Bài tập 7.23* • *Bài tập 7.24* • *Bài tập 7.25* • *Bài tập 7.26* • *Bài tập 7.27* • *Bài tập 7.28* • *Bài tập 7.29* • *Bài tập 7.30* • *Bài tập 7.31* • *Bài tập 7.32* • *Bài tập 7.33* • *Bài tập 7.34* • *Bài tập 7.35* • *Bài tập 7.36* • *Bài tập 7.37* • *Bài tập 7.38* • *Bài tập 7.39* • *Bài tập 7.40* • *Bài tập 7.41* • *Bài tập 7.42* • *Bài tập 7.43* • *Bài tập 7.44* • *Bài tập 7.45* • *Bài tập 7.46* • *Bài tập 7.47* • *Bài tập 7.48* • *Bài tập 7.49* • *Bài tập 7.50* • *Bài tập 7.51* • *Bài tập 7.52* • *Bài tập 7.53* • *Bài tập 7.54* • *Bài tập 7.55* • *Bài tập 7.56* • *Bài tập 7.57* • *Bài tập 7.58* • *Bài tập 7.59* • *Bài tập 7.60* • *Bài tập 7.61* • *Bài tập 7.62* • *Bài tập 7.63* • *Bài tập 7.64* • *Bài tập 7.65* • *Bài tập 7.66* • *Bài tập 7.67* • *Bài tập 7.68* • *Bài tập 7.69* • *Bài tập 7.70* • *Bài tập 7.71* • *Bài tập 7.72* • *Bài tập 7.73* • *Bài tập 7.74* • *Bài tập 7.75* • *Bài tập 7.76* • *Bài tập 7.77* • *Bài tập 7.78* • *Bài tập 7.79* • *Bài tập 7.80* • *Bài tập 7.81* • *Bài tập 7.82* • *Bài tập 7.83* • *Bài tập 7.84* • *Bài tập 7.85* • *Bài tập 7.86* • *Bài tập 7.87* • *Bài tập 7.88*

8 Đại số Boole 61
Bài tập 8.1 • *Bài tập 8.2* • *Bài tập 8.3* • *Bài tập 8.4* • *Bài tập 8.5* • *Bài tập 8.6* • *Bài tập 8.7* • *Bài tập 8.8* • *Bài tập 8.9* • *Bài tập 8.10* • *Bài tập 8.11* • *Bài tập 8.12* • *Bài tập 8.13* • *Bài tập 8.14* • *Bài tập 8.15*

Tài liệu tham khảo 63

CHỦ ĐỀ 1

Lôgic và Chứng minh

Bài tập 1.1

Câu nào sau đây là một mệnh đề?

(1) Trái Đất là một hành tinh

(2) $1 + 2$

(3) $1 + 2 = 3$

(4) Hôm nay trời mưa

(5) Bạn có nói tiếng Anh không?

(6) $x + y = 5$

(7) A ha ha ha ha

(8) Hãy đưa cho tôi quyển sách kia

(9) Rất tốt!

(10) Nếu $x = 3, y = 4, z = 5$ thì $x^2 + y^2 = z^2$

Bài tập 1.2

Khẳng định "Phát biểu này là sai" có phải là một mệnh đề lôgic hay không? Vì sao?

Bài tập 1.3

Dùng bảng chân trị để kiểm tra lại các luật trong Bảng 1.1.

Bảng 1.1: Hằng đẳng thức tập hợp.

Tên gọi	**Tương đương lôgic**
Luật đồng nhất (Identity laws)	$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$
Luật nuốt (Domination laws)	$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
Luật lũy đẳng (Idempotent laws)	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$
Luật phủ định kép (Double negation laws)	$\neg(\neg p) \equiv p$
Luật giao hoán (Commutative laws)	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Luật kết hợp (Associative laws)	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Luật phân phối (Distributive laws)	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Luật De Morgan (De Morgan's laws)	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Luật hấp thụ (Absorption laws)	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Luật phủ định (Negation laws)	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$

Bài tập 1.4

Hoàn thành Bảng 1.2.

Bảng 1.2: Minh họa Bài 1.4.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$q \to p$	$\neg q \to \neg p$	$\neg p \to \neg q$
T	T			T			
T	F			F			
F	T			T			
F	F			T			

Bài tập 1.5

Cho các mệnh đề $p :=$ "Tôi mua một vé xổ số Vietlott" và $q :=$ "Tôi trúng giải đặc biệt 200 tỷ VNĐ". Hãy mô tả bằng câu thông thường các mệnh đề phức hợp sau:

(a) $\neg p$

(b) $p \vee q$

(c) $p \to q$

(d) $p \wedge q$

(e) $p \leftrightarrow q$

(f) $\neg p \to \neg q$

(g) $\neg p \wedge \neg q$

(h) $\neg p \vee (p \wedge q)$

Bài tập 1.6

Hãy tính các biểu thức sau.

(a) $\overline{11010}$

(b) $11010 \vee 10001$

(c) $11010 \wedge 10001$

(d) $11010 \oplus 10001$

Bài tập 1.7

Với p, q là các mệnh đề lôgic, hãy chứng minh $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$ là một mâu thuẫn.

Bài tập 1.8

Chứng minh các tương đương lôgic sau bằng bảng chân trị.

(a) $p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

(b) $p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$

Bài tập 1.9

Xây dựng bảng chân trị cho một trong số các mệnh đề phức hợp sau.

(a) $p \to (\neg q \vee r)$

(b) $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg r)$

(c) $\neg p \to (q \to r)$

(d) $(p \to q) \wedge (\neg p \to q)$

Bài tập 1.10

Chứng minh rằng các mệnh đề sau luôn đúng.

(a) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

(b) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

(c) $[p \wedge (p \to q)] \to q$

(d) $[(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)] \to r$

(e) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

(f) $(p \wedge q) \to (p \to q)$

Bài tập 1.11

Tìm dạng hội chuẩn tắc (Conjunctive Normal Form) của các mệnh đề sau bằng cách sử dụng bảng chân trị.

(a) $(\neg p \oplus \neg q) \wedge q$

(b) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$

Bài tập 1.12

Tìm dạng tuyển chuẩn tắc (Disjunctive Normal Form) của các mệnh đề sau bằng cách sử dụng bảng chân trị.

(a) $(\neg p \oplus \neg q) \vee q$

(b) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$

Bài tập 1.13

Đối ngẫu của một mệnh đề phức hợp chỉ chứa các toán tử logic $\wedge$, $\vee$, và $\neg$ là một mệnh đề nhận được bằng cách thay mỗi $\vee$ bằng $\wedge$, mỗi $\wedge$ bằng $\vee$, mỗi $\mathbf{T}$ bằng $\mathbf{F}$, và mỗi $\mathbf{F}$ bằng $\mathbf{T}$. Đối ngẫu của một mệnh đề phức hợp s được ký hiệu là $s^\star$.

(a) Tìm đối ngẫu của các mệnh đề sau

(a-1) $p \wedge \neg q \wedge \neg r$

(a-2) $p \wedge (q \vee (r \wedge \mathbf{T}))$

(b) Khi nào thì $s = s^\star$, với s là một mệnh đề phức hợp nào đó?

(c) Chứng minh rằng $(s^\star)^\star = s$.

Bài tập 1.14

Chứng minh các tương đương lôgic sau bằng cách lập bảng chân trị hoặc sử dụng các tương đương lôgic đã biết.

(a) $p \to q \equiv \neg p \vee q$

(b) $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

(c) $p \vee q \equiv \neg p \to q$

(d) $p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$

(e) $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

(f) $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$

(g) $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$

(h) $(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$

(i) $(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

Bài tập 1.15

Chứng minh các tương đương lôgic sau bằng cách lập bảng chân trị hoặc sử dụng các tương đương lôgic đã biết.

(a) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

(b) $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$

(c) $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

(d) $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Bài tập 1.16

Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 và 0. (Nghĩa là, giá trị của `x` và `y` là 0 hoặc 1.) Mỗi đoạn mã sau đây bao gồm một điều kiện dựa trên `x`, `y`, và các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia). Hãy viết lại các điều kiện này sử dụng ngôn ngữ của lôgic mệnh đề.

(a) `if x * y ...`

(b) `if x + y ...`

(c) `if 2 - x - y ...`

(d) `if x * (1 - y) ...`

(e) `if x * (1 - y) + (1 - x) * y ...`

Bài tập 1.17

Một tập $\mathcal{C}$ các toán tử lôgic được gọi là *đầy đủ (functionally complete)* nếu mỗi mệnh đề phức hợp tương đương với một mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử trong $\mathcal{C}$. Ví dụ, $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee\}$ là một tập (các toán tử lôgic) đầy đủ. Tập các toán tử lôgic $\mathcal{C}$ sau có đầy đủ không? Vì sao?

(a) $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge\}$

(b) $\mathcal{C} = \{\neg, \vee\}$

(c) $\mathcal{C} = \{\wedge, \vee\}$

Bài tập 1.18

Cho p, q, r là các mệnh đề nguyên tử. Hãy sử dụng các mệnh đề trên và các toán tử lôgic $\neg, \wedge, \vee$ để biểu diễn mệnh đề sau

"Ít nhất hai trong ba mệnh đề p, q, r là đúng."

Bài tập 1.19

Cho mệnh đề $(p \to q) \wedge (p \oplus \neg q)$ với p, q là các mệnh đề lôgic.

(a) Lập bảng chân trị cho mệnh đề trên.

(b) Hãy xây dựng một mệnh đề lôgic phức hợp tương đương với mệnh đề đã cho trong đó chỉ sử dụng các toán tử $\neg, \wedge, \vee$.

Bài tập 1.20

Xét các yêu cầu tìm kiếm sau:

Q_A: "python AND algorithm AND NOT computer"
Q_B: "(computer OR algorithm) AND python"
Q_C: "python AND NOT (computer OR algorithm OR program)"

Hãy mô tả hoặc lấy ví dụ (một trang web, một câu nào đó, v.v...) về kết quả trả lại trong các trường hợp sau:

(a) Kết quả trả lại thỏa mãn yêu cầu Q_A.

(b) Kết quả trả lại thỏa mãn yêu cầu Q_A và không thỏa mãn yêu cầu Q_B.

(c) Kết quả trả lại thỏa mãn yêu cầu Q_A và Q_B nhưng không thỏa mãn yêu cầu Q_C.

Bài tập 1.21

Cho $P(x) :=$ "$x > 0''$ là vị từ xác định trên miền $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$. Tìm giá trị chân lý của các mệnh đề sau.

(a) $P(3) \vee P(-1)$

(b) $P(3) \wedge P(-1)$

(c) $P(3) \to P(-1)$

(d) $P(3) \to \neg P(-1)$

Bài tập 1.22

Giả sử miền xác định của tất cả các biến là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Các mệnh đề sau là đúng hay sai?

(a) $\forall x\,(x^2 \neq x)$

(b) $\forall x\,(x^2 \geq x)$

(c) $\forall x\,(x^2 \neq 2)$

Bài tập 1.23

Tìm hiểu một số cách tìm kiếm với Google sử dụng các toán tử lôgic

Bài tập 1.24

Các mệnh đề sau khi nào đúng và khi nào sai?

(1) $\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y)$

(2) $\forall x \exists y\, P(x,y)$

(3) $\exists y \forall x\, P(x,y)$

(4) $\exists x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y \exists x\, P(x,y)$

Bài tập 1.25

Hãy biểu diễn phủ định của các mệnh đề sau sao cho tất cả các ký tự phủ định $\neg$ đứng ngay trước các vị từ

(a) $\forall x \exists y \forall z\, T(x,y,z)$

(b) $\forall x \exists y\, P(x,y) \vee \forall x \exists y\, Q(x,y)$

(c) $\forall x \exists y\,(P(x,y) \wedge \exists z\, R(x,y,z))$

(d) $\forall x \exists y\,(P(x,y) \to Q(x,y))$

Bài tập 1.26

Giả sử biến x nhận giá trị từ miền $\mathcal{D}$. Chứng minh một trong các mệnh đề sau.

(a) $\forall x\,(P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x))) \equiv \forall x\,((P(x) \vee Q(x)) \wedge (P(x) \vee R(x)))$

(b) $\forall x\,(P(x) \wedge (Q(x) \vee R(x))) \equiv \forall x\,((P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge R(x)))$

(c) $\forall x\, \neg(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$

(d) $\forall x\, \neg(P(x) \vee Q(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$

Bài tập 1.27

Giả sử biến x nhận giá trị từ miền $\mathcal{D}$.

(a) Chứng minh $\forall x\,(P(x) \land Q(x)) \equiv (\forall x\, P(x)) \land (\forall x\, Q(x))$

(b) Các mệnh đề $\forall x\,(P(x) \lor Q(x))$ và $(\forall x\, P(x)) \lor (\forall x\, Q(x))$ có tương đương lôgic hay không? Vì sao?

Bài tập 1.28

Giả sử biến x nhận giá trị từ miền $\mathcal{D}$.

(a) Chứng minh $\exists x\,(P(x) \lor Q(x)) \equiv (\exists x\, P(x)) \lor (\exists x\, Q(x))$

(b) Các mệnh đề $\exists x\,(P(x) \land Q(x))$ và $(\exists x\, P(x)) \land (\exists x\, Q(x))$ có tương đương lôgic hay không? Vì sao?

Bài tập 1.29

Cho $x \in \mathbb{Z}$ và $y \in \mathbb{Z}$ và $P(x, y) := x < y$. Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau

(a) $\forall x \forall y\, P(x, y)$

(b) $\forall x \exists y\, P(x, y)$

(c) $\exists x \forall y\, P(x, y)$

(d) $\exists x \exists y\, P(x, y)$

Bài tập 1.30

Giả thuyết Goldbach "Mọi số chẵn lớn hơn hoặc bằng 4 là tổng của hai số nguyên tố" có thể được biểu diễn thông qua các vị từ, lượng từ, và mệnh đề lôgic theo một trong hai cách sau:

$$\forall n \in \mathbb{Z}\, \Big[n > 2 \land 2 \mid n \to \big(\exists p \in \mathbb{Z}\, \exists q \in \mathbb{Z}\, \big[\mathit{isPrime}(p) \land \mathit{isPrime}(q) \land n = p + q\big]\big)\Big] \tag{1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}\, \exists p \in \mathbb{Z}\, \exists q \in \mathbb{Z}\, \Big[n \leq 2 \lor 2 \nmid n \lor \big[\mathit{isPrime}(p) \land \mathit{isPrime}(q) \land n = p + q\big]\Big] \tag{2}$$

trong đó $2 \mid n$ nghĩa là "n chia hết cho 2"; $2 \nmid n$ nghĩa là "n không chia hết cho 2"; và $\mathit{isPrime}(p)$ nghĩa là "p là một số nguyên tố". Hãy chứng minh các mệnh đề (1) và (2) là tương đương lôgic.

Bài tập 1.31

Giả sử A là một mệnh đề thỏa mãn điều kiện A đúng hay sai không phụ thuộc vào x. Giả sử miền xác định của các biến là không rỗng. Hãy chứng minh các tương đương lôgic sau

(a) $(\forall x\, P(x)) \lor A \equiv \forall x\,(P(x) \lor A)$

(b) $(\exists x\, P(x)) \lor A \equiv \exists x\,(P(x) \lor A)$

(c) $(\forall x\, P(x)) \land A \equiv \forall x\,(P(x) \land A)$

(d) $(\exists x\, P(x)) \land A \equiv \exists x\,(P(x) \land A)$

(e) $A \to \forall x\, P(x) \equiv \forall x\,(A \to P(x))$

(f) $\exists x\, P(x) \to A \equiv \forall x\,(P(x) \to A)$

(g) $A \to \exists x\, P(x) \equiv \exists x\,(A \to P(x))$

(h) $\forall x\, P(x) \to A \equiv \exists x\,(P(x) \to A)$

(**Gợi ý:** Xét từng trường hợp $A = \mathsf{T}$ và $A = \mathsf{F}$.)

Bài tập 1.32

Chứng minh bằng phương pháp phản chứng rằng

(a) Tổng của một số vô tỷ và một số hữu tỷ là một số vô tỷ

(b) Với mọi số nguyên n, nếu $n^3 + 5$ lẻ, thì n chẵn

(c) Với mọi số nguyên n, nếu $3n + 2$ chẵn, thì n chẵn

Bài tập 1.33

Chứng minh rằng

(a) Có ít nhất mười ngày trong 64 ngày bất kỳ rơi vào cùng một ngày của một tuần (nghĩa là, có ít nhất mười ngày cùng là Thứ Hai, hoặc cùng là Thứ Ba, v.v...)

(b) Có ít nhất ba ngày trong 25 ngày bất kỳ rơi vào cùng một tháng của năm

Bài tập 1.34

Sử dụng phương pháp phản chứng, hãy chứng minh rằng $\sqrt{2}$ không phải là một số hữu tỷ

Bài tập 1.35

Chứng minh trực tiếp các mệnh đề sau

(a) Tổng của hai số lẻ là một số chẵn

(b) Tổng của hai số chẵn là một số chẵn

(c) Bình phương của một số chẵn là một số chẵn

(d) Tích của hai số lẻ là một số lẻ

Bài tập 1.36

Chứng minh các mệnh đề sau. Nêu rõ phương pháp chứng minh bạn sử dụng

(a) Với mọi số nguyên n, nếu n chẵn thì $(-1)^n = 1$

(b) Với mọi số nguyên m và n, nếu $m \cdot n$ chẵn, thì m chẵn hoặc n chẵn

(c) Với mọi số nguyên dương n, n lẻ khi và chỉ khi $5n + 6$ lẻ

Bài tập 1.37

Chứng minh các mệnh đề sau. Nêu rõ phương pháp chứng minh bạn sử dụng

(a) Với mọi số nguyên x, y, z, nếu $x + y + z$ lẻ, thì ít nhất một trong ba số x, y, z là lẻ

(b) Với mọi số nguyên dương n, n chẵn khi và chỉ khi $7n + 4$ chẵn

(c) Với mọi số nguyên dương m và n, $m^2 = n^2$ khi và chỉ khi $m = n$ hoặc $m = -n$

CHỦ ĐỀ 2

Các cấu trúc cơ bản: Tập hợp, hàm, dãy, tổng

Bài tập 2.1

Cho $A = \{1, 2, 3\}$ và $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hãy liệt kê tất cả các tập hợp

(a) là tập con của A

(b) là tập con thực sự của A

(c) vừa là tập con của A vừa là tập con của B

(d) là tập con của A nhưng không là tập con của B

Bài tập 2.2

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

(a) $1 \in \{1\}$

(b) $1 \subseteq \{1\}$

(c) $\{1\} \in \{\{1\}\}$

(d) $\{1\} \subseteq \{\{1\}\}$

Bài tập 2.3

Chứng minh rằng nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$ thì $A \subseteq C$.

Bài tập 2.4

Cho $A = \{1, 2, 3\}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

(a) $2 \in A$

(b) $2 \subseteq A$

(c) $2 \in \mathcal{P}(A)$

(d) $2 \subseteq \mathcal{P}(A)$

(e) $\{2\} \in \mathcal{P}(A)$

(f) $\{2\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

(g) $\{\{2\}\} \in \mathcal{P}(A)$

(h) $\{\{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

Bài tập 2.5

Chứng minh rằng với mọi tập hợp A, ta có $A \subseteq A$.

Bài tập 2.6

Cho $A = \{1, \{2, 3\}\}$ và $B = \{4, 5, 6\}$. Tìm các tập hợp $A \times A$, $B \times B$, $A \times B$, và $B \times A$

Bài tập 2.7

Tìm các tập A và B, biết rằng $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$, $B - A = \{2, 10\}$, và $A \cap B = \{3, 6, 9\}$

Bài tập 2.8

Cho các tập hợp A, B. Chứng minh

(a) $A \cap B \subseteq A$ và $A \cap B \subseteq B$

(b) $A \subseteq (A \cup B)$

(c) $A - B \subseteq A$

Bài tập 2.9

Xây dựng bảng tính thuộc của

(a) $A \cup (B \cup C)$ và $(A \cup B) \cup C$

(b) $A \cap (B \cup C)$ và $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

(c) $\overline{A \cup B}$ và $\overline{A} \cap \overline{B}$

Bài tập 2.10

Chứng minh các hằng đẳng thức tập hợp trong Bảng 2.1.

