Kiểm tra giữa kỳ

Đề bài

Bài 1.
a. Lập bảng giá trị chân lý của công thức mệnh đề sau:

$$\mathcal{A} = ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

b. Cho hàm đại số logic $f(x_1, x_2, x_3)$ sau:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

Tìm dạng chuẩn tắc tuyển, hội hoàn toàn của $f(x_1, x_2, x_3)$.
Bài 2. Chứng minh rằng mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều có thể phân tích thành tích của các thừa số nguyên tố.
Bài 3.
a. Hãy sử dụng O-lớn để so sánh hai hàm: $n \log n$ và $n^{5/4}$ Chứng minh chi tiết.
b. Sử dụng cây đệ quy để ước lượng $T(n)$ được cho bởi hệ thức sau: $T(n) = 2T(n/2) + \sqrt{n}$.

Đáp án
Bài 1.
a.

A	B	C	$A \to B$	$A \to C$	$B \to C$	$A \to (B \to C)$	$(A \to B) \to (A \to C)$	$\mathcal{A}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1

Bài 1.
b.
Dạng chuẩn tắc tuyển hoàn toàn: $f_T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3})$
Dạng chuẩn tắc hội hoàn toàn: $f_H(x_1, x_2, x_3) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$
Bài 2.
- Ta đặt $P(n) =$ "n phân tích được ra thành tích các thừa số nguyên tố".
- Bước cơ sở, ta có $P(2), P(3)$ đúng
- Bước quy nạp, giả sử $P(i)$ đúng với mọi số nguyên $2 \leq i \leq k$, ta chứng minh $p(k+1)$ đúng.

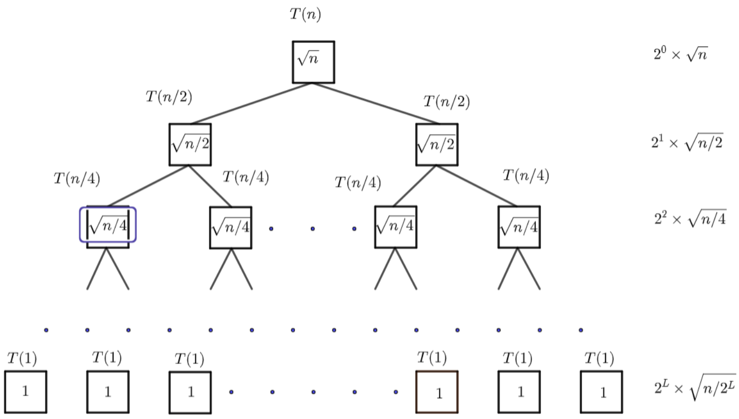
Thật vậy,

Nếu $k+1$ là số nguyên tố, $P(k+1)$ đúng do $k+1$ có thể được biểu diễn dưới dạng tích của một số nguyên tố — chính nó.
Nếu $k+1$ là hợp số, ta có thể biểu diễn $k+1 = ab$ với a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $2 \leq a \leq b < k+1$. Theo giả thiết quy nạp, cả a và b đều có thể được biểu diễn dưới dạng tích của các số nguyên tố, và do đó $k+1$ cũng thế.

Bài 3.

a. Dễ dàng chứng minh được $\lim \frac{n \log n}{n^{5/4}} = \lim \frac{\log n}{n^{1/4}} = 0$
Từ đó suy ra $n \log n = O(n^{5/4})$.

b. Vẽ sơ đồ cây đệ quy



Với $L = \log n$ là chiều cao của cây. Khi đó

$$T(n) = \sum_{i=0}^{L} 2^i \times \sqrt{\frac{n}{2^i}} = \sqrt{n} \sum_{i=0}^{L} 2^{\frac{i}{2}} = \sqrt{n} \frac{\sqrt{2}^{L+1} - 1}{\sqrt{2} - 1} = O(n).$$