

Tên học phần: Toán rời rạc

Mã học phần: MAT3500

Số tín chỉ: 4

Đề số: 01

Dành cho sinh viên lớp học phần: MAT3500 3

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (2 điểm)

- (a) Cho các mệnh đề p, q, r và $F = (p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$. Sử dụng các tương đương logic đã biết, chứng minh $F \equiv r \wedge (p \vee q)$. Nêu luật được dùng ở các bước biến đổi. Khi F đúng, có thể kết luận p đúng hay không? Giải thích.
- (b) Gọi S là một tập sinh viên khác rỗng, B là một tập bài tập khác rỗng, và $R(x, y)$ là vị từ “sinh viên x đã giải bài tập y ”, với $x \in S, y \in B$. Xét hai phát biểu:
- P : Mỗi sinh viên đã giải ít nhất một bài tập.
 - Q : Có một bài tập mà tất cả sinh viên đều đã giải.

Biểu diễn P, Q bằng vị từ và lượng từ. Viết phủ định của P sao cho dấu $\neg$ chỉ đứng ngay trước vị từ R . Phát biểu $P \rightarrow Q$ có đúng hay không? Giải thích bằng chứng minh hoặc phản ví dụ.

Câu 2. (2 điểm)

- (a) Cho các tập hợp A, B, C thỏa mãn $A \cup C = B \cup C$ và $A \cap C = B \cap C$. Chứng minh rằng $A = B$.
- (b) Cho các hàm $g : A \rightarrow B$ và $f : B \rightarrow C$, trong đó A, B, C là các tập khác rỗng. Giả sử $f \circ g$ là đơn ánh. Chứng minh rằng g là đơn ánh. Có thể kết luận f là đơn ánh hay không? Nếu không, hãy cho các tập hữu hạn A, B, C và xác định cụ thể các hàm $g : A \rightarrow B, f : B \rightarrow C$ sao cho $f \circ g$ là đơn ánh nhưng f không là đơn ánh.

Câu 3. (2.5 điểm)

- (a) Tập S các số nguyên không âm được định nghĩa bằng đệ quy: $0 \in S$; nếu $s \in S$ thì $s + 4 \in S$ và $s + 7 \in S$. Không có phần tử nào khác thuộc S ngoài những phần tử thu được bằng các quy tắc này. Dùng quy nạp mạnh để chứng minh rằng mọi số nguyên $n \geq 18$ đều thuộc S . Nêu rõ các trường hợp cơ sở và giả thiết quy nạp.
- (b) Dãy $\{a_n\}_{n \geq 0}$ được xác định bởi $a_0 = 1, a_1 = 4$ và $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ với $n \geq 2$. Tìm công thức tường minh của a_n bằng phương pháp đa thức đặc trưng.

Câu 4. (2 điểm) Cho dãy số nguyên thực sự tăng $a_1, \dots, a_n$, với $n \geq 1$, và số nguyên x . Thuật toán tìm kiếm nhị phân BINARYSEARCH sau tìm chỉ số của x trong dãy, hoặc trả về 0 nếu x không có trong dãy.

```

BINARYSEARCH( $a_1, \dots, a_n, x$ ):
   $i := 1; j := n$ 
  while  $i < j$  do
     $m := \lfloor (i + j) / 2 \rfloor$ 
    if  $x > a_m$  then  $i := m + 1$ 
    else  $j := m$ 
  if  $x = a_i$  then return  $i$ 
  else return 0

```

- (a) Với $(a_1, \dots, a_8) = (2, 5, 8, 12, 16, 23, 38, 41)$ và $x = 19$, vẽ và điền bảng theo mẫu dưới đây, mỗi hàng ứng với một lần thực hiện thân vòng **while**. Ở mỗi hàng, ghi i, j ở đầu lần lặp và giá trị m vừa tính, trước khi cập nhật i hoặc j . Thêm hàng cho đến khi vòng lặp dừng.

Lần lặp	i	j	m
1			
2			
$\vdots$			

Khi vòng lặp dừng: $i = \dots, j = \dots$; kết quả trả về:

- (b) Phát biểu một bất biến vòng lặp và dùng nó để chứng minh tính đúng đắn của thuật toán. Giải thích vì sao vòng lặp luôn kết thúc.
- (c) Chỉ đếm các phép so sánh giữa x và một phần tử của dãy, kể cả phép so sánh sau vòng lặp. Với $n \geq 2$, chứng minh số phép so sánh không vượt quá $\lceil \log_2 n \rceil + 1$. Xác định độ phức tạp theo thời gian trong trường hợp xấu nhất theo ký hiệu O -lớn, giả sử mỗi phép toán cơ bản chạy trong thời gian $O(1)$.

Câu 5. (