Bảng 2.1: Hằng đẳng thức tập hợp.

Tên gọi	**Đẳng thức**
Luật đồng nhất (Identity laws)	$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$
Luật nuốt (Domination laws)	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
Luật lũy đẳng (Idempotent laws)	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Luật bù kép (Double complement laws)	$\overline{\overline{A}} = A$
Luật giao hoán (Commutative laws)	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Luật kết hợp (Associative laws)	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Luật phân phối (Distributive laws)	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Luật De Morgan (De Morgan's laws)	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Luật hấp thụ (Absorption laws)	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Luật bù (Complement laws)	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$

Bài tập 2.11

Với các tập A, B bất kỳ, chứng minh

(a) $A \cap B = A - (A - B)$

(b) $A \cup (B - A) = A \cup B$

(c) $A \cap (B - A) = \emptyset$

(d) $A \Delta A = \emptyset$

(e) $A \Delta \emptyset = A$

(f) $A \Delta B = B \Delta A$

Bài tập 2.12

Có thể nói gì về các tập A, B nếu $A \Delta B = A$?

Bài tập 2.13

Với A là tập con của một tập vũ trụ U, chứng minh rằng

(a) $A \Delta U = \overline{A}$

(b) $A \Delta \overline{A} = U$

Bài tập 2.14

Với hai tập A, B bất kỳ, chứng minh

(a) $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

(b) $A\Delta B = B\Delta A$

(c) $(A\Delta B)\Delta B = A$

Bài tập 2.15

Với các tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 4, 6, 8\}$, và $C = \{5, 7, 9, 10\}$, tìm $A \cap B \cap C$ và $A \cup B \cup C$.

Bài tập 2.16

Với các tập hợp A, B, C bất kỳ, chứng minh

(a) $\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

(b) $\overline{A \cup B \cup C} = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

Bài tập 2.17

Với tập vũ trụ $U = \{1, 2, \ldots, 10\}$ $(u_i = i)$ và các tập con $A_1 = \{2, 3, 5, 7\}$, $A_2 = \{1, 3, 9\}$ của U, hãy so sánh

(1) $\mathcal{B}(A_1 \cup A_2)$ và $\mathcal{B}(A_1) \vee \mathcal{B}(A_2)$

(2) $\mathcal{B}(A_1 \cap A_2)$ và $\mathcal{B}(A_1) \wedge \mathcal{B}(A_2)$

(3) $\mathcal{B}(\overline{A_1})$ và $\neg\mathcal{B}(A_1)$

trong đó $\mathcal{B}(A)$ là biểu diễn nhị phân của tập A.

Bài tập 2.18

Phát biểu sau đúng hay sai?

"Với mọi tập hợp A, nếu tồn tại tập hợp B sao cho $B \subseteq A$, thì $A \neq \emptyset$"

Bài tập 2.19

Với tập A bất kỳ, ta ký hiệu $\mathcal{P}(A)$ là tập hợp tất cả các tập con của A.

(a) Chứng minh rằng nếu $A = B$ thì $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ với hai tập A, B bất kỳ.

(b) Ngược lại, nếu $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ thì A có bằng B không?

Bài tập 2.20

(a) Để chứng minh mệnh đề $p \to q$ là đúng bằng phương pháp phản chứng, trong đó p và q là các mệnh đề nào đó, ta cần giả thiết gì và kết luận gì?

(b) Sử dụng phương pháp phản chứng, hãy chứng minh $A \times B = \emptyset$ khi và chỉ khi $A = \emptyset$ hoặc $B = \emptyset$, trong đó A và B là các tập hợp bất kỳ nào đó.

Bài tập 2.21

Chứng minh rằng $A \times B = B \times A$ khi và chỉ khi $A = \emptyset$ hoặc $B = \emptyset$ hoặc $A = B$

Bài tập 2.22

Tìm các tập hợp A, B thỏa mãn các điều kiện

(a) $A = \{3, |B|\}$

(b) $B = \{1, |A|, |B|\}$

Bài tập 2.23

Với các tập A, B, C, có thể kết luận rằng $A = B$ nếu

(a) $A \cup C = B \cup C$?

(b) $A \cap C = B \cap C$?

(c) $A \cup C = B \cup C$ và $A \cap C = B \cap C$?

Bài tập 2.24

Chứng minh hoặc tìm phản ví dụ cho các đẳng thức sau

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times C) \cup (B \times C)$

(b) $A \times (B \cap C) = (A \times C) \cap (B \times C)$

(c) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$

trong đó A, B, C là các tập bất kỳ

Bài tập 2.25

Với một tập hợp A bất kỳ, gọi $\mathcal{P}(A)$ là tập hợp tất cả các tập con của A.

(a) Với các tập A, B bất kỳ, chứng minh rằng $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

(b) Nếu thay $\cap$ bằng $\cup$ thì phát biểu ở phần (a) còn đúng hay không? Tại sao?

Bài tập 2.26

Liệu có tồn tại các tập hợp A và B thỏa mãn $A \in B$ và $A \subseteq B$?

Bài tập 2.27

(a) Với các tập A, B, C bất kỳ, chứng minh rằng $(A \times B) \cup (C \times B) = (A \cup C) \times B$.

(b) Gọi $A = \{n \mid n \in \mathbb{Z}$ và $n^2 + n$ là một số lẻ$\}$ và $B = \{m \mid m \in \mathbb{Z}$ và $m^2 - 2m = 5\}$. Chứng minh rằng $A \subseteq B$.

Bài tập 2.28

Tập lũy thừa $\mathcal{P}(A)$ của một tập hợp A là tập hợp tất cả các tập con của A. Với các tập hợp A, B, C, chứng minh rằng

(a) Tập hợp rỗng $\emptyset$ không phải là tập lũy thừa của bất kỳ tập hợp nào.

(b) Giả sử $A = B$. Chứng minh rằng với mọi tập C, nếu $C \subseteq A$ thì $C \subseteq B$.

(c) Hai tập $A \times B \times C$ và $(A \times B) \times C$ có bằng nhau không? Tại sao?

(d) $\bigcup_{C \in \mathcal{P}(A)} C = A$, nghĩa là, hợp của tất cả các tập hợp con của A bằng chính nó.

Bài tập 2.29

Tìm hiểu cách chứng minh mệnh đề $\forall A\,(|\mathcal{P}(A)| > |A|)$.

Bài tập 2.30

Trong mỗi trường hợp sau, $\mathcal{R}$ có phải là quan hệ tương đương hay không?

(1) $\mathcal{R} = \{(p,q) \mid p \equiv q\}$ với p, q là các mệnh đề lôgic

(2) $\mathcal{R} = \{(A,B) \mid A \subseteq B\}$ với A, B là các tập hợp

(3) $\mathcal{R} = \{(A,B) \mid A = B\}$ với A, B là các tập hợp

(4) $\mathcal{R} = \{(a,b) \mid b \text{ chia hết cho } a\}$ với a, b là các số nguyên dương

Bài tập 2.31

Cho f_1 *và* f_2 *là các hàm từ* A *đến* $\mathbb{R}$. Ta định nghĩa $f_1 + f_2$ và $f_1 f_2$ là các hàm từ A đến $\mathbb{R}$, gọi là các hàm thực (real-valued function), như sau. Với mọi $x \in A$,

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$

Hãy kiểm tra lại rằng $f_1 + f_2$ và $f_1 f_2$ thực sự là các hàm.

Bài tập 2.32

Gọi F là tập hợp tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với tập xác định và tập giá trị là tập các số thực. Các mệnh đề sau là đúng hay sai? Hãy giải thích đáp án của bạn

(a) $\forall c \in \mathbb{R} \left[\exists f \in F \ (f(0) = c)\right]$

(b) $\exists f \in F \left[\forall c \in \mathbb{R} \ (f(0) = c)\right]$

(c) $\exists f \in F \left[\forall c \in \mathbb{R} \ (f(c) = 0)\right]$

Bài tập 2.33

Cho $g : \{a,b,c\} \to \{a,b,c\}$ với $g(a) = b$, $g(b) = c$, và $g(c) = a$. Cho $f : \{a,b,c\} \to \{1,2,3\}$ với $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, và $f(c) = 1$. Hãy tìm $f \circ g$ và $g \circ f$

Bài tập 2.34

Cho $f : A \to B$ là một song ánh. *Hàm ngược (inverse function)* của f là một hàm gán cho mỗi phần từ $b \in B$ một phần tử duy nhất $a \in A$ sao cho $f(a) = b$. Hàm ngược của f được ký hiệu là $f^{-1} : B \to A$. Chứng minh rằng f^{-1} là một song ánh.

Bài tập 2.35

Hàm ngược của các hàm sau có tồn tại hay không? Tại sao?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$

(d) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x$

Bài tập 2.36

Hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là đơn ánh không?

(a) $f(n) = n - 1$

(b) $f(n) = n^2 + 1$

(c) $f(n) = n^3$

(d) $f(n) = \lceil n/2 \rceil$

Bài tập 2.37

(a) Cho ví dụ về một hàm f là hàm thực sự giảm

(b) Cho ví dụ về một hàm f là hàm giảm nhưng không là thực sự giảm

(c) Chứng minh nếu f là hàm thực sự tăng hoặc thực sự giảm thì f là đơn ánh

Bài tập 2.38

Hàm $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là toàn ánh không?

(a) $f(m, n) = 2m - n$

(b) $f(m, n) = m^2 - n^2$

(c) $f(m, n) = m + n + 1$

(d) $f(m, n) = m^2 - 4$

Bài tập 2.39

Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trong mỗi trường hợp sau đây có phải là song ánh không?

(a) $f(x) = -3x + 4$

(b) $f(x) = -3x^2 + 7$

(c) $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$

(d) $f(x) = x^5 + 1$

(e) $f(x) = 2x + 1$

(f) $f(x) = x^2 + 1$

(g) $f(x) = x^3$

(h) $f(x) = (x^2 + 1)/(x^2) + 2$

Bài tập 2.40

Hãy tìm ví dụ một hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ thỏa mãn

(a) f là đơn ánh nhưng không là toàn ánh

(b) f là toàn ánh nhưng không là đơn ánh

(c) f là song ánh và f khác hàm đồng nhất trên $\mathbb{N}$

(d) f vừa không là đơn ánh vừa không là toàn ánh

Bài tập 2.41

Cho các hàm $g : A \to B$ và $f : B \to C$ trong đó A, B, C là các tập hợp nào đó. Chứng minh một trong các phát biểu sau.

(a) Nếu cả g và f đều là đơn ánh thì $f \circ g$ cũng là đơn ánh.

(b) Nếu cả g và f đều là toàn ánh thì $f \circ g$ cũng là toàn ánh.

(c) Nếu $f \circ g$ là toàn ánh thì f cũng là toàn ánh

(d) Nếu $f \circ g$ là đơn ánh thì g cũng là đơn ánh

(e) Nếu $f \circ g$ là song ánh thì g là toàn ánh khi và chỉ khi f là đơn ánh

Bài tập 2.42

Tìm ví dụ các hàm f và g thỏa mãn $f \circ g$ là song ánh, nhưng g không phải toàn ánh và f không phải đơn ánh.

Bài tập 2.43

Chứng minh các tính chất sau của hàm trần và hàm sàn, trong đó $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{Z}$

(a) $\lfloor x \rfloor = n$ khi và chỉ khi $n \leq x < n+1$

(b) $\lceil x \rceil = n$ khi và chỉ khi $n-1 < x \leq n$

(c) $\lfloor x \rfloor = n$ khi và chỉ khi $x-1 < n \leq x$

(d) $\lceil x \rceil = n$ khi và chỉ khi $x \leq n < x+1$

(e) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x+1$

(f) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

(g) $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$

(h) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

(i) $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$

Bài tập 2.44

Chứng minh rằng nếu $n \in \mathbb{N}$ thì $\lfloor n/2 \rfloor = n/2$ nếu n chẵn và $\lfloor n/2 \rfloor = (n-1)/2$ nếu n lẻ

Bài tập 2.45

Chứng minh rằng nếu $x \in \mathbb{R}$ thì $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor$. (**Gợi ý:** Khi xét các bài toán liên quan đến hàm sàn, một cách tiếp cận hữu ích là đặt $x = n + \epsilon$ trong đó $n = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ và ϵ là một số thực thỏa mãn $0 \leq \epsilon < 1$. Tương tự, với hàm trần, có thể đặt $x = n - \epsilon$.)

Bài tập 2.46

Chứng minh rằng $f : A \to B$ là toàn ánh khi và chỉ khi $f(A) = B$

Bài tập 2.47

Gọi $f : A \to B$ là một hàm với A, B là các tập hữu hạn thỏa mãn $|A| = |B|$. Chứng minh rằng f là đơn ánh khi và chỉ khi nó là toàn ánh.

Bài tập 2.48

Trong mỗi trường hợp sau, tìm các số hạng $a_0, a_1, \ldots, a_5$ của dãy $\{a_n\}$ nếu

(a) $a_n = 2^{n-1}$

(b) $a_n = 1 + (-1)^n$

(c) $a_n = (n+1)^{n+1}$

(d) $a_n = 7$

(e) $a_n = -(-2)^n$

(f) $a_n = \lfloor n/2 \rfloor$

Bài tập 2.49

Với mỗi dãy số nguyên sau, hãy tìm một công thức đơn giản hoặc một cách để tìm các số hạng tiếp theo của dãy. Giả sử công thức bạn tìm ra là đúng, hãy tìm ba số hạng tiếp theo của dãy

(a) $1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$

(b) $1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, \ldots$

(c) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, \ldots$

(d) $3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \ldots$

(e) $15, 8, 1, -6, -13, -20, -27, \ldots$

(f) $3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, \ldots$

(g) $2, 16, 54, 128, 250, 432, 686, \ldots$

(h) $2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321, \ldots$

Bài tập 2.50

Sử dụng ký hiệu tổng để viết lại các công thức sau

(a) $2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n$

(b) $1 + 5 + 9 + 13 + \cdots + 425$

(c) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{50}$

Bài tập 2.51

Viết lại các tổng sau dưới dạng công thức dài hơn

(a) $\sum_{k=1}^{100}(3 + 4k)$

(b) $\sum_{k=2}^{50} \frac{1}{k^2 - 1}$

Bài tập 2.52

Tính các tổng sau

(a) $\sum_{k=100}^{200} k$

(b) $\sum_{k=99}^{200} k^3$

(c) $\sum_{10}^{20} k^2(k - 3)$

Bài tập 2.53

(a) Chứng minh rằng $\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$, trong đó $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là một dãy gồm các số thực

(b) Sử dụng đẳng thức $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ và phần (a) để tính $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

(c) Lấy tổng cả hai vế của đẳng thức $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$ từ $k = 1$ đến $k = n$ và sử dụng phần (a) để tìm một công thức tường minh cho $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1)$ (tổng n số tự nhiên lẻ đầu tiên)

Bài tập 2.54

Tính giá trị của các tích sau

(a) $\prod_{i=0}^{10} i$

(b) $\prod_{i=1}^{100} (-1)^i$

(c) $\prod_{i=5}^{8} i$

(d) $\prod_{i=1}^{10} 2$

Bài tập 2.55

Với $\{a_n\}$ là cấp số cộng có số hạng đầu tiên a và công sai d, tổng của $n+1$ số hạng đầu tiên của dãy là

$$T = \sum_{i=0}^{n}(a + id)$$

Hãy tìm công thức tường minh cho T

Bài tập 2.56

Gauss tính $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} i$ bằng cách nhóm các số hạng như sau:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} i &= 1 + 2 + \cdots + 100 \\ &= (1 + 100) + (2 + 99) + \cdots + (49 + 52) + (50 + 51) \\ &= 50 \cdot 101 = 5050.\end{aligned}$$

(a) Tìm công thức tường minh cho $T = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$ sử dụng phương pháp tương tự.

(b) Cho $\{a_n\}$ là cấp số cộng có số hạng đầu tiên a và công sai d. Có thể áp dụng phương pháp tương tự để tính $T = \sum_{i=0}^{n}(a + id)$ không?

Bài tập 2.57

Tìm công thức tường minh cho các tổng sau:

(a) $s(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 5^k$

(b) $t(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k5^k$

CHỦ ĐỀ 3

Quy nạp và Đệ quy

Bài tập 3.1

Cho $P(n)$ là phát biểu $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(a) Để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ bằng phương pháp quy nạp yếu:

  (1) Ở bước cơ sở, ta cần chứng minh điều gì?

  (2) Ở bước quy nạp, giả thiết quy nạp là gì? Ta cần chứng minh điều gì?

(b) Hãy chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$ bằng phương pháp quy nạp yếu theo các bước bạn đã trả lời ở phần (a).

Bài tập 3.2

Chứng minh các mệnh đề sau bằng phương pháp quy nạp yếu.

(a) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$

(b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$

(c) $3 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + 3 \cdot 5^n = \dfrac{3(5^{n+1} - 1)}{4}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$

Bài tập 3.3

Sử dụng phương pháp quy nạp yếu trong các bài tập sau.

(a) Chứng minh rằng $3^n < n!$ với mọi số nguyên $n > 6$.

(b) Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên b sao cho $2n + 3 \leq 2^n$ với mọi $n \geq b$.

(c) Chứng minh rằng $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 với mọi số nguyên dương n.

Bài tập 3.4

Chứng minh bằng quy nạp yếu rằng với mọi số nguyên $n \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Bài tập 3.5

Chứng minh bằng quy nạp yếu rằng với mọi số nguyên $n \geq 2$, các tập A_1, A_2, $\ldots$, A_n thỏa mãn $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$.

Bài tập 3.6

Với các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$ và B, hãy chứng minh các phát biểu sau đúng với mọi số nguyên $n \geq 2$ bằng quy nạp yếu.

(a) $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \cup B = (A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) \cap \cdots \cap (A_n \cup B)$

(b) $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$

(c) $(A_1 - B) \cap (A_2 - B) \cap \cdots \cap (A_n - B) = (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) - B$

(d) $(A_1 - B) \cup (A_2 - B) \cup \cdots \cup (A_n - B) = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) - B$

Bài tập 3.7

Sử dụng phương pháp quy nạp yếu để chứng minh rằng $\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) = \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n$ với mọi $n \geq 2$, trong đó $p_1, \ldots, p_n$ là các mệnh đề lôgic.

Bài tập 3.8

Cho vị từ $P(n)$:

$$n = 4a + 5b \text{ với } a, b \in \mathbb{Z}$$

Chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 12}\, P(n)$ bằng quy nạp yếu.

Bài tập 3.9

Gọi $P(n)$ là vị từ "tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $n = 3a + 5b$". Bài tập này mô tả cách chứng minh $P(n)$ đúng với mọi số nguyên $n \geq 8$ bằng phương pháp quy nạp mạnh

(a) Để hoàn thành bước cơ sở, hãy chứng minh rằng các mệnh đề $P(8)$, $P(9)$, và $P(10)$ là đúng

(b) Giả thiết quy nạp là gì?

(c) Trong bước quy nạp, bạn cần chứng minh điều gì?

(d) Hãy hoàn thành bước quy nạp cho $n \geq 10$

Bài tập 3.10

Sử dụng phương pháp quy nạp, hãy chứng minh các phát biểu sau.

(a) $10^n - 1$ chia hết cho 9 với mọi số nguyên không âm n.

(b) $8^n - 1$ chia hết cho 7 với mọi số nguyên dương n.

Bài tập 3.11

Chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi số nguyên $n \geq 4$, ta có $2^n \geq n^2$.

Bài tập 3.12

Tìm một số nguyên b thỏa mãn điều kiện với mọi $n \geq b$, $2^n \geq n^3$. Chứng minh bằng quy nạp rằng số b bạn tìm được thực sự thỏa mãn điều kiện đề ra.

Bài tập 3.13

Chứng minh bằng quy nạp rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có thể phủ kín bàn cờ không hoàn chỉnh kích thước $2^n \times 2^n$ với một ô vuông bị loại bỏ bằng các khối hình chữ **L** như trong Hình 3.1 sao cho không có hai khối nào chồng lên nhau.[1]

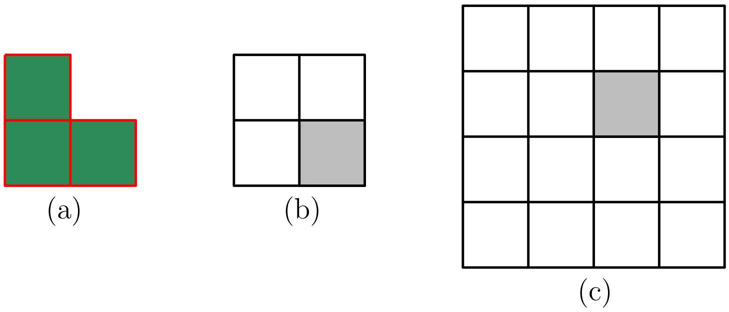
Bài tập 3.14

Chứng minh bằng quy nạp rằng một tập có n phần tử có $n(n-1)/2$ tập con chứa chính xác hai phần tử, với mọi số nguyên $n \geq 2$.

Bài tập 3.15

Chứng minh bằng quy nạp mạnh rằng với mọi số nguyên $n \geq 12$, tồn tại các số nguyên không âm a và b sao cho $n = 3a + 7b$.

[1] Bạn có thể thử phủ kín bàn cờ 8×8 ở https://nstarr.people.amherst.edu/puzzle.html



Hình 3.1: Phủ kín các bàn cờ, ví dụ như (b) hoặc (c), bằng các khối hình chữ **L** như ở (a)

Bài tập 3.16

Chứng minh bằng quy nạp mạnh rằng mọi số nguyên dương đều có thể được viết dưới dạng $2^b \cdot c$ trong đó b là một số nguyên không âm và c là một số lẻ.

Bài tập 3.17

Cho dãy Fibonacci $\{f_n\}$. Chứng minh bằng quy nạp rằng

(a) $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ với mọi số nguyên dương n

(b) $f_1 + f_3 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$ với mọi số nguyên dương n

Bài tập 3.18

Chứng minh bằng quy nạp rằng tập S định nghĩa bởi $1 \in S$ và $s + t \in S$ nếu $s \in S$ và $t \in S$ là tập các số nguyên dương $\mathbb{Z}^+$. (**Gợi ý:** Chứng minh $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ và $\mathbb{Z}^+ \subseteq S$)

Bài tập 3.19

Cho S là tập các cặp sắp thứ tự các số nguyên được định nghĩa bằng đệ quy như sau

- **Bước cơ sở:** $(0, 0) \in S$
- **Bước đệ quy:** Nếu $(a, b) \in S$, thì $(a + 2, b + 3) \in S$ và $(a + 3, b + 2) \in S$

(a) Sử dụng quy nạp mạnh với số lần áp dụng bước đệ quy trong định nghĩa của S ở trên, hãy chứng minh $a + b$ chia hết cho 5 với mọi $(a, b) \in S$

(b) Sử dụng quy nạp theo cấu trúc để chứng minh $a + b$ chia hết cho 5 với mọi $(a, b) \in S$

Bài tập 3.20

Cho S là tập được định nghĩa theo đệ quy như sau:

- $5 \in S$
- Nếu $x \in S$ thì $x + 5 \in S$

Gọi $5\mathbb{Z}^+ = \{n \mid n \in \mathbb{Z}^+$ và n chia hết cho $5\}$. Chứng minh rằng $S = 5\mathbb{Z}^+$.

Bài tập 3.21

Cho S là tập các số nguyên dương được định nghĩa theo đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $1 \in S$.
- **Bước đệ quy:** Nếu $n \in S$ thì $3n + 2 \in S$ và $n^2 \in S$.

(a) Chứng minh rằng với mọi $n \in S$, $n = 4a + 1$ với a là số nguyên không âm nào đó.

(b) Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương m thỏa mãn điều kiện $m \notin S$ và $m = 4a + 1$ với a là số nguyên không âm nào đó.

Bài tập 3.22

Cho S là tập các số nguyên dương được định nghĩa theo đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $5 \in S$.
- **Bước đệ quy:** Nếu $n \in S$ thì $3n \in S$ và $n^2 \in S$.

(a) Chứng minh rằng với mọi $n \in S$, $n = 10a + 5$ với a là số nguyên không âm nào đó.

(b) Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương m thỏa mãn điều kiện $m \notin S$ và $m = 10a + 5$ với a là số nguyên không âm nào đó

Bài tập 3.23

Cho các hàm sau. Hãy xây dựng định nghĩa đệ quy cho mỗi hàm (ghi rõ bước cơ sở và bước đệ quy).

(a) Hàm $F(n)$ là tổng của n số nguyên dương đầu tiên.

(b) Hàm $S_m(n)$ là tổng của số nguyên m và số nguyên không âm n.

(c) Hàm $P_m(n)$ là tích của số nguyên m và số nguyên không âm n.

Bài tập 3.24

Hãy tìm một định nghĩa đệ quy của

(a) Dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 4n - 2$ và $n = 1, 2, \ldots$

(b) Dãy $\{b_n\}$ với $b_n = n(n + 1)$ và $n = 1, 2, \ldots$

(c) Tập hợp các số nguyên dương lẻ

(d) Tập hợp các số nguyên dương là lũy thừa của 3

(e) Tập hợp các số nguyên dương chia hết cho 5

(f) Tập hợp các số nguyên dương không chia hết cho 5

Bài tập 3.25

Giải các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau bằng phương pháp đoán nghiệm và chứng minh công thức bạn đoán được là đúng bằng quy nạp

(a) $a_n = -a_{n-1}$, $a_0 = 5$

(b) $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_0 = 1$

(c) $a_n = a_{n-1} - n$, $a_0 = 4$

(d) $a_n = 5a_{n-1}$, $a_0 = 1$

(e) $a_n = 2a_{n-1} - 3$, $a_0 = -1$

(f) $a_n = (n + 1)a_{n-1}$, $a_0 = 2$

(g) $a_n = 2na_{n-1}$, $a_0 = 3$

(h) $a_n = -a_{n-1} + n - 1$, $a_0 = 7$

Bài tập 3.26

Giả thiết dân số thế giới năm 2023 là 8 tỷ người và tăng theo tỷ lệ 0.8%/năm. Với $n \geq 1$,

(a) Xây dựng hệ thức truy hồi để tính dân số thế giới n năm sau 2023

(b) Tìm công thức tường minh để tính dân số thế giới n năm sau 2023

(c) Dân số thế giới năm 2057 sẽ là bao nhiêu?

Bài tập 3.27

Một người nộp 1 tỷ VNĐ vào một tài khoản tiết kiệm với lãi suất 9%/năm và mỗi năm tiền lãi được chuyển vào tài khoản vào ngày cuối cùng của năm. Giả thiết rằng chỉ có thể rút tiền khi đóng tài khoản. Với $n \geq 1$,

(a) Xây dựng hệ thức truy hồi để tính số tiền trong tài khoản sau n năm

(b) Tìm công thức tường minh để tính số tiền trong tài khoản sau n năm

(c) Sau 10 năm, trong tài khoản có bao nhiêu tiền?

Bài tập 3.28

Giải các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau sử dụng đa thức đặc trưng

(a) $a_n = 2a_{n-1}$ với $n \geq 1$, $a_0 = 3$.

(b) $a_n = 7a_{n-1}$ với $n \geq 1$, $a_0 = 3$.

(c) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 0$, và $a_1 = 5$.

(d) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

(e) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$.

(f) $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ với $n \geq 3$, $a_0 = 5$, $a_1 = -9$, $a_2 = 15$.

(g) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$.

(h) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ $(n \geq 3)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$.

(i) $\sqrt{a_n} = \sqrt{a_{n-1}} + 2\sqrt{a_{n-2}}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = a_1 = 1$.

Bài tập 3.29

Giải các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau sử dụng đa thức đặc trưng

(1) $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$ với $n \geq 1$, $a_0 = 1$

(2) $a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$ với $n \geq 2$, $a_1 = 5$

(3) $a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 42 \cdot 4^n$ $(n \geq 3)$, $a_1 = 56$, $a_2 = 278$

(4) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n + 3n$ (**Gợi ý:** Tìm nghiệm riêng có dạng $qn2^n + p_1n + p_2$, trong đó q, p_1, p_2 là các hằng số)

Bài tập 3.30

Tìm công thức tường minh của tổng $t(n) = \sum_{k=1}^{n} k5^k$ $(n \geq 1)$ bằng cách xây dựng một hệ thức truy hồi với các điều kiện ban đầu cho $t(n)$ và giải hệ thức truy hồi đó.

CHỦ ĐỀ 4

Thuật toán

Bài tập 4.1

Chứng minh

(a) $7x$ là $O(x^3)$

(b) x^3 không là $O(x^2)$

(c) $1 + 2 + \cdots + n$ là $O(n^2)$

(d) $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ là $O(n^n)$

(e) $\log(n!)$ là $O(n \log n)$

(f) n^3 là $O(2^n)$

(g) $\log n$ là $O(n)$

(h) Với các hằng số $b > 1$ và $k > 0$, $\log_b(n^k)$ là $O(\log n)$

Bài tập 4.2

Hãy giải thích một hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là $O(1)$ nghĩa là gì

Bài tập 4.3

Chứng minh rằng

(a) x^3 là $O(x^4)$ nhưng x^4 không là $O(x^3)$

(b) $3x^4 + 1$ là $O(x^4/2)$ và $x^4/2$ là $O(3x^4 + 1)$

(c) $x \log x$ là $O(x^2)$ nhưng x^2 không là $O(x \log x)$

(d) 2^n là $O(3^n)$ nhưng 3^n không là $O(2^n)$

Bài tập 4.4

Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là $O(x)$ thì $f(x)$ cũng là $O(x^2)$

Bài tập 4.5

Chứng minh rằng nếu $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ với $a_0, a_1, \ldots, a_n$ là các số thực (nghĩa là, $f(x)$ là một đa thức bậc n) thì f là $O(x^n)$

Bài tập 4.6

Ước lượng theo O-lớn hàm $f(n) = 3n \log n! + (n^2 + 3) \log n$

Bài tập 4.7

Chứng minh rằng f là $\Omega(g)$ khi và chỉ khi g là $O(f)$

Bài tập 4.8

(a) Chứng minh rằng $1 + 2 + \cdots + n$ là $\Theta(n^2)$

(b) Các tập $O(1)$ và $\Theta(1)$ có bằng nhau không? Tại sao?

Bài tập 4.9

Chứng minh rằng với các hàm f, g từ $\mathbb{R}$ đến $\mathbb{R}$, f là $\Theta(g)$ khi và chỉ khi tồn tại các hằng số dương C_1, C_2, và k sao cho $C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$ với mọi $x > k$

Bài tập 4.10

Sắp xếp các hàm sau trong một danh sách sao cho mỗi hàm là O-lớn của hàm tiếp theo

(a) $\sqrt{n}$, $1000 \log n$, $n \log n$, $2n!$, 2^n, 3^n, và $\dfrac{n^2}{1000000}$

(b) $(1.5)^n$, n^{100}, $(\log n)^3$, $\sqrt{n}\log n$, 10^n, $(n!)^2$, và $n^{99} + n^{98}$

Bài tập 4.11

Giả sử bạn có hai thuật toán khác nhau để giải một bài toán. Để giải một bài toán có kích thước n,

(1) thuật toán thứ nhất sử dụng đúng $n(\log n)$ phép toán và thuật toán thứ hai sử dụng đúng $n^{3/2}$ phép toán;

(2) thuật toán thứ nhất sử dụng đúng $n^2 2^n$ phép toán và thuật toán thứ hai sử dụng đúng $n!$ phép toán.

Khi n tăng, trong mỗi trường hợp trên, thuật toán nào sử dụng ít phép toán hơn?

Bài tập 4.12

Hãy đưa ra ước lượng O-lớn chính xác nhất có thể cho mỗi hàm sau

(a) $(n^2 + 8)(n + 1)$

(b) $(n \log n + n^2)(n^3 + 2)$

(c) $(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2 + 1))$

(d) $(n^3 + n^2 \log n)(\log n + 1) + (17 \log n + 19)(n^3 + 2)$

(e) $(2n + n^2)(n^3 + 3n)$

(f) $(n^n + n2^n + 5^n)(n! + 5n)$

(g) $n \log(n^2 + 1) + n^2 \log n$

(h) $(n \log n + 1)^2 + (\log n + 1)(n^2 + 1)$

(i) $n^{2^n} + n^{n^2}$

Bài tập 4.13

Giải thích ý nghĩa của các ký hiệu sau:

(a) $n^{O(k)}$

(b) $n^2 + O(n)$

(c) $n^2 + O(n) = O(n^2)$

Bài tập 4.14

Sử dụng ký hiệu O-lớn để đánh giá liên hệ giữa các cặp hàm sau. Giải thích kết quả của bạn

(a) n^{124} và 1.24^n

(b) $\sqrt[124]{n}$ và $(\log n)^{124}$

(c) $n \log n$ và $n^{\log n}$

(d) $\sqrt{n}$ và $2^{\sqrt{\log n}}$

(e) $\sqrt{n}$ và $n^{\sin(n)}$

(f) $(n + \log n)^2$ và $n^2 + n \log n$

Bài tập 4.15

Chứng minh rằng

(a) $\sum_{i=0}^{n} i^k$ là $O(n^{k+1})$.

(b) $(3n)!$ là $\Omega(6^n)$.

(c) $\sum_{i=0}^{n} i(i+1)$ là $\Theta(n^3)$.

Bài tập 4.16

Giả sử $T(1) = O(1)$ và $T(n) = T(n-1) + O(1)$ với mọi $n > 1$. Chứng minh sau sai ở đâu? Hãy đánh giá $T(n)$ theo ký hiệu O-lớn và giải thích đánh giá của bạn.

Giả sử $P(n)$ là phát biểu $T(n) = O(1)$. Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \ P(n)$ bằng quy nạp.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì $T(1) = O(1)$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $T(k) = O(1)$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $T(k+1) = O(1)$. Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T(k+1) &= T(k) + O(1) && \text{giả thiết} && (3)\\ &= O(1) + O(1) && \text{giả thiết quy nạp} && (4)\\ &= O(1). && && (5) \end{aligned}$$

  Do đó, $P(k+1)$ đúng.

Vậy theo nguyên lý quy nạp, ta có $P(n)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, tức là $T(n) = O(1)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài tập 4.17

Tìm các ví dụ của các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện (a) – (d) tương ứng trong Bảng 4.1. Cụ thể, ở (a), bạn cần tìm ví dụ về một hàm $f(n)$ đồng thời là $O(n^3)$ và $\Omega(n^3)$ và chứng minh ví dụ bạn tìm ra là đúng. Tương tự cho các phần (b), (c), và (d).

	$f(n)$ là $O(n^3)$	$f(n)$ không là $O(n^3)$
$f(n)$ là $\Omega(n^3)$	(a)	(b)
$f(n)$ không là $\Omega(n^3)$	(c)	(d)

Bảng 4.1: Các trường hợp (a) – (d) trong bài tập. Ví dụ ở (a) cần điền một hàm $f(n)$ đồng thời là $O(n^3)$ và $\Omega(n^3)$.

Bài tập 4.18

Một thuật toán tính x^n với $x \in \mathbb{R}^+$ và $n \in \mathbb{N}$ được mô tả như sau

Thuật toán 4.1: Tính x^n.

Input: x: số thực dương, n: số tự nhiên
Output: Giá trị của x^n

$answer := 1$
$m := n$
while $m > 0$ **do**
    $answer := answer \times x$
    $m := m - 1$
return $answer$

Hãy chứng minh phát biểu L sau là một bất biến vòng lặp cho vòng **while**

$$\text{Ở trước lần lặp với biến } m,\ answer = x^{n-m}$$

Bài tập 4.19

(a) Thiết kế thuật toán để tính tổng của tất cả các số hạng trong một dãy số nguyên $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cho trước

(b) Chứng minh thuật toán bạn thiết kế là đúng

(c) Đánh giá thời gian chạy của thuật toán bạn thiết kế

Bài tập 4.20

Một chuỗi ký tự được gọi là *chuỗi đối xứng (palindrome)* khi viết từ trái qua phải và viết từ phải qua trái thì chuỗi không thay đổi. Một ví dụ là chuỗi `madam`.

(a) Thiết kế thuật toán để kiểm tra xem một chuỗi ký tự có phải là chuỗi đối xứng hay không

(b) Đánh giá thời gian chạy của thuật toán bạn thiết kế

Bài tập 4.21

Cho $f : A \to B$ là một hàm với các tập A, B là các tập con hữu hạn của $\mathbb{Z}$. Hãy thiết kế một thuật toán để kiểm tra xem

(a) liệu f có là đơn ánh không;

(b) liệu f có là toàn ánh không.

Trong mỗi trường hợp, hãy đánh giá thời gian chạy của thuật toán bạn thiết kế

CHỦ ĐỀ 5

Lý thuyết số cơ bản

Bài tập 5.1

Chứng minh các phát biểu sau với $a, b, c \in \mathbb{Z}$ và $a \neq 0$.

(1) Nếu $a \mid b$ và $a \mid c$, thì $a \mid (b + c)$

(2) Nếu $a \mid b$, thì $a \mid bc$

(3) Nếu $a \mid b$ và $b \mid c$, thì $a \mid c$

Bài tập 5.2

Chứng minh rằng quan hệ *đồng dư theo môđun m* "$\equiv \pmod{m}$" là một quan hệ tương đương trên tập các số nguyên.

Bài tập 5.3

Chứng minh hoặc tìm phản ví dụ cho mệnh đề: "Với mọi số nguyên r, t, s, u, nếu r chia hết cho s và t chia hết cho u thì $r + s$ chia hết cho $t + u$".

Bài tập 5.4

Chứng minh rằng nếu $a \equiv b \pmod{m}$ và $c \equiv d \pmod{m}$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $m \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $m \geq 2$, thì $a - c \equiv b - d \pmod{m}$

Bài tập 5.5

Tính các biểu thức sau

(a) $(-133 \bmod 23 + 261 \bmod 23) \bmod 23$

(b) $((457 \bmod 23) \cdot (182 \bmod 23)) \bmod 23$

(c) $(99^2 \bmod 32)^3 \bmod 15$

(d) $(3^4 \bmod 17)^2 \bmod 11$

Bài tập 5.6

(a) $(177130)_{10} = (?)_2$

(b) $(177130)_{10} = (?)_8$

(c) $(177130)_{10} = (?)_{16}$

Bài tập 5.7

(a) $(11111010111100)_2 = (?)_8$

(b) $(11111010111100)_2 = (?)_{16}$

(c) $(765)_8 = (?)_2$

(d) $(A8D)_{16} = (?)_2$

Bài tập 5.8

Tính tổng và tích các số nhị phân sau

(a) $(1000111)_2$ và $(1110111)_2$

- **Kết quả:** Tổng = $(10111110)_2$, Tích = $(10000100000001)_2$

(b) $(11101111)_2$ và $(10111101)_2$

- **Kết quả:** Tổng = $(110101100)_2$, Tích = $(1011000001110011)_2$

Bài tập 5.9

Chứng minh rằng tích của ba số nguyên liên tiếp bất kỳ chia hết cho 6.

Bài tập 5.10

Mô tả thuật toán chuyển một số từ hệ thập phân sang hệ b-phân ($b \in \mathbb{Z}$, $b > 1$) bằng giả mã.

Bài tập 5.11

(a) Mô tả thuật toán tính $b^n \bmod m$ thông qua biểu diễn nhị phân của n.

(b) Sử dụng thuật toán tính $b^n \bmod m$ thông qua biểu diễn nhị phân của n để tính $7^{644} \bmod 645$.

Bài tập 5.12

Sử dụng thuật toán Euclid để tìm

(a) $\gcd(12, 18)$

(b) $\gcd(111, 201)$

(c) $\gcd(1001, 1331)$

Bài tập 5.13

Biểu diễn ước chung lớn nhất của các cặp số sau dưới dạng tổ hợp tuyến tính của chúng

(a) $10, 11$

(b) $21, 44$

(c) $36, 48$

(d) $34, 55$

(e) $117, 213$

(f) $1023, 36$

Bài tập 5.14

(a) Sử dụng Định lý Bézout, hãy chứng minh rằng nếu p là một số nguyên tố và $p \mid ab$ với $a, b \in \mathbb{Z}^+$ thì $p \mid a$ hoặc $p \mid b$.

(b) Phát biểu ở phần (a) có đúng với p là hợp số hay không? Tại sao?

(c) Sử dụng quy nạp, hãy chứng minh phát biểu tổng quát: nếu p là một số nguyên tố và $p \mid a_1 a_2 \dots a_n$, trong đó $a_i \in \mathbb{Z}$ với $1 \le i \le n$, thì $p \mid a_j$ với j nào đó ($1 \le j \le n$)

Bài tập 5.15

Chứng minh rằng với $a, b \in \mathbb{Z}^+$, $ab = \gcd(a, b) \cdot \operatorname{lcm}(a, b)$.

Bài tập 5.16

Chứng minh rằng nếu a, b, m là các số nguyên với $m \geq 2$ và $a \equiv b \pmod m$ thì $\gcd(a, m) = \gcd(b, m)$. (**Gợi ý:** Chứng minh tập các ước chung của a và m bằng với tập các ước chung của b và m.)

Bài tập 5.17

Cho n là số nguyên không âm. Để chứng minh $n^9 - n$ chia hết cho 15, hãy chứng minh các phát biểu sau với mọi số nguyên không âm n.

(a) $n^9 - n$ chia hết cho 3.

(b) $n^9 - n$ chia hết cho 5.

Bài tập 5.18

Cho n là số nguyên không âm. Để chứng minh $n^7 - n$ chia hết cho 21, hãy chứng minh các phát biểu sau với mọi số nguyên không âm n.

(a) $n^7 - n$ chia hết cho 3.

(b) $n^7 - n$ chia hết cho 7.

Bài tập 5.19

Định lý cơ bản của số học được phát biểu như sau:

Định lý 5.1 (Định lý cơ bản của số học)**.** *Mọi số nguyên dương lớn hơn* 1 *có thể được viết một cách duy nhất dưới dạng một số nguyên tố hoặc một tích của các ước nguyên tố của nó theo thứ tự tăng dần.*

Bài tập này mô tả một cách chứng minh Định lý cơ bản của số học nêu trên.

(a) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp: Nếu $n > 1$ là một số nguyên thì n có thể được biểu diễn dưới dạng tích của một hoặc nhiều số nguyên tố.

(b) Để chỉ ra tính "duy nhất", ta chứng minh bằng phản chứng: Giả sử số nguyên dương $n > 1$ có thể được biểu diễn dưới dạng tích các số nguyên tố theo hai cách, ví dụ như $n = p_1p_2 \dots p_s$ và $n = q_1q_2 \dots q_t$, trong đó mỗi p_i $(1 \leq i \leq s)$ và q_j $(1 \leq j \leq t)$ là một số nguyên tố thỏa mãn $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_s$ và $q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_t$. Hãy hoàn thành chứng minh bằng cách chỉ ra một mâu thuẫn.

Bài tập 5.20

(1) Tìm nghịch đảo của a theo môđun m với

- (a) $a = 4, m = 9$
- (b) $a = 19, m = 141$
- (c) $a = 55, m = 89$
- (d) $a = 89, m = 232$

(2) Giải các phương trình đồng dư

- (a) $4x \equiv 5 \pmod 9$
- (b) $19x \equiv 4 \pmod{141}$
- (c) $55x \equiv 34 \pmod{89}$
- (d) $89x \equiv 2 \pmod{232}$

Bài tập 5.21

Những số nguyên nào chia 2 dư 1 và chia 3 cũng dư 1?

Bài tập 5.22

Sử dụng Định lý Fermat nhỏ để tính

(a) $7^{121} \bmod 13$

(b) $23^{1002} \bmod 41$

(c) nghịch đảo của 5^{39} theo môđun 41

Bài tập 5.23

Cho các số nguyên dương $m_1, m_2, \ldots, m_n$ thỏa mãn $m_i \geq 2$ và $\gcd(m_i, m_j) = 1$ với mọi $i \neq j$ và $1 \leq i, j \leq n$. Chứng minh rằng nếu $a \equiv b \pmod{m_i}$ với mọi $1 \leq i \leq n$, thì $a \equiv b \pmod{m}$ với $m = m_1 m_2 \ldots m_n$. (**Gợi ý:** Chứng minh với $n = 2$.)

Bài tập 5.24

Định lý 5.2 (Định lý phần dư Trung Hoa)**.** *Cho các số nguyên dương $m_1, m_2, \ldots, m_n$ thỏa mãn $m_i \geq 2$ và $\gcd(m_i, m_j) = 1$ với mọi $i \neq j$ và $1 \leq i, j \leq n$. Cho các số nguyên bất kỳ $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Hệ phương trình*

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

có nghiệm duy nhất theo môđun $m = m_1 m_2 \ldots m_n$.

(a) Hãy chứng minh một phần của Định lý 5.2 bằng cách chỉ ra cách tìm một nghiệm x của hệ phương trình.

(b) Giải thích cụm từ "có nghiệm duy nhất theo môđun $m = m_1 m_2 \ldots m_n$" trong phát biểu của Định lý 5.2.

Bài tập 5.25

Giải hệ phương trình sau bằng các phương pháp

(a) Sử dụng chứng minh của Định lý phần dư Trung Hoa.

(b) Sử dụng phương pháp thay thế ngược.

$$x \equiv 1 \pmod{5} \tag{6}$$
$$x \equiv 2 \pmod{6} \tag{7}$$
$$x \equiv 3 \pmod{7} \tag{8}$$

Bài tập 5.26

Giải hệ phương trình sau bằng các phương pháp

(a) Sử dụng chứng minh của Định lý phần dư Trung Hoa.

(b) Sử dụng phương pháp thay thế ngược.

$$x \equiv 2 \pmod{3} \tag{9}$$
$$x \equiv 1 \pmod{4} \tag{10}$$
$$x \equiv 3 \pmod{5} \tag{11}$$

Bài tập 5.27

Giải hệ phương trình sau bằng các phương pháp

(a) Sử dụng chứng minh của Định lý phần dư Trung Hoa.

(b) Sử dụng phương pháp thay thế ngược.

$$x \equiv 1 \pmod{2} \tag{12}$$
$$x \equiv 2 \pmod{3} \tag{13}$$
$$x \equiv 3 \pmod{5} \tag{14}$$
$$x \equiv 4 \pmod{11} \tag{15}$$

Bài tập 5.28

(a) Sử dụng Định lý Fermat nhỏ để tính $5^{2003} \bmod 7$, $5^{2003} \bmod 11$, và $5^{2003} \bmod 13$

(b) Sử dụng kết quả từ phần (a) và Định lý phần dư Trung Hoa để tính $5^{2003} \bmod 1001$ (Chú ý rằng $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$)

Bài tập 5.29

(a) Sử dụng Định lý Fermat nhỏ để tính $a_1 = 23^{2023} \bmod 7$, $a_2 = 23^{2023} \bmod 11$, và $a_3 = 23^{2023} \bmod 13$.

(b) Tìm số nguyên x thỏa mãn $0 \leq x < 1001$ và

$$x \equiv a_1 \pmod{7} \tag{16}$$
$$x \equiv a_2 \pmod{11} \tag{17}$$
$$x \equiv a_3 \pmod{13} \tag{18}$$

trong đó a_1, a_2, a_3 là các số được tính ở phần (a). Sử dụng kết quả trên và Định lý phần dư Trung Hoa để tính $23^{2023} \bmod 1001$. (Chú ý rằng $1001 = 7 \times 11 \times 13$.)

Bài tập 5.30

(a) Sử dụng Định lý Fermat nhỏ để tính $a_1 = 23^{2023} \bmod 3$, $a_2 = 23^{2023} \bmod 7$, và $a_3 = 23^{2023} \bmod 11$.

(b) Tìm số nguyên x thỏa mãn $0 \leq x < 231$ và

$$x \equiv a_1 \pmod{3} \tag{19}$$
$$x \equiv a_2 \pmod{7} \tag{20}$$
$$x \equiv a_3 \pmod{11} \tag{21}$$

trong đó a_1, a_2, a_3 là các số được tính ở phần (a). Sử dụng kết quả trên và Định lý phần dư Trung Hoa để tính $23^{2023} \bmod 231$. (Chú ý rằng $231 = 3 \times 7 \times 11$.)

Bài tập 5.31

Sử dụng sự trợ giúp từ Định lý Fermat nhỏ, hãy chứng minh rằng 42 là ước của $n^7 - n$, với $n \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 5.32

Giải hệ phương trình

$$x \equiv 2 \pmod{3} \tag{22}$$
$$x \equiv 1 \pmod{4} \tag{23}$$
$$x \equiv 3 \pmod{5} \tag{24}$$

Bài tập 5.33

Chứng minh rằng nếu $\gcd(a, m) > 1$ với $a \in \mathbb{Z}$ bất kỳ và $m > 2$ thì không tồn tại một nghịch đảo của a theo môđun m.

Bài tập 5.34

Giải hệ phương trình

$$x \equiv 5 \pmod{6} \tag{25}$$
$$x \equiv 3 \pmod{10} \tag{26}$$
$$x \equiv 8 \pmod{15} \tag{27}$$

Chú ý: 6, 10, và 15 *không* đôi một nguyên tố cùng nhau

Bài tập 5.35

Định lý 5.3 (Định lý Fermat nhỏ)**.** *Nếu p là một số nguyên tố và a là một số nguyên không chia hết cho p, thì $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Thêm vào đó, với mọi số nguyên a, ta có $a^p \equiv a \pmod{p}$*

Sử dụng các gợi ý sau, hãy chứng minh Định lý 5.3.

Nhắc lại: Với các số nguyên a, b, c và số nguyên dương m, nếu $ac \equiv bc \pmod{m}$ và $\gcd(c, m) = 1$ thì $a \equiv b \pmod{m}$.

(a) Giả sử a không chia hết cho p. Chứng minh rằng không có hai số nguyên nào trong số các số $1 \cdot a, 2 \cdot a, \ldots, (p-1) \cdot a$ là đồng dư theo môđun p

(b) Từ phần (a), kết luận rằng tích các số $1, 2, \ldots, p-1$ đồng dư với tích các số $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ theo môđun p. Sử dụng điều này để chứng minh rằng $(p-1)! \equiv a^{p-1}(p-1)! \pmod{p}$

(c) Chỉ ra từ phần (b) rằng $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ nếu a không chia hết cho p. (**Gợi ý:** Xem lại phần chứng minh Định lý cơ bản của số học. Chứng minh $p \nmid (p-1)!$ và áp dụng mệnh đề trên)

CHỦ ĐỀ 6

Các bài toán đếm

Bài tập 6.1

Có bao nhiêu hàm $f : A \to B$ với A và B lần lượt là các tập hữu hạn gồm m và n phần tử?

Bài tập 6.2

Địa chỉ kiểm soát truy cập phương tiện truyền thông (MAC (media access control) address), hay còn gọi là *địa chỉ MAC*, là một định danh duy nhất được gán cho một card mạng (network adapter), ví dụ như card mạng có dây (ethernet card) hoặc card mạng không dây (wireless card). Địa chỉ này gồm một dãy sáu cặp các chữ số thập lục phân (nghĩa là các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F). Ví dụ, F7:DE:A1:B6:C4:33 là một địa chỉ MAC. (Các cặp số thường được phân tách bởi dấu hai chấm.) Có tất cả bao nhiêu địa chỉ MAC?

Bài tập 6.3

Theo quy định của Bộ Thông Tin & Truyền Thông Việt Nam, tất cả các số thuê bao điện thoại di động cần có 10 chữ số, trong đó ba chữ số đầu tiên đại biểu cho nhà mạng cung cấp dịch vụ. Ví dụ, nhà mạng Viettel hiện tại sở hữu 12 đầu số di động: 086, 096 – 098, và 032 – 039. Viettel có thể cung cấp tối đa bao nhiêu số điện thoại di động?

Bài tập 6.4

Giả sử một mật khẩu cho một hệ thống máy tính phải có ít nhất 8, nhưng không quá 12 ký tự, trong đó mỗi ký tự trong mật khẩu là một chữ cái tiếng Anh viết thường, một chữ cái tiếng Anh viết hoa, một chữ số, hoặc một trong sáu ký tự đặc biệt $*$, $>$, $<$, !, $+$, và $=$.

(a) Có bao nhiêu mật khẩu khác nhau có sẵn cho hệ thống máy tính này?

(b) Có bao nhiêu mật khẩu trong số này chứa ít nhất một lần xuất hiện của ít nhất một trong sáu ký tự đặc biệt?

(c) Sử dụng câu trả lời của bạn cho phần (a), hãy xác định xem một hacker sẽ mất bao lâu để thử tất cả các mật khẩu có thể, giả sử rằng hacker mất một nano giây (nanosecond) để kiểm tra mỗi mật khẩu có thể. (Một nano giây là một phần tỷ giây, hoặc 10^{-9} giây)

Bài tập 6.5

Tên của một biến trong ngôn ngữ lập trình C là một chuỗi có thể chứa các chữ cái viết hoa, chữ cái viết thường, chữ số, hoặc dấu gạch dưới. Hơn nữa, ký tự đầu tiên trong chuỗi phải là một chữ cái, viết hoa hoặc viết thường, hoặc dấu gạch dưới. Nếu tên của một biến được xác định bởi tám ký tự đầu tiên, có bao nhiêu biến khác nhau có thể được đặt tên trong C? (Lưu ý rằng tên của một biến có thể chứa ít hơn tám ký tự.)

Bài tập 6.6

Tên của một biến trong ngôn ngữ lập trình JAVA là một chuỗi có độ dài từ 1 đến 65535 ký tự (bao gồm cả hai giá trị), trong đó mỗi ký tự có thể là một chữ cái viết hoa, một chữ cái viết thường, dấu đô la ($), dấu gạch dưới, hoặc một chữ số, ngoại trừ ký tự đầu tiên không được là một chữ số. Xác định số lượng tên biến khác nhau trong JAVA

Bài tập 6.7

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 7 bắt đầu với 00 hoặc kết thúc với 111?

Bài tập 6.8

Một chuỗi đối xứng là một chuỗi ký tự mà khi viết ngược lại từ phải sang trái thì chuỗi không thay đổi. Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài n là chuỗi đối xứng?

Bài tập 6.9

Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 1000 thỏa mãn

(a) là bội của 7

(b) là bội của cả 7 và 11

(c) là bội của 7 nhưng không là bội của 11

(d) là bội của 7 hoặc là bội của 11

(e) không là bội của 7 và không là bội của 11

Bài tập 6.10

(a) Có bao nhiêu số có 8 chữ số?

(b) Có bao nhiêu số có 8 chữ số chia hết 25?

(c) Có bao nhiêu số có 8 chữ số không chia hết cho 25?

(d) Có bao nhiêu số có 8 chữ số có ba chữ số đầu là 222 hoặc hai chữ số cuối là 11?

(e) Có bao nhiêu số có 8 chữ số có chứa 222222 (chuỗi 6 chữ số 2 liên tiếp)?

(f) Có bao nhiêu số có 8 chữ số có ít nhất hai chữ số giống nhau?

Bài tập 6.11

(a) Có bao nhiêu số có 8 chữ số?

(b) Có bao nhiêu số có 8 chữ số chia hết 5?

(c) Có bao nhiêu số có 8 chữ số không chia hết cho 5?

(d) Có bao nhiêu số có 8 chữ số có ba chữ số đầu là 111 hoặc hai chữ số cuối là 00?

(e) Có bao nhiêu số có 8 chữ số có chứa 111111 (chuỗi 6 chữ số 1 liên tiếp)?

(f) Có bao nhiêu số có 8 chữ số có ít nhất hai chữ số giống nhau?

Bài tập 6.12

Có bao nhiêu số nguyên dương chẵn nhỏ hơn hoặc bằng 1000 thỏa mãn

(a) là bội của 7?

(b) là bội của cả 7 và 11?

(c) là bội của 7 nhưng không là bội của 11?

(d) là bội của 7 hoặc là bội của 11?

(e) không là bội của 7 và không là bội của 11?

Bài tập 6.13

Cho tập $\Sigma = \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ và số nguyên $n \geq 1$. Gọi Σ^n là tích Đềcác của n tập Σ. Một *toán tử lôgic n-ngôi* là một hàm $f : \Sigma^n \to \Sigma$. Ví dụ, toán tử $\neg$ là một toán tử 1-ngôi. Cụ thể, hàm $\neg : \Sigma \to \Sigma$ định nghĩa bởi $\neg(\mathsf{T}) = \mathsf{F}$ và $\neg(\mathsf{F}) = \mathsf{T}$. (Chú ý là $\Sigma^1 = \Sigma$.) Tương tự, các toán tử $\wedge, \vee, \oplus, \to, \leftrightarrow$ là các toán tử 2-ngôi.

Có bao nhiêu toán tử lôgic n-ngôi khác nhau?

Bài tập 6.14

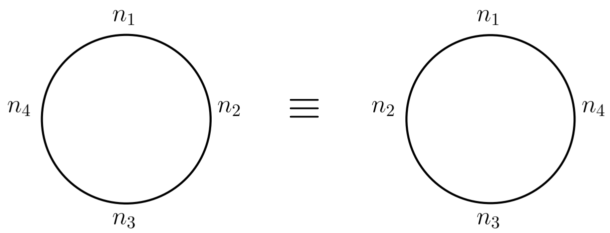
Có tất cả bao nhiêu số nguyên không vượt quá 1000 là bình phương hoặc lập phương của một số nguyên dương?

Bài tập 6.15

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài 8 có chứa 000 hoặc 1111? (**Đáp án:** 147)

Bài tập 6.16

Giả sử hai cách sắp xếp 4 người quanh một bàn tròn là giống nhau khi mỗi người có hai người ngồi cạnh giống nhau trong cả hai cách sắp xếp không quan tâm là ngồi bên trái hay bên phải, ví dụ như hai cách sắp xếp trong Hình 6.1 là giống nhau với giả thiết hiện tại. Trong trường hợp này, có bao nhiêu cách



Hình 6.1: Minh họa Bài 6.16.

khác nhau để sắp xếp 4 người quanh một bàn tròn?

Bài tập 6.17

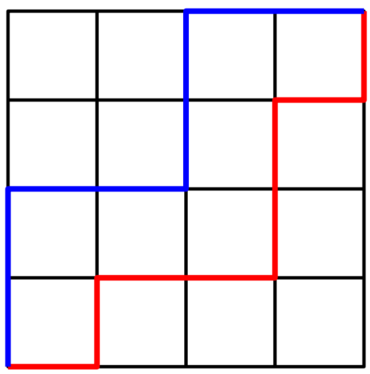
Giả thiết rằng hai cách sắp xếp là giống nhau nếu mỗi người có người ngồi bên trái và người ngồi bên phải giống nhau trong mỗi cách sắp xếp.

(a) Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ ngồi quanh một bàn tròn?

(b) Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ ngồi quanh một bàn tròn sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?

Bài tập 6.18

Có bao nhiêu cách đi từ góc dưới cùng bên trái đến góc trên cùng bên phải của một lưới kích thước $n \times n$? Giả sử rằng trong mỗi bước từ một đỉnh sang đỉnh khác của lưới, bạn chỉ có thể đi sang phải một bước hoặc đi lên trên một bước. (Ví dụ, xem Hình 6.2.)



Hình 6.2: Một lưới 4×4 và ví dụ một số đường đi

Bài tập 6.19

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân độ dài n không có hai số 1 liên tiếp? (**Gợi ý:** Gọi a_n là số chuỗi nhị phân độ dài n không có hai số 1 liên tiếp. Tìm và giải hệ thức truy hồi cho a_n)

Bài tập 6.20

Chứng minh rằng trong một nhóm n số nguyên bất kỳ, có hai số nguyên có cùng số dư khi chia cho $n - 1$

Bài tập 6.21

Giả sử một ngăn tủ chỉ có hai loại tất màu đen và trắng, mỗi loại có 12 chiếc. Một người lấy tất trong ngăn tủ một cách ngẫu nhiên trong bóng tối

(a) Cần lấy ít nhất bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn có hai chiếc cùng màu? bốn chiếc cùng màu?

(b) Cần lấy ít nhất bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn có hai chiếc màu đen?

(c) Nếu có thêm 12 chiếc tất màu nâu nữa trong ngăn tủ thì cần lấy ít nhất bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn có hai chiếc cùng màu?

Bài tập 6.22

Có sáu giáo sư dạy toán rời rạc cơ bản tại một trường đại học. Tất cả sáu giáo sư đều sử dụng cùng một đề thi cuối kỳ. Nếu điểm thấp nhất có thể đạt được trong kỳ thi cuối kỳ là 0 và điểm cao nhất có thể là 100 và các điểm số đều là số nguyên, thì cần có ít nhất bao nhiêu sinh viên để đảm bảo rằng có hai sinh viên học cùng một giáo sư đạt được cùng một điểm thi cuối kỳ?

Bài tập 6.23

(a) Chứng minh rằng nếu 7 số nguyên được chọn từ tập $\{1, 2, \ldots, 10\}$ thì có ít nhất hai cặp trong số các số được chọn có tổng bằng 11. Nếu ta chọn 6 số nguyên thay vì 7 thì kết luận trên còn đúng không?

(b) Cần chọn ra ít nhất bao nhiêu số từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ để chắc chắn rằng trong tập các số đã chọn có hai số có tổng bằng 7?

Bài tập 6.24

Chứng minh rằng trong một nhóm 6 người bất kỳ, luôn có ít nhất ba người đôi một biết nhau hoặc đôi một không biết nhau

Bài tập 6.25

Chứng minh rằng với bất kỳ cách xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ ngồi quanh một bàn tròn, luôn tìm được một bạn (có thể là nam hoặc nữ) ngồi giữa hai bạn nam (**Gợi ý:** Chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử có cách xếp thỏa mãn điều kiện không có bạn nào ngồi giữa hai bạn nam. Nếu chia nhóm các bạn nam thì mỗi nhóm có tối đa bao nhiêu thành viên? Giữa các nhóm này cần sắp xếp tối thiểu bao nhiêu bạn nữ để không có bạn nào ngồi giữa hai bạn nam?)

Bài tập 6.26

Chứng minh rằng trong một nhóm n người ($n \geq 2$) có ít nhất hai người có cùng số người quen biết trong nhóm

Bài tập 6.27

Alice và Bob chơi trò chơi sau: Bob chọn 10 số nguyên bất kỳ trong khoảng từ 1 đến 40. Alice cần tìm hai tập số nguyên khác nhau trong các số mà Bob chọn, mỗi tập có 3 phần tử, sao cho tổng các số nguyên trong hai tập là bằng nhau. Hãy chứng minh rằng Alice luôn luôn thắng. (**Gợi ý:** Áp dụng nguyên lý chuồng bồ câu)

Bài tập 6.28

Chứng minh phát biểu sau bằng các công thức đã biết.

Với các số nguyên n, r thỏa mãn $0 \leq r \leq n$, ta có

$$C_n^r = C_n^{n-r}$$

Bài tập 6.29

Cho các số nguyên n, k thỏa mãn $n > k \geq 1$.

(a) Bằng các công thức đã biết, hãy chứng minh

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

(b) Sử dụng kết quả ở phần (a), chứng minh

$$C_n^k - C_{n-2}^{k-2} = 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^k$$

Bài tập 6.30

Tìm hệ số

(a) của x^7 trong khai triển của $(1+x)^{11}$

(b) của x^9 trong khai triển của $(2-x)^{19}$

(c) của x^k trong khai triển của $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{100}$, trong đó k là một số nguyên

Bài tập 6.31

Theo nguyên lý bù trừ tổng quát, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| =$?

Bài tập 6.32

Với mọi $n \geq 0$, tổng các phần tử ở hàng n của tam giác Pascal là

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$$

Hãy chứng minh phát biểu trên

(a) bằng phương pháp quy nạp (**Gợi ý:** $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$);

(b) bằng cách sử dụng Định lý nhị thức.

Bài tập 6.33

Chứng minh rằng với mọi $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k = 3^n$

(a) bằng cách áp dụng Định lý nhị thức;

(b) ($\star$) bằng phương pháp đếm hai lần (**Gợi ý:** Có bao nhiêu cách xây dựng một chuỗi n ký tự chỉ sử dụng các ký tự A, B, C thỏa mãn điều kiện có chính xác $n-k$ ký tự A?)

Bài tập 6.34

(a) Chứng minh rằng với mọi $n > 0$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$

(b) Chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng với mọi $m > 0$, $\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} C_m^k = 1$. (**Gợi ý:** $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$)

Bài tập 6.35

Đếm số nghiệm nguyên của $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 2$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ một cách trực tiếp bằng cách xét từng trường hợp $x_1 = 0$, $x_1 = 1$, và $x_1 = 2$.

Bài tập 6.36

Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn điều kiện $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ và

(a) $x_1 \geq 8$, $x_2 \geq 5$, và $x_3 \geq 2$.

(b) $x_1 \geq 10$ và $x_3 \leq 7$.

(c) $x_1 \leq 6$ và $x_2 \leq 12$.

Bài tập 6.37

Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn điều kiện $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ và

(a) $x_1 \geq 8$, $x_2 \geq 5$, và $x_3 \geq 2$.

(b) $x_1 \geq 10$ và $x_3 \leq 7$.

(c) $x_1 \leq 6$ và $x_2 \leq 12$.

Bài tập 6.38

Có 345 sinh viên tại một trường đại học đã học khóa giải tích, 212 sinh viên đã học khóa toán rời rạc, và 188 sinh viên đã học cả hai khóa giải tích và toán rời rạc. Hỏi có bao nhiêu sinh viên đã học ít nhất một trong hai khóa giải tích hoặc toán rời rạc?

Bài tập 6.39

Một khảo sát các hộ gia đình ở Hoa Kỳ cho thấy 96% có ít nhất một chiếc tivi, 98% có dịch vụ điện thoại, và 95% có cả dịch vụ điện thoại và ít nhất một chiếc tivi. Có bao nhiêu phần trăm hộ gia đình ở Hoa Kỳ không có cả dịch vụ điện thoại lẫn tivi?

Bài tập 6.40

Một báo cáo tiếp thị về máy tính cá nhân cho biết 650 000 chủ sở hữu sẽ mua một máy in cho máy của họ trong năm tới và 1 250 000 sẽ mua ít nhất một gói phần mềm. Nếu báo cáo cho biết 1 450 000 chủ sở hữu sẽ mua máy in hoặc ít nhất một gói phần mềm, hỏi có bao nhiêu người sẽ mua cả máy in và ít nhất một gói phần mềm?

Bài tập 6.41

(a) Tìm số các số nguyên dương không vượt quá 100 mà không chia hết cho 5 và cũng không chia hết cho 7.

(b) Tìm số các số nguyên dương không vượt quá 1000 mà không chia hết cho 3, 17 hoặc 35.

(c) Tìm số các số nguyên dương không vượt quá 10 000 mà không chia hết cho 3, 4, 7 hoặc 11.

Bài tập 6.42

Chứng minh *đẳng thức Vandermonde (Vandermonde's Identity)* sau

$$C_{m+n}^{r} = \sum_{k=0}^{r} C_{m}^{r-k} C_{n}^{k},$$

trong đó m, n, r là các số nguyên không âm và $r \leq \min(m, n)$. (**Gợi ý:** Có bao nhiêu cách chọn ra một ban đại diện gồm r thành viên từ một lớp học có m nam và n nữ?)

CHỦ ĐỀ 7

Lý thuyết đồ thị

Bài tập 7.1

Cho G là một đồ thị vô hướng có n đỉnh và m cạnh. Gọi $\Delta(G)$ và $\delta(G)$ lần lượt là bậc lớn nhất và nhỏ nhất của một đỉnh của G. Chứng minh rằng $\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$.

Bài tập 7.2

Vẽ các đồ thị sau

(a) K_7

(b) C_7

(c) W_7

(d) Q_4

Bài tập 7.3

Một đồ thị được gọi là *đồ thị chính quy (regular graph)* nếu các đỉnh của đồ thị có cùng bậc. Ta gọi một đồ thị là d-chính quy nếu nó là đồ thị chính quy trong đó các đỉnh có cùng bậc d. Với các giá trị nào của n thì các đồ thị sau là đồ thị chính quy?

(a) K_n

(b) C_n

(c) W_n

(d) Q_n

Bài tập 7.4

Các đồ thị sau có bao nhiêu đỉnh và bao nhiêu cạnh?

(a) K_n

(b) C_n

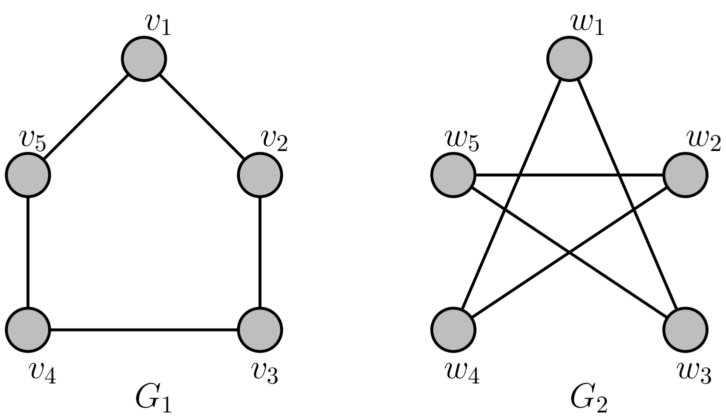
(c) W_n

(d) $K_{m,n}$

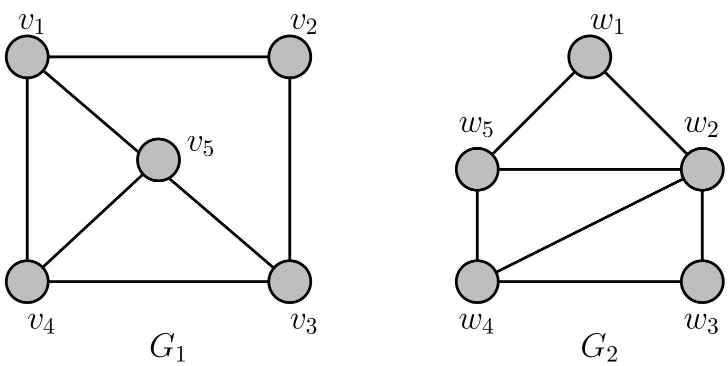
(e) Q_n

Bài tập 7.5

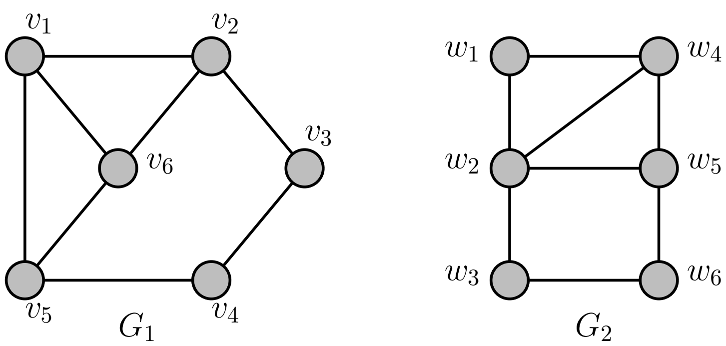
Các cặp đồ thị ở Hình 7.1, 7.2, 7.3 có đẳng cấu hay không? Vì sao?



Hình 7.1: Minh họa Bài 7.5.



Hình 7.2: Minh họa Bài 7.5.



Hình 7.3: Minh họa Bài 7.5.

Bài tập 7.6

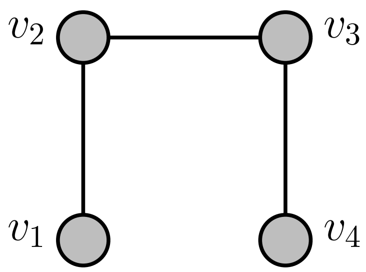
Đồ thị bù (complement graph) của một đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, ký hiệu $\overline{G}$, là đồ thị có tập đỉnh $\overline{V} = V$ và tập cạnh $\overline{E} = [V]^2 \setminus E = \{uv \mid u, v \in V \text{ và } uv \notin E\}$.

Giả sử G và H là các đơn đồ thị thỏa mãn $G \simeq H$. Chứng minh rằng $\overline{G} \simeq \overline{H}$.

Bài tập 7.7

Đồ thị bù (complement graph) của một đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, ký hiệu $\overline{G}$, là đồ thị có tập đỉnh $\overline{V} = V$ và tập cạnh $\overline{E} = [V]^2 \setminus E = \{uv \mid u, v \in V \text{ và } uv \notin E\}$. Một đơn đồ thị G được gọi là *tự bù (self-complementary)* nếu $G \simeq \overline{G}$.

(a) Chứng minh rằng đồ thị trong Hình 7.4 là một đồ thị tự bù.



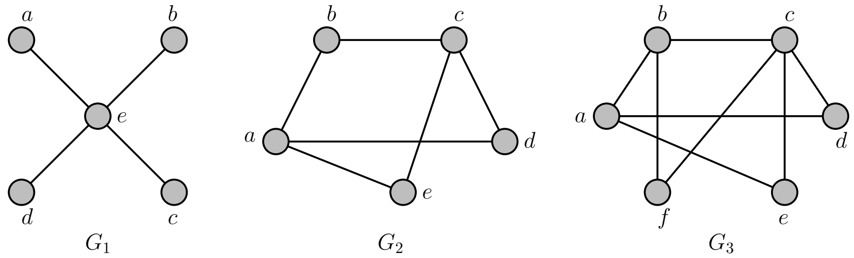
Hình 7.4: Minh họa Bài 7.7.

(b) Tìm một đồ thị tự bù có 5 đỉnh.

Bài tập 7.8

(a) Chứng minh rằng một đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ là một đồ thị hai phần khi và chỉ khi có một cách tô màu mỗi đỉnh của G bằng hai màu sao cho không có hai đỉnh kề nhau được tô cùng màu

(b) Sử dụng phần (a), hãy kiểm tra xem các đồ thị trong Hình 7.5 có phải đồ thị hai phần hay không.



Hình 7.5: Minh họa Bài 7.8.

Bài tập 7.9

(a) Cho đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ có $n \geq 3$ đỉnh. Gọi $H = (W, F)$ là một đồ thị con của G có ít nhất hai đỉnh. Chứng minh rằng nếu G là đồ thị hai phần thì H cũng là đồ thị hai phần.

(b) Chứng minh K_n không là đồ thị hai phần với mọi $n \geq 3$.

(c) Sử dụng các phần (a) và (b), chứng minh W_n không là đồ thị hai phần với mọi $n \geq 3$.

Bài tập 7.10

Một đồ thị được gọi là *đồ thị chính quy (regular graph)* nếu các đỉnh của đồ thị có cùng bậc. Chứng minh rằng nếu một đồ thị hai phần $G = (V_1 \cup V_2, E)$ là đồ thị chính quy thì $|V_1| = |V_2|$.

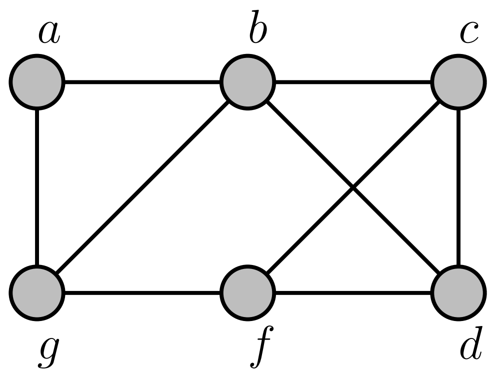
Bài tập 7.11

Hãy tìm trong đồ thị ở Hình 7.6

(a) Một đường đi có độ dài n với $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$

(b) Một đường đi đơn có độ dài n với $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$

(c) Một chu trình có độ dài n với $n \in \{3, \ldots, 7\}$



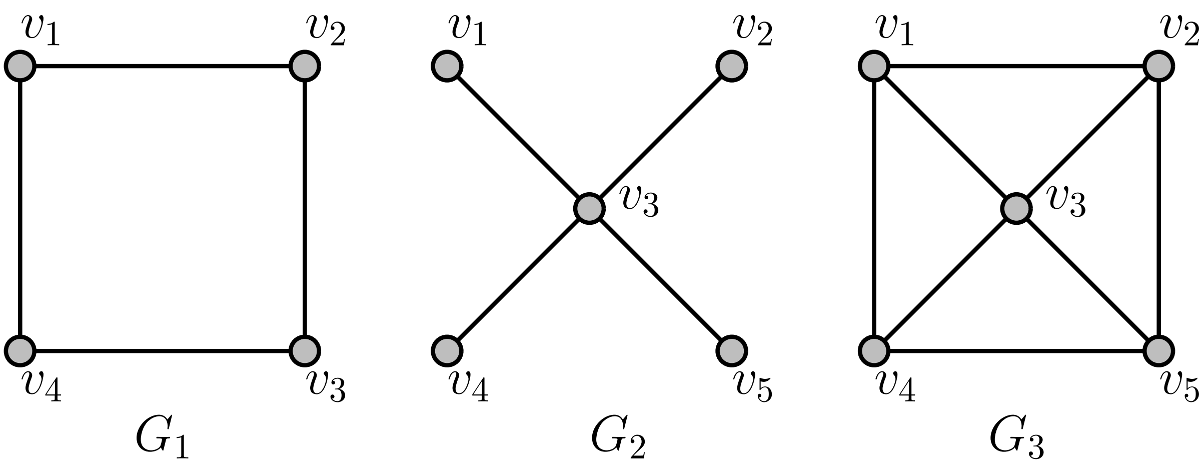
Hình 7.6: Minh họa Bài 7.11.

Bài tập 7.12

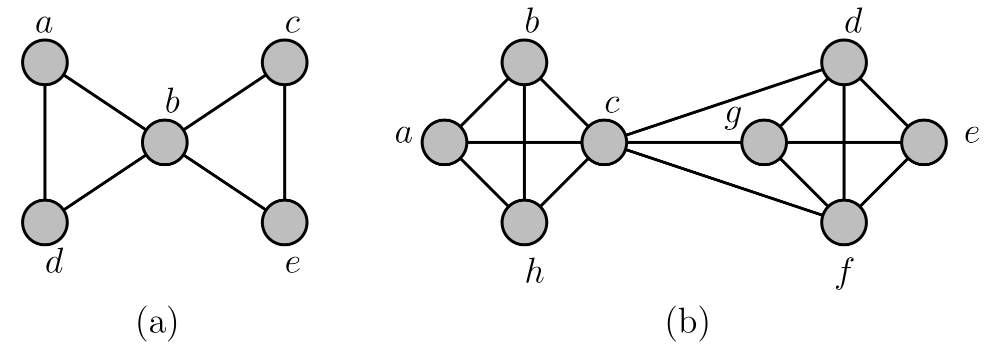
Xác định $\kappa(G_i)$ và $\lambda(G_i)$ trong các đồ thị G_i với $i = 1, 2, 3$ ở Hình 7.7.

Bài tập 7.13

Với mỗi đồ thị G trong Hình 7.8, tìm $\kappa(G), \lambda(G)$, và $\min_{v \in V} \deg(v)$.



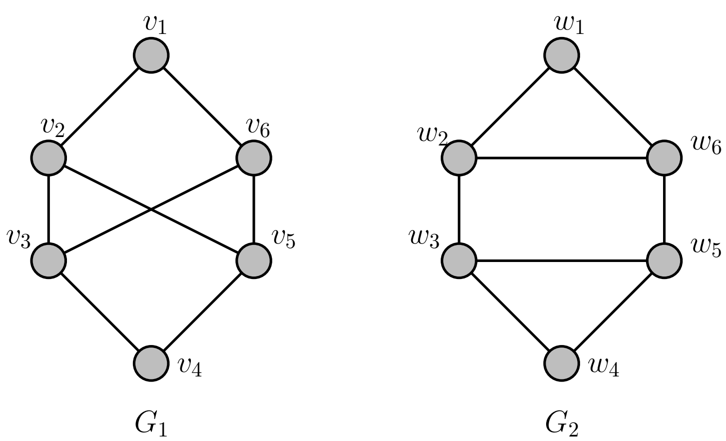
Hình 7.7: Minh họa Bài 7.12.



Hình 7.8: Minh họa Bài 7.13.

Bài tập 7.14

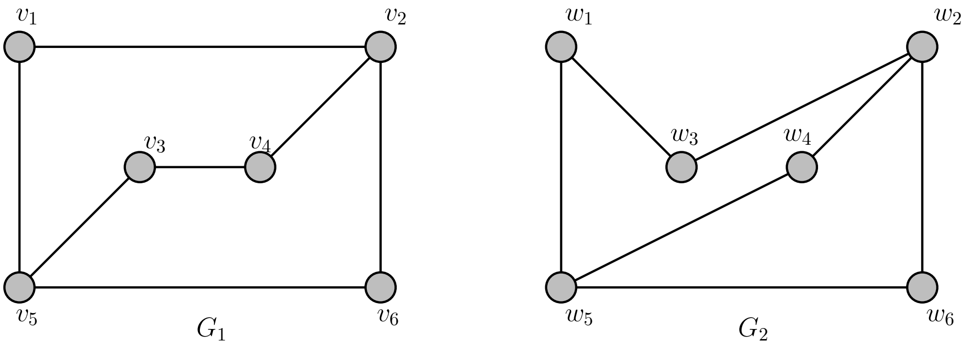
Các đồ thị trong Hình 7.9 có đẳng cấu không? Vì sao?



Hình 7.9: Minh họa Bài 7.14.

Bài tập 7.15

Các đồ thị trong Hình 7.10 có đẳng cấu không? Vì sao?



Hình 7.10: Minh họa Bài 7.15.

Bài tập 7.16

Tìm số đường đi độ dài n giữa hai đỉnh phân biệt của K_4 với n bằng

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) 5

Bài tập 7.17

Với những giá trị nào của n thì các đồ thị sau có chu trình Euler?

(a) K_n

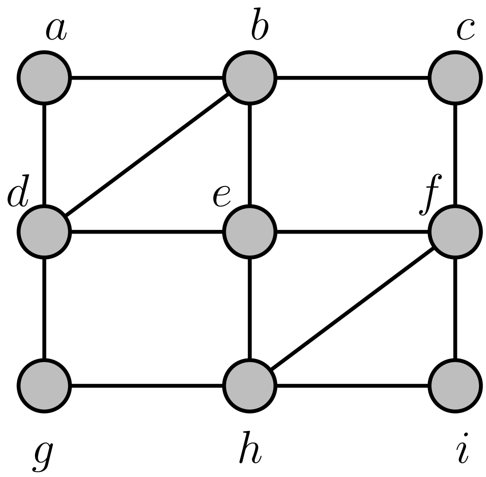
(b) C_n

(c) W_n

(d) Q_n

Bài tập 7.18

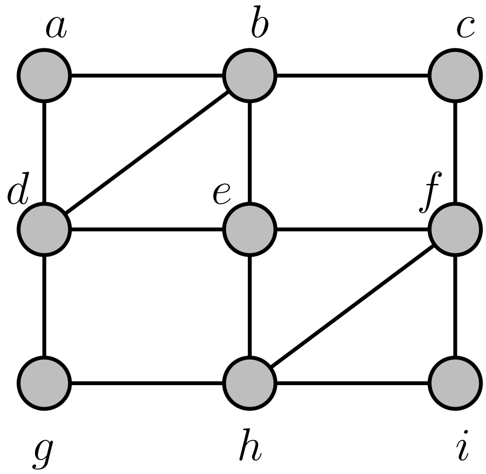
Tìm chu trình Euler trong đồ thị ở Hình 7.11.



Hình 7.11: Minh họa bài 7.18.

Bài tập 7.19

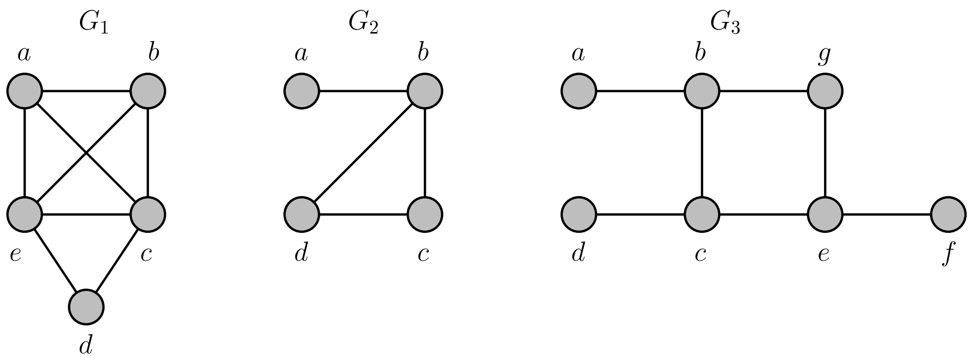
Thuật toán Fleury [34] xây dựng các chu trình Euler bằng cách đầu tiên chọn một đỉnh tùy ý của một đa đồ thị liên thông, và sau đó tạo thành một chu trình bằng cách chọn các cạnh liên tiếp. Một khi một cạnh được chọn, nó sẽ bị loại bỏ. Các cạnh được chọn liên tiếp sao cho mỗi cạnh bắt đầu từ nơi cạnh cuối cùng kết thúc, và sao cho cạnh này không phải là một cạnh cắt trừ khi không có lựa chọn thay thế nào khác. Sử dụng thuật toán Fleury để tìm một chu trình Euler trong đồ thị ở Hình 7.12.



Hình 7.12: Minh họa bài 7.19.

Bài tập 7.20

Các đồ thị trong Hình có chu trình/đường đi Hamilton không?



Hình 7.13: Minh họa Bài 7.20.

Bài tập 7.21

Hãy cho ví dụ về một đồ thị mà chu trình Euler của nó cũng là chu trình Hamilton

Bài tập 7.22

(a) Vẽ đồ thị biểu diễn các nước đi hợp lệ của quân mã trên bàn cờ 3×3.

(b) Vẽ đồ thị biểu diễn các nước đi hợp lệ của quân mã trên bàn cờ 3×4.

Bài tập 7.23

Một thông báo chẩn đoán (diagnostic message) có thể được gửi qua mạng máy tính để thực hiện kiểm tra trên tất cả các liên kết và trong tất cả các thiết bị. Loại đường đi nào nên được sử dụng để kiểm tra tất cả các liên kết? Để kiểm tra tất cả các thiết bị?

Bài tập 7.24

Định lý 7.1 (Định lý Dirac). *Nếu $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng gồm n đỉnh ($n \geq 3$) thỏa mãn điều kiện bậc của mỗi đỉnh trong G lớn hơn hoặc bằng $n/2$ thì G có một chu trình Hamilton*

Định lý 7.2 (Định lý Ore)**.** *Nếu $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng gồm n đỉnh ($n \geq 3$) thỏa mãn điều kiện $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ với mọi cặp đỉnh u, v không kề nhau trong G thì G có một chu trình Hamilton*

Chứng minh Định lý Dirac bằng cách sử dụng Định lý Ore.

Bài tập 7.25

Định lý 7.3 (Định lý Dirac)**.** *Nếu $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng gồm n đỉnh ($n \geq 3$) thỏa mãn điều kiện bậc của mỗi đỉnh trong G lớn hơn hoặc bằng $n/2$ thì G có một chu trình Hamilton*

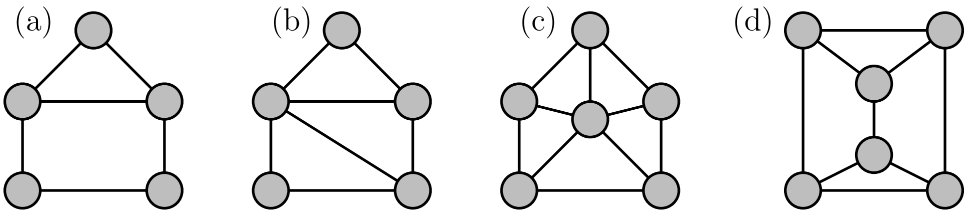
Định lý 7.4 (Định lý Ore)**.** *Nếu $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng gồm n đỉnh ($n \geq 3$) thỏa mãn điều kiện $\deg(u) + \deg(v) \geq n$ với mọi cặp đỉnh u, v không kề nhau trong G thì G có một chu trình Hamilton*

Với mỗi đồ thị trong Hình 7.14, hãy xác định

(i) có thể sử dụng Định lý Dirac để chứng minh đồ thị có chu trình Hamilton không?

(ii) có thể sử dụng Định lý Ore để chứng minh đồ thị có chu trình Hamilton không?

(iii) đồ thị có chu trình Hamilton không?



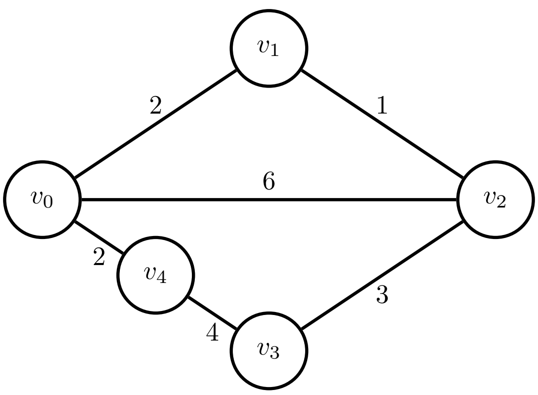
Hình 7.14: Minh họa Bài 7.25.

Bài tập 7.26

Đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị có trọng số $G = (V, E, w)$ có phải là duy nhất hay không nếu như trọng số của các cạnh là phân biệt, nghĩa là với hai cạnh $e, f \in E$ bất kỳ thì $w(e) \neq w(f)$?

Bài tập 7.27

Áp dụng thuật toán Floyd để tìm khoảng cách giữa mọi cặp đỉnh trong đồ thị ở Hình 7.15.



Hình 7.15: Minh họa Bài 7.27.

Bài tập 7.28

Một đồ thị không có đỉnh cắt nào được gọi là đồ thị không thể tách rời (nonseparable graph). Chứng minh rằng mỗi đồ thị sau là đồ thị không thể tách rời

(a) C_n với $n \geq 3$

(b) W_n với $n \geq 3$

(c) $K_{m,n}$ với $m \geq 2$ và $n \geq 2$

(d) Q_n với $n \geq 2$

Bài tập 7.29

Chứng minh rằng nếu G là đơn đồ thị vô hướng có chính xác hai đỉnh bậc lẻ u, v thì các đỉnh này phải thuộc cùng một thành phần liên thông của G

Bài tập 7.30

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng có $n \geq 2$ đỉnh.

(a) Chứng minh rằng không tồn tại đồng thời hai đỉnh phân biệt u, v thỏa mãn $\deg_G(u) = 0$ và $\deg_G(v) = n - 1$.

(b) Chứng minh rằng nếu với mọi $v \in V$ ta có $\deg_G(v) \geq n/2$ thì G là một đồ thị liên thông.

(c) Sử dụng nguyên lý chuồng bồ câu (nguyên lý Dirichlet), hãy chứng minh rằng G luôn có hai đỉnh có cùng bậc.

Bài tập 7.31

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng liên thông gồm $n \geq 1$ đỉnh và $G \not\simeq K_n$. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tập các đỉnh V' sao cho $G - V'$ là đồ thị không liên thông.

Bài tập 7.32

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng liên thông gồm $n \geq 2$ đỉnh. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tập cạnh E' sao cho $G - E'$ là một đồ thị không liên thông.

Bài tập 7.33

Chứng minh rằng với mọi đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$

$$\kappa(G) \leq \min_{v \in V} \deg_G(v) \tag{28}$$

$$\lambda(G) \leq \min_{v \in V} \deg_G(v) \tag{29}$$

Bài tập 7.34

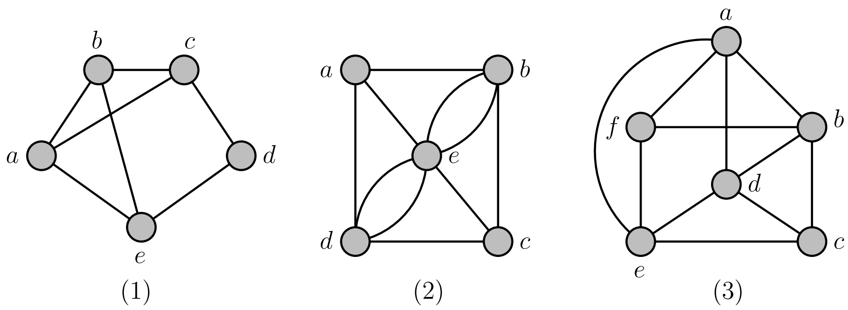
Chứng minh rằng nếu $G = (V, E)$ là một đa đồ thị vô hướng thỏa mãn $\deg_G(u) \geq 2$ với mọi $u \in V$ thì G có một chu trình đơn

Bài tập 7.35

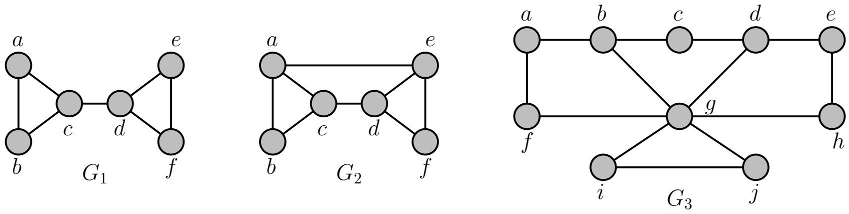
Hãy xác định xem các đồ thị trong Hình 7.16 có chu trình/đường đi Euler hay không? Nếu có, hãy tìm một chu trình/đường đi Euler trong đồ thị đó

Bài tập 7.36

Trong các đồ thị ở Hình 7.17, đồ thị nào có chu trình Hamilton? Tại sao?



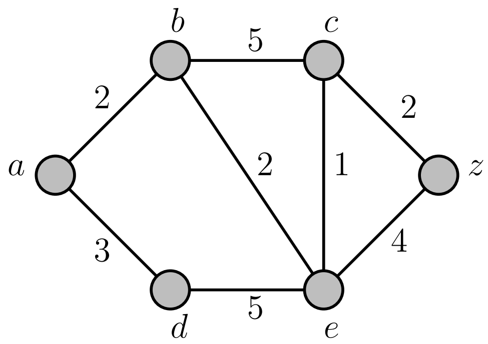
Hình 7.16: Minh họa Bài 7.35.



Hình 7.17: Minh họa Bài 7.36.

Bài tập 7.37

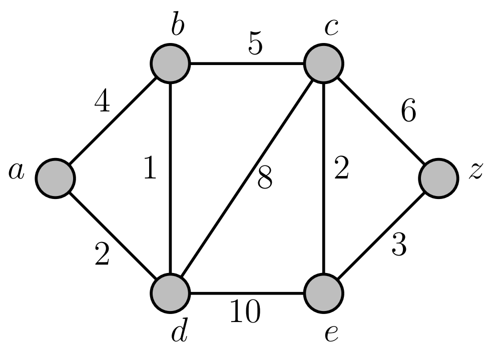
Áp dụng thuật toán Dijkstra để tìm khoảng cách từ a đến z trong đồ thị ở Hình 7.18.



Hình 7.18: Minh họa Bài 7.37.

Bài tập 7.38

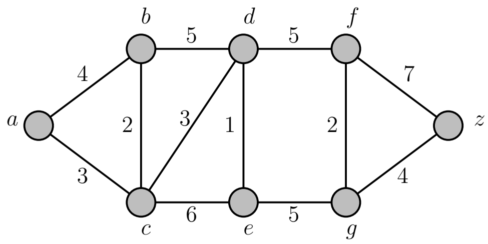
Áp dụng thuật toán Dijkstra để tìm khoảng cách từ a đến z trong đồ thị ở Hình 7.19.



Hình 7.19: Minh họa Bài 7.38.

Bài tập 7.39

Áp dụng thuật toán Dijkstra để tìm khoảng cách từ a đến z trong đồ thị ở Hình 7.20.



Hình 7.20: Minh họa Bài 7.39.

Bài tập 7.40

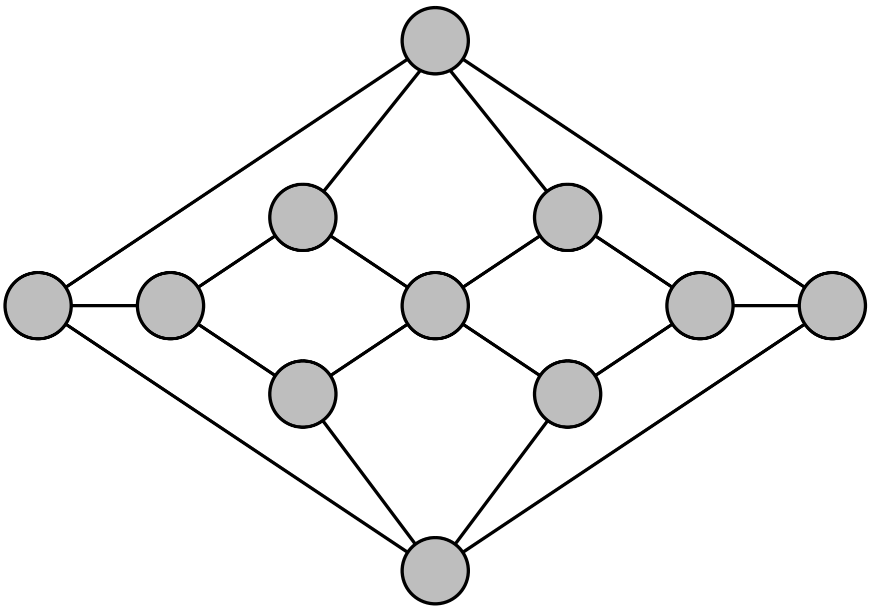
Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng. Đặt $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg(v)$. Chứng minh rằng tồn tại một đường đi đơn trong G có độ dài $\delta(G)$ nếu $\delta(G) \geq 2$.

Bài tập 7.41

Chứng minh rằng đồ thị biểu diễn các nước đi hợp lệ của quân mã trên bàn cờ kích thước $m \times n$, với mọi số nguyên dương m và n, là đồ thị hai phần.

Bài tập 7.42

Chứng minh rằng đồ thị trong Hình 7.21 không có chu trình Hamilton. (**Gợi ý:** Đồ thị đã cho là một đồ thị hai phần)



Hình 7.21: Minh họa Bài 7.42.

Bài tập 7.43

Chứng minh rằng một đồ thị vô hướng liên thông bất kỳ gồm $n \geq 1$ đỉnh có ít nhất $n - 1$ cạnh. (**Gợi ý:** Quy nạp mạnh theo số đỉnh n của đồ thị.)

Bài tập 7.44

Định lý 7.5 (Định lý Dirac)**.** *Nếu $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng gồm n đỉnh ($n \geq 3$) thỏa mãn điều kiện bậc của mỗi đỉnh trong G lớn hơn hoặc bằng $n/2$ thì G có một chu trình Hamilton*

Bài tập này minh họa một cách chứng minh Định lý Dirac. Hãy hoàn thành những phần sau đây bằng cách giải thích các phát biểu có cụm từ "(Tại sao?)".

(a) Dễ thấy Định lý đúng với $n = 3$. Giả sử $n \geq 4$

(b) G phải liên thông (Tại sao?)

(c) Gọi $P = v_0, v_1, \dots, v_k$ là đường đi đơn có độ dài lớn nhất trong G ($0 \leq k \leq n - 1$).

- Mọi đỉnh kề với v_0 hoặc v_k đều phải thuộc P. (Tại sao?)
- Do $\deg(v_k) \geq n/2$, có ít nhất $n/2$ cạnh phân biệt $v_i v_{i+1}$ của P thỏa mãn $v_i v_k \in E$. Tương tự, do $\deg(v_0) \geq n/2$, có ít nhất $n/2$ cạnh phân biệt $v_j v_{j+1}$ của P thỏa mãn $v_0 v_{j+1} \in E$.
- Do P có ít hơn n cạnh, tồn tại một cạnh $v_q v_{q+1}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện trên: $v_q v_k \in E$ và $v_0 v_{q+1} \in E$.

(d) P chứa tất cả các đỉnh của G. (Tại sao?)

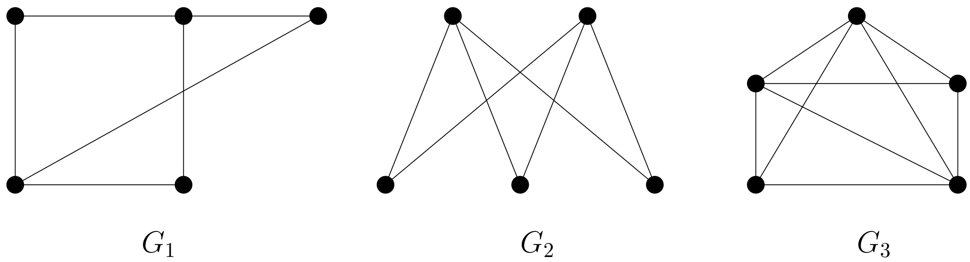
(e) Từ P, ta tìm được một chu trình Hamilton của G. (Tại sao?)

Bài tập 7.45

Cho $G = (V_1 \cup V_2, E)$ là một đồ thị hai phần với $|V_1| = |V_2| = n$ ($n \geq 2$). Chứng minh rằng nếu $\deg(v) > n/2$ với mọi đỉnh $v \in V = V_1 \cup V_2$ thì G có một chu trình Hamilton. (**Gợi ý:** Xem lại chứng minh của Định lý Dirac.)

Bài tập 7.46

Tìm một biểu diễn phẳng của các đồ thị phẳng trong Hình 7.22.



Hình 7.22: Minh họa Bài 7.46.

Bài tập 7.47

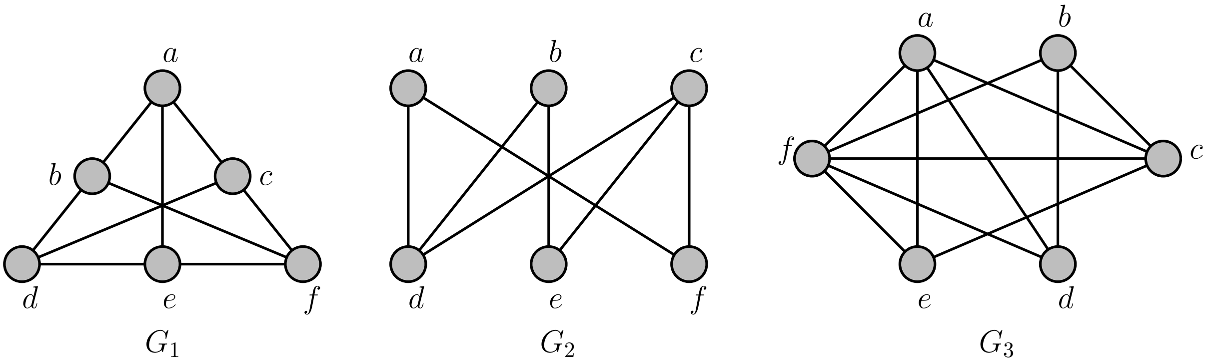
Các đồ thị trong Hình 7.23 có phải đồ thị phẳng không? Nếu đúng, hãy vẽ một biểu diễn phẳng của đồ thị đó.

Bài tập 7.48

Giả sử G là một đồ thị đơn phẳng và liên thông gồm 20 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc 3. Một biểu diễn phẳng của G chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

Bài tập 7.49

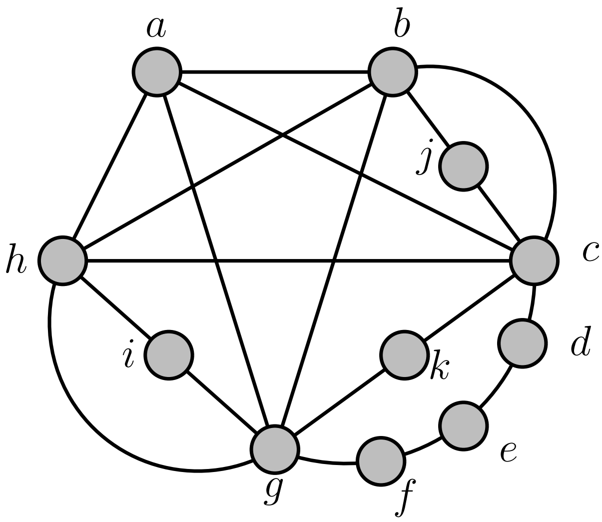
Giả sử một đồ thị phẳng liên thông có 8 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc 3. Một biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?



Hình 7.23: Minh họa Bài 7.47.

Bài tập 7.50

Sử dụng Định lý Kuratowski, hãy chứng minh đồ thị trong Hình 7.24 không là đồ thị phẳng.



Hình 7.24: Minh họa Bài 7.50.

Bài tập 7.51

Những đồ thị nào có sắc số bằng 1?

Bài tập 7.52

Tô màu các đồ thị G ở Hình 7.25 bằng tối đa $\Delta(G) + 1$ màu, trong đó $\Delta(G)$ là bậc lớn nhất của một đỉnh của G.

Bài tập 7.53

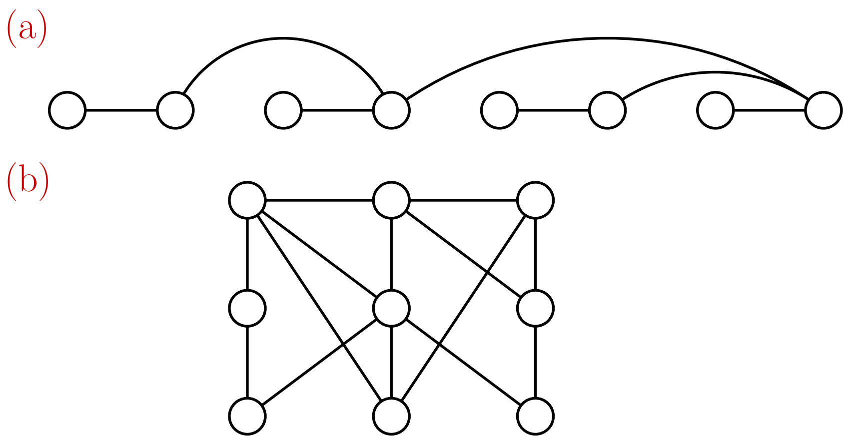
Trong số các đồ thị không phẳng sau, đồ thị nào thỏa mãn điều kiện sau: nếu bỏ đi một đỉnh bất kỳ và các cạnh liên thuộc với đỉnh đó thì ta thu được một đồ thị phẳng.

(a) K_5

(b) K_6

(c) $K_{3,3}$

(d) $K_{3,4}$



Hình 7.25: Minh họa Bài 7.52.

Bài tập 7.54

Chứng minh K_5 không là đồ thị phẳng.

Bài tập 7.55

Chứng minh rằng nếu G là một đơn đồ thị phẳng và liên thông thì G có một đỉnh có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 5.

Bài tập 7.56

Chứng minh

(a) $\chi(K_n) = n$ với mọi $n \geq 1$.

(b) $\chi(C_n) = 2$ nếu $n \geq 4$ chẵn và $\chi(C_n) = 3$ nếu $n \geq 3$ lẻ.

(c) G là đồ thị hai phần khi và chỉ khi $\chi(G) = 2$.

Bài tập 7.57

Tính $\chi(W_n)$ $(n \geq 3)$, $\chi(K_{m,n})$ $(m \geq n \geq 1)$, và $\chi(Q_n)$ $(n \geq 1)$.

Bài tập 7.58

Một cách tô màu các cạnh của một đồ thị $G = (V, E)$ bằng k màu (*k-edge coloring*) là một hàm $f : E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ thỏa mãn điều kiện $f(e) \neq f(e')$ nếu e và e' liên thuộc với cùng một đỉnh. *Sắc số cạnh (edge chromatic number)* của một đồ thị G, ký hiệu $\chi'(G)$, là số màu nhỏ nhất có thể dùng để tô màu các cạnh của G.

(a) Tìm $\chi'(C_n)$ và $\chi'(W_n)$ với $n \geq 3$.

(b) Chứng minh rằng $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, trong đó $\Delta(G)$ là bậc lớn nhất của một đỉnh của G.

Bài tập 7.59

Cho G là một đơn đồ thị phẳng có k thành phần liên thông. Giả sử G có n đỉnh, m cạnh, và một biểu diễn phẳng của G chia mặt phẳng ra thành r miền. Chứng minh rằng $n - m + r = k + 1$.

Bài tập 7.60

Định lý 7.6. *Mọi đồ thị phẳng G có $\chi(G) \leq 6$.*

Chứng minh Định lý 7.6 bằng phương pháp quy nạp.

Bài tập 7.61

Định lý 7.7. *Mọi đồ thị phẳng G có $\chi(G) \leq 5$.*

Chứng minh Định lý 7.7 bằng phương pháp quy nạp theo số đỉnh n của G bằng cách hoàn thành các bước sau:

(a) Chứng minh bổ đề sau: Mọi đồ thị phẳng G có ít nhất một đỉnh v thỏa mãn $\deg(v) \leq 5$.

(b) Ở bước cơ sở, chứng minh Định lý 7.7 đúng với mọi $n \leq 5$

(c) Ở bước quy nạp, giả sử Định lý 7.7 đúng với mọi đồ thị phẳng gồm n đỉnh, trong đó $n \geq 5$ là số nguyên nào đó. Chứng minh Định lý 7.7 cũng đúng với mọi đồ thị phẳng gồm $n+1$ đỉnh. Giả sử G là đồ thị phẳng với $n+1$ đỉnh. Do đó, theo bổ đề ở phần (a), G có một đỉnh v thỏa mãn $\deg(v) \leq 5$. Theo giả thiết quy nạp, có một cách tô màu α các đỉnh của $G - v$ bằng tối đa 5 màu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

   (b.1) Nếu $\deg(v) \leq 4$ hoặc $\deg(v) = 5$ và các đỉnh kề với v được tô màu bằng ≤ 4 màu, chứng minh rằng các đỉnh của G có thể được tô màu bằng 5 màu

   (b.2) ($\star$) Nếu $\deg(v) = 5$ và các đỉnh kề với v, ví dụ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, được tô màu bằng 5 màu khác nhau, ví dụ như lần lượt là $1, 2, 3, 4, 5$, chứng minh rằng các đỉnh của G có thể được tô màu bằng 5 màu

   - Xét đồ thị $G_{1,3}$ cảm sinh bởi các đỉnh tô màu 1 và 3. Điều gì xảy ra nếu v_1 và v_3 không thuộc cùng một thành phần liên thông của $G_{1,3}$? (**Gợi ý:** Trong trường hợp này, liệu có cách tô màu nào để v_1 và v_3 có cùng màu không?)
   - Nếu v_1 và v_3 thuộc cùng một thành phần liên thông của $G_{1,3}$, xét đồ thị $G_{2,4}$ cảm sinh bởi các đỉnh tô màu 2 và 4. Liệu có thể xảy ra trường hợp v_2 và v_4 thuộc cùng một thành phần liên thông của $G_{2,4}$ không? (**Gợi ý:** G là đồ thị phẳng)

Bài tập 7.62

Các đồ thị hai phần đầy đủ $K_{m,n}$ $(m, n \in \mathbb{Z}^+)$ nào là cây?

Bài tập 7.63

Đồ thị nào trong các đồ thị ở Hình 7.26 là cây?

Bài tập 7.64

Giả sử một cây $T = (V, E)$ có số các cạnh là một số chẵn. Chứng minh rằng tồn tại một đỉnh trong T có bậc chẵn

Bài tập 7.65

Hãy trả lời các câu hỏi sau về cây có gốc trong Hình 7.27.

(a) Đỉnh nào là đỉnh gốc?

(b) Các đỉnh nào là đỉnh trong?

(c) Các đỉnh nào là đỉnh lá?

(d) Các đỉnh nào là đỉnh con của j?

(e) Đỉnh nào là đỉnh cha của h?

(f) Các đỉnh nào là đỉnh anh em của o?

(g) Các đỉnh nào là đỉnh tổ tiên của m?

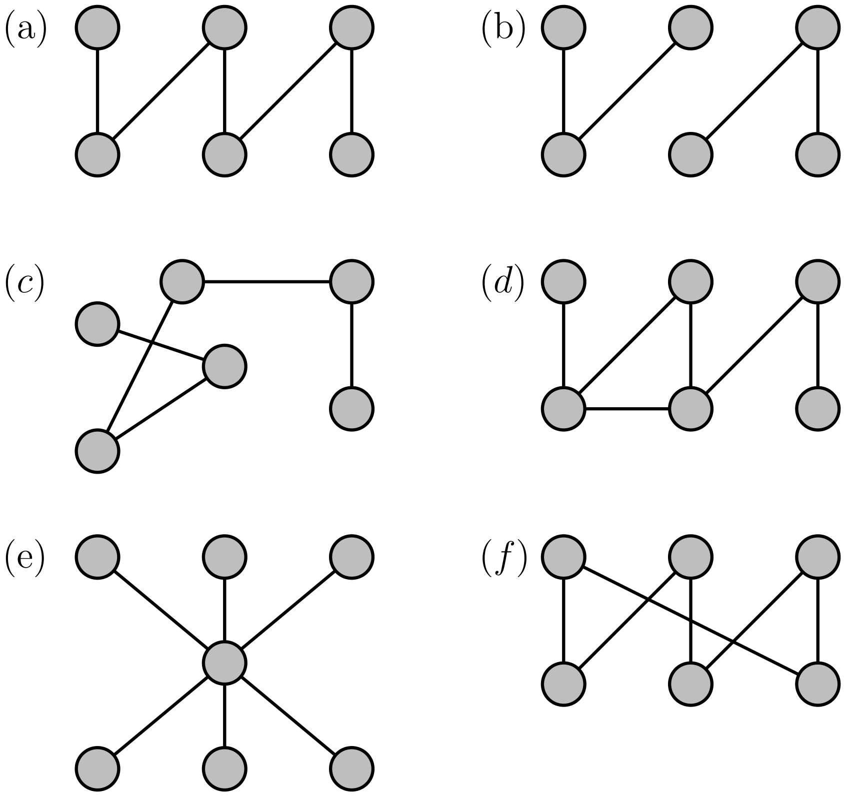
(h) Các đỉnh nào là đỉnh con cháu của b?

(i) Mức của mỗi đỉnh là bao nhiêu?

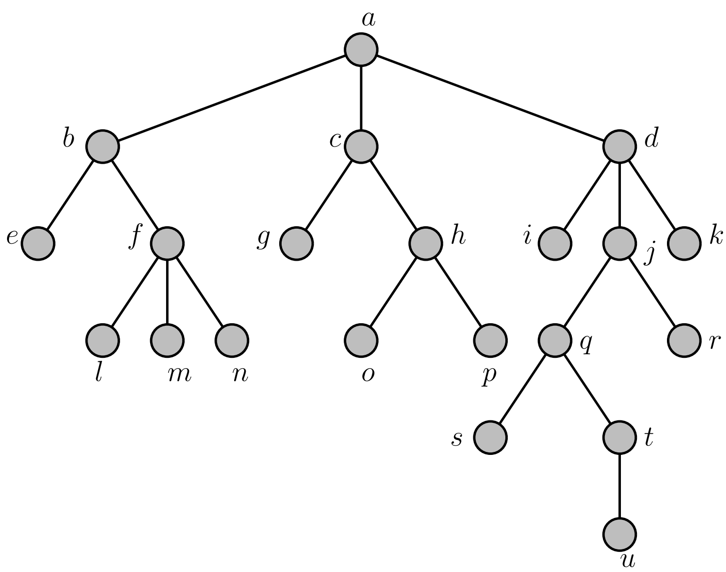
(j) Vẽ các cây con gốc c và gốc e

Bài tập 7.66

Trong số các cây ở Hình 7.28, với m là số nguyên dương nào đó, cây nào là cây m-phân? Cây nào là cây m-phân đầy đủ?



Hình 7.26: Minh họa Bài 7.63.



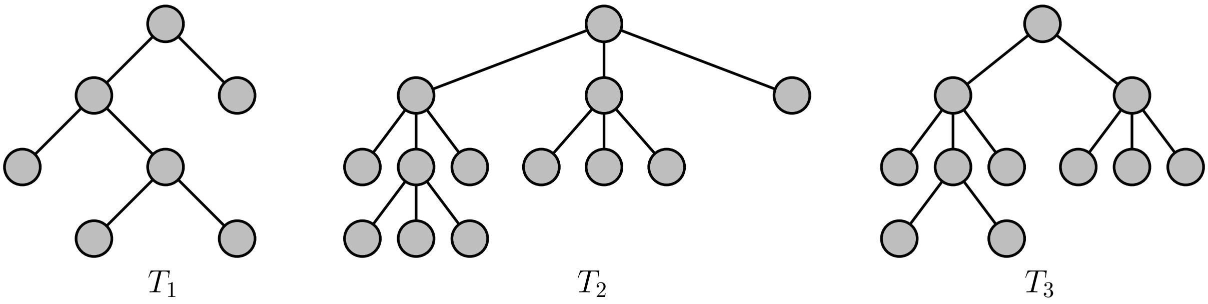
Hình 7.27: Minh họa Bài 7.65.

Bài tập 7.67

Xây dựng cây tìm kiếm nhị phân với danh sách các phần tử:

(a) $L = [10, 15, 20, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 90]$

(b) $L = [50, 35, 75, 10, 60, 45, 20, 80, 55, 30, 90, 40, 70, 15, 65]$



Hình 7.28: Minh họa Bài 7.66.

Bài tập 7.68

Sử dụng *thứ tự bảng chữ cái (alphabetical order)*[2], hãy xây dựng một cây tìm kiếm nhị phân cho các từ trong câu "The quick brown fox jumps over the lazy dog"

Bài tập 7.69

(a) Đơn đồ thị vô hướng liên thông nào có chính xác một cây bao trùm?

(b) Khi nào thì một cạnh của một đơn đồ thị vô hướng liên thông phải thuộc mọi cây bao trùm của đồ thị đó?

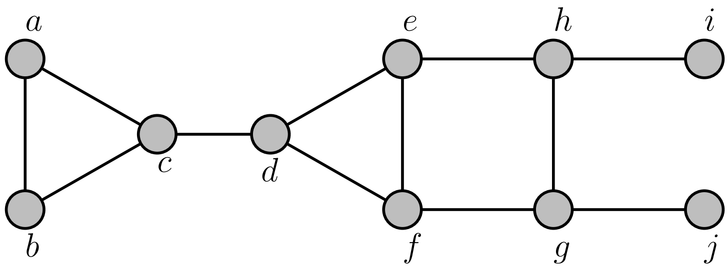
Bài tập 7.70

Tìm một cây bao trùm của đồ thị trong Hình 7.29 bằng

(a) thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu (DFS);

(b) thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng (BFS);

bắt đầu từ đỉnh a.



Hình 7.29: Minh họa Bài 7.70.

Bài tập 7.71

Giả sử địa chỉ của đỉnh v trong cây có gốc được sắp thứ tự T là 3.4.5.2.4.

(a) v nằm ở mức nào?

(b) Địa chỉ của đỉnh cha của v là gì?

(c) Số lượng đỉnh anh em ít nhất mà v có thể có là bao nhiêu?

(d) Nếu v có địa chỉ như trên, số lượng đỉnh nhỏ nhất có thể có trong T là bao nhiêu?

(e) Tìm các địa chỉ khác mà bắt buộc phải xuất hiện trong cây.

[2]Thứ tự bảng chữ (alphabetical order) cái chính là thứ tự từ điển (lexicographic order) được áp dụng với các chữ cái

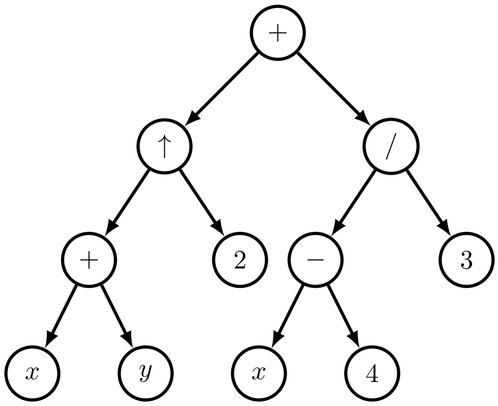
Bài tập 7.72

Liệt kê các đỉnh của cây sau bằng cách duyệt theo

(a) tiền thứ tự,

(b) trung thứ tự, và

(c) hậu thứ tự.



Hình 7.30: Minh họa Bài 7.72.

Bài tập 7.73

(a) Biểu diễn biểu thức $((x+2)\uparrow 3)*(y-(3+x))-5$ bằng cây nhị phân

(b) Viết biểu thức này ở dạng tiền tố

(c) Viết biểu thức này ở dạng hậu tố

(d) Viết biểu thức này ở dạng trung tố

Bài tập 7.74

Vẽ cây có gốc được sắp thứ tự tương ứng với mỗi biểu thức số học được viết ở dạng tiền tố sau đây. Sau đó viết mỗi biểu thức ở dạng trung tố.

(a) $+*+-53214$

(b) $\uparrow +23-51$

(c) $*/93+*24-76$

Bài tập 7.75

Giá trị của mỗi biểu thức tiền tố sau là bao nhiêu?

(a) $-*2/843$

(b) $\uparrow -*33*425$

(c) $+-\uparrow 32\uparrow 23/6-42$

(d) $*+3+3\uparrow 3+333$

Bài tập 7.76

Giá trị của mỗi biểu thức hậu tố sau là bao nhiêu?

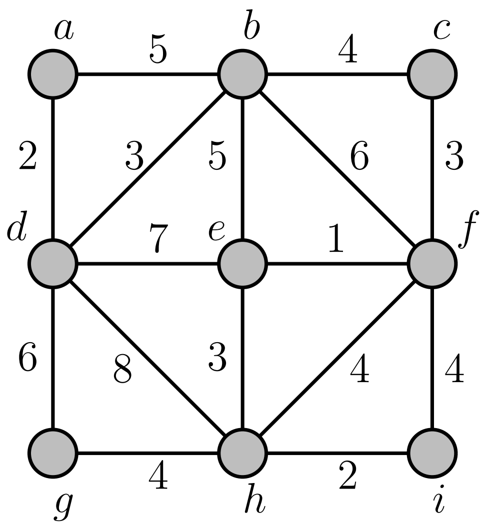
(a) $521 - -314 + +*$

(b) $93/5 + 72 - *$

(c) $32 * 2 \uparrow 53 - 84/ * -$

Bài tập 7.77

Tìm một cây bao trùm nhỏ nhất của đồ thị trong Hình 7.31 bằng cách sử dụng



Hình 7.31: Minh họa Bài 7.77.

(a) thuật toán Prim

(b) thuật toán Kruskal

Bài tập 7.78

Chứng minh rằng một đồ thị $G = (V, E)$ là một cây khi và chỉ khi G không có chu trình và với mọi cặp đỉnh $u, v \in V$ thỏa mãn $uv \notin E$, đồ thị $G + uv$ có chính xác một chu trình

Bài tập 7.79

Cho $T = (V, E)$ là một cây. Gọi Δ là bậc lớn nhất của một đỉnh trong T, nghĩa là, $\Delta = \max_{v \in V} \deg_T(v)$. Chứng minh rằng T có ít nhất Δ đỉnh bậc 1

Bài tập 7.80

Một rừng bao gồm n đỉnh và t cây (mỗi cây là một thành phần liên thông của rừng) có bao nhiêu cạnh?

Bài tập 7.81

Định lý 7.8. *Một cây m-phân đầy đủ với*

(i) n đỉnh có $i = (n-1)/m$ đỉnh trong và $\ell = ((m-1)n + 1)/m$ đỉnh lá;

(ii) i đỉnh trong có $n = mi + 1$ đỉnh và $\ell = (m-1)i + 1$ đỉnh lá;

(iii) ℓ đỉnh lá có $n = (m\ell - 1)/(m-1)$ đỉnh và $i = (\ell - 1)/(m-1)$ đỉnh trong

(a) Chứng minh rằng mọi cây m-phân đầy đủ ($m \geq 1$) với i đỉnh trong có chính xác $n = m \cdot i + 1$ đỉnh.

(b) Sử dụng phần (a), hãy chứng minh Định lý 7.8.

Bài tập 7.82

Chứng minh rằng với mọi $m \geq 1$, có nhiều nhất m^h đỉnh lá trong một cây m-phân có độ cao h. (**Gợi ý:** Quy nạp theo h.)

Bài tập 7.83

Với mọi $m \geq 1$, chứng minh rằng trong một cây m-phân có ℓ đỉnh lá và có độ cao h, ta có $h \geq \lceil \log_m \ell \rceil$

Bài tập 7.84

Cho thuật toán xây dựng cây tìm kiếm nhị phân sau:
Đầu vào: Danh sách các phần tử $L = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$
Đầu ra: Cây tìm kiếm nhị phân T

1. **Thủ tục `CreateBST`(L):** (Tạo cây tìm kiếm nhị phân từ danh sách L)
   - Khởi tạo T là cây rỗng với một đỉnh gốc r
   - Gán $key(r) = k_1$
   - Với mỗi i từ 2 đến n: Gọi thủ tục `Insert`(T, r, k_i)
   - Trả về T
2. **Thủ tục `Insert`(T, v, k):** (Chèn phần tử (có khóa bằng) k vào cây T với gốc v)
   - Nếu $k < key(v)$:
     - Nếu v có con trái: Gọi đệ quy `Insert`(T, con trái của v, k)
     - Ngược lại: Tạo đỉnh mới w với $key(w) = k$ và thêm w làm con trái của v
   - Nếu $k > key(v)$:
     - Nếu v có con phải: Gọi đệ quy `Insert`(T, con phải của v, k)
     - Ngược lại: Tạo đỉnh mới w với $key(w) = k$ và thêm w làm con phải của v

Từ thủ tục `Insert`(T, v, k), hãy viết một thuật toán đệ quy tìm kiếm một phần tử có khóa bằng k trong cây tìm kiếm nhị phân T với gốc v và nếu không tìm được thì chèn một phần tử mới có khóa bằng k vào cây T và trả lại vị trí của phần tử mới này. (**Gợi ý:** Một phiên bản không đệ quy của thuật toán này là [7, Thuật toán 1, Trang 795])

Bài tập 7.85

Hãy mô tả các cây bao trùm xuất ra bởi thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng và thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu khi chạy trên đồ thị đầy đủ K_n, với n là số nguyên dương nào đó

Bài tập 7.86

Cho $T = (V, E)$ là một cây với $|V| > 1$. Giả sử nếu v là một đỉnh liền kề với một đỉnh bậc 1 trong T thì $\deg_T(v) \geq 3$. Chứng minh rằng tồn tại hai đỉnh bậc 1 trong T có chung một đỉnh liền kề với hai đỉnh đó

Bài tập 7.87

Chứng minh rằng nếu T là một cây bao trùm của $G = (V, E, w)$ xuất ra bởi thuật toán Kruskal thì T là cây bao trùm nhỏ nhất (**Gợi ý:** xem lại chứng minh tính đúng đắn của thuật toán Prim.)

Thuật toán 7.1: Thuật toán Kruskal

Input: $G = (V, E, w)$: đồ thị liên thông vô hướng có trọng số
Output: Một cây bao trùm nhỏ nhất T của G
$T :=$ đồ thị rỗng (không có đỉnh và cạnh)
for $i := 1$ **to** $n - 1$ **do**
    $e :=$ một cạnh có trọng số nhỏ nhất thỏa mãn $T + e$ không có chu trình
    $T := T + e$
return T

Bài tập 7.88

Cần ít nhất bao nhiêu lần cân bằng cân đĩa để tìm một đồng xu giả trong số bốn đồng xu nếu đồng xu giả có thể nặng hơn hoặc nhẹ hơn các đồng xu khác? Mô tả một thuật toán để tìm đồng xu giả bằng số lần cân này

CHỦ ĐỀ 8

Đại số Boole

Bài tập 8.1

Tính $1 \cdot 0 + \overline{(0+1)}$

Bài tập 8.2

Dịch tương đương lôgic $(\mathbf{T} \wedge \mathbf{T}) \vee \neg \mathbf{F} \equiv \mathbf{T}$ sang một đẳng thức trong Đại số Boole.

Bài tập 8.3

(a) Lập bảng giá trị của các hàm Boole sau:

(1) $F(x, y, z) = x\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

(2) $F(x, y, z) = x(yz + \bar{y}\bar{z})$.

(b) Biểu diễn mỗi hàm ở phần (a) trên một khối lập phương Q_3 bằng cách đánh dấu các đỉnh tại đó hàm đạt giá trị 1.

Bài tập 8.4

Sử dụng luật De Morgan, ta có thể biểu diễn phép toán + theo hai phép toán $\cdot$ và $\bar{\ }$, từ đó có thể biểu diễn mọi hàm Boole bằng một biểu thức chỉ chứa hai phép toán đó. Hãy tìm một biểu diễn như vậy của các hàm sau:

(a) $F(x, y) = x + y$

(b) $F(x, y, z) = \bar{x}(x + \bar{y}) + z$

Bài tập 8.5

Sử dụng luật De Morgan, ta có thể biểu diễn mọi hàm Boole bằng một biểu thức chỉ chứa hai phép toán + và $\bar{\ }$. Tìm một biểu diễn như vậy của các hàm sau:

(a) $F(x, y) = \overline{xy}$

(b) $F(x, y, z) = x + \bar{y}(\bar{x} + z)$

Bài tập 8.6

Vẽ các mạch tổ hợp có đầu ra

(a) $\overline{x}\overline{(y + \overline{z})}$

(b) $(x + y + z)(\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})$

Bài tập 8.7

Có tất cả bao nhiêu hàm Boole bậc n khác nhau?

Bài tập 8.8

Bằng cách sử dụng bảng để biểu diễn các hàm Boole, hãy chứng minh luật phân phối $x + yz = (x + y)(x + z)$. (Gợi ý: Xem lại cách sử dụng bảng chân trị trong lôgic mệnh đề.)

Bài tập 8.9

Bằng cách sử dụng đẳng thức quan trọng khác trong Bảng 8.1, hãy chứng minh luật hấp thụ $x(x + y) = x$.

Tên gọi	**Đẳng thức**	**Tên gọi**	**Đẳng thức**
Luật phần bù kép	$\overline{\overline{x}} = x$	Luật lũy đẳng	$x + x = x$, $x \cdot x = x$
Luật đồng nhất	$x + 0 = x$, $x \cdot 1 = x$	Luật nuốt	$x + 1 = 1$, $x \cdot 0 = 0$
Luật giao hoán	$x + y = y + x$, $xy = yx$	Luật kết hợp	$(x+y)+z = x+(y+z)$, $x(yz) = (xy)z$
Luật phân phối	$x+yz = (x+y)(x+z)$, $x(y+z) = xy + xz$	Luật De Morgan	$\overline{(xy)} = \overline{x} + \overline{y}$, $\overline{(x+y)} = \overline{x}\,\overline{y}$
Luật hấp thụ	$x + xy = x$, $x(x+y) = x$	Tính chất đơn vị	$x + \overline{x} = 1$
Tính chất không	$x\overline{x} = 0$		

Bảng 8.1: Một số hằng đẳng thức quan trọng trong Đại số Boole

Bài tập 8.10

Tìm một biểu diễn của hàm Boole $F(x, y, z)$ biết rằng F nhận giá trị 1 khi và chỉ khi:

(a) có đúng 2 trong 3 biến x, y, z nhận giá trị 1.

(b) có một số chẵn biến nhận giá trị 1.

Bài tập 8.11

Tìm biểu diễn dưới dạng tổng của các tiểu hạng (minterm) của các hàm sau:

(a) $F(x, y, z) = (x + \overline{z})y$

(b) $F(x, y, z) = x\overline{y} + y\overline{z}$

Bài tập 8.12

Chứng minh rằng

(a) $\overline{x} = x \mid x$

(b) $xy = (x \mid y) \mid (x \mid y)$

(c) $x + y = (x \mid x) \mid (y \mid y)$

Bài tập 8.13

Chứng minh rằng

(a) $\overline{x} = x \downarrow x$

(b) $xy = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

(c) $x + y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$

Bài tập 8.14

Dùng sơ đồ Karnaugh và phương pháp Quine-McCluskey để rút gọn các khai triển tổng các tích sau

(a) $xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

(b) $x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

(c) $xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

Bài tập 8.15

Đôi khi một hệ thống đèn cố định được điều khiển bởi hai hay nhiều công tắc. Các mạch điện cần được thiết kế sao cho khi ấn một công tắc bất kỳ thì hệ thống đèn đang bật sẽ tắt và hệ thống đèn đang tắt sẽ bật. Hãy thử thiết kế mạch theo yêu cầu với ba công tắc.

Tài liệu tham khảo

[1] David Liben-Nowell. *Connecting Discrete Mathematics and Computer Science*. Cambridge University Press, 2022. URL: https://cs.carleton.edu/faculty/dln/book/.

[2] Rhyd M. R. Lewis. *Guide to Graph Colouring: Algorithms and Applications*. 2nd. Springer, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-81054-2.

[3] Vadim Zverovich. *Modern Applications of Graph Theory*. Oxford University Press, 2021. ISBN: 978-0-19-885674-0. DOI: 10.1093/oso/9780198856740.001.0001.

[4] Jeff Erickson. *Algorithms*. 2019. URL: http://algorithms.wtf/.

[5] Kenneth Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. 8th. McGraw-Hill, 2018.

[6] László Babai. "Graph Isomorphism in Quasipolynomial Time". In: *Proceedings of the Forty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. 2016, pp. 684–697. DOI: 10.1145/2897518.2897542.

[7] Kenneth Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. 7th. McGraw-Hill, 2012.

[8] Phil Frana. "An Interview with Edsger W. Dijkstra". In: *Communications of the ACM* 53.8 (2010), pp. 41–47. DOI: 10.1145/1787234.1787249.

[9] David S. Gunderson and Kenneth H. Rosen. *Handbook of Mathematical Induction: Theory and Applications*. Chapman and Hall/CRC, 2010. DOI: 10.1201/b16005.

[10] Manindra Agrawal, Neeraj Kayal, and Nitin Saxena. "PRIMES is in P". In: *Annals of Mathematics* 160.2 (2004), pp. 781–793. DOI: 10.4007/annals.2004.160.781.

[11] Pierre Baldi, Paolo Frasconi, and Padhraic Smyth. *Modeling the Internet and the Web, Probabilistic Methods and Algorithms*. John Wiley & Sons, 2003. ISBN: 978-0-470-84906-4. DOI: 10.1002/047086844X.

[12] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes. *Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW*. Oxford: Oxford University Press, 2003. ISBN: 9780198515906. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198515906.001.0001.

[13] Mark E. J. Newman. "The structure of scientific collaboration networks". In: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* 98.2 (2001), pp. 404–409. DOI: 10.1073/pnas.98.2.404.

[14] Andrei Broder, Ravi Kumar, Farzin Maghoul, Prabhakar Raghavan, Sridhar Rajagopalan, Raymie Stata, Andrew Tomkins, and Janet Wiener. "Graph structure in the web". In: *Computer Networks* 33.1-6 (2000), pp. 309–320. DOI: 10.1016/S1389-1286(00)00083-9.

[15] Réka Albert, Hawoong Jeong, and Albert-László Barabási. "Diameter of the world-wide web". In: *Nature* 401.6749 (1999), pp. 130–131. DOI: 10.1038/43601.

[16] Duncan J. Watts and Steven H. Strogatz. "Collective dynamics of 'small-world' networks". In: *Nature* 393.6684 (1998), pp. 440–442. DOI: 10.1038/30918.

[17] Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour, and Robin Thomas. "The four-colour theorem". In: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 70.1 (1997), pp. 2–44. DOI: 10.1006/jctb.1997.1750.

[18] Kenneth Appel and Wolfgang Haken. "Every planar map is four colorable. Part I: Discharging". In: *Illinois Journal of Mathematics* 21.3 (1977), pp. 429–490. DOI: 10.1215/ijm/1256049011.

[19] Kenneth Appel, Wolfgang Haken, and John Koch. "Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility". In: *Illinois Journal of Mathematics* 21.3 (1977), pp. 491–567. DOI: 10.1215/ijm/1256049012.

[20] Frank Harary and Ronald C. Read. "Is the null graph a pointless concept?" In: *Graphs and Combinatorics*. Proceedings of the Conference at George Washington University. New York, NY: Springer-Verlag, 1973.

[21] John E. Hopcroft and Richard M. Karp. "An $n^{5/2}$ Algorithm for Maximum Matchings in Bipartite Graphs". In: *SIAM Journal on Computing* 2.4 (1973), pp. 225–231. DOI: 10.1137/0202019.

[22] Peter E. Hart, Nils J. Nilsson, and Bertram Raphael. "A formal basis for the heuristic determination of minimum cost paths". In: *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics* 4.2 (1968), pp. 100–107. DOI: 10.1109/TSSC.1968.300136. This paper introduces the A* search algorithm.

[23] Stanley Milgram. "The small world problem". In: *Psychology Today* 2.1 (1967), pp. 60–67.

[24] Jack Edmonds. "Paths, trees, and flowers". In: *Canadian Journal of Mathematics* 17 (1965), pp. 449–467. DOI: 10.4153/CJM-1965-045-4.

[25] George Pólya. *Mathematics and Plausible Reasoning, Volume 1: Induction and Analogy in Mathematics*. Princeton University Press, 1963. ISBN: 9780691025094.

[26] Robert W. Floyd. "Algorithm 97: Shortest Path". In: *Communications of the ACM* 5.6 (1962), p. 345. DOI: 10.1145/367766.368168.

[27] David Gale and Lloyd S. Shapley. "College admissions and the stability of marriage". In: *The American Mathematical Monthly* 69.1 (1962), pp. 9–14. DOI: 10.2307/2312726.

[28] Peter Z. Ingerman. "Algorithm 141: Path Matrix". In: *Communications of the ACM* 5.11 (1962), p. 556. DOI: 10.1145/368996.369016.

[29] Stephen Warshall. "A theorem on Boolean matrices". In: *Journal of the ACM* 9.1 (1962), pp. 11–12. DOI: 10.1145/321105.321107.

[30] Edsger W. Dijkstra. "A note on two problems in connexion with graphs". In: *Numerische Mathematik* 1 (1959), pp. 269–271. DOI: 10.1007/BF01386390.

[31] Bernard Roy. "Transitivité et connexité". In: *C. R. Acad. Sci. Paris* 249 (1959), pp. 216–218. (In French.) This paper introduced what later became known as the Roy-Warshall algorithm for transitive closure.

[32] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. "Maximal flow through a network". In: *Canadian Journal of Mathematics* 8 (1956), pp. 399–404. DOI: 10.4153/CJM-1956-045-5.

[33] Harold W. Kuhn. "The Hungarian method for the assignment problem". In: *Naval Research Logistics Quarterly* 2.1-2 (1955), pp. 83–97. DOI: 10.1002/nav.3800020109.

[34] M. Fleury. "Deux problèmes de géométrie de situation". In: *Journal de Mathématiques Élémentaires* (1883), pp. 257–261. (In French.) This paper contains Fleury's algorithm for finding Eulerian paths.

[35] Carl Hierholzer and Christian Wiener. "Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren". In: *Mathematische Annalen* 6.1 (1873), pp. 30–32. DOI: 10.1007/BF01442866. (In German.) This paper was published posthumously after Hierholzer's death and edited by Christian Wiener.

[36] Leonhard Euler. "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis". In: *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 8 (1736), pp. 128–140. URL: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/53/. (In Latin.) English translation in Scientific American, 189 (1953), 66–70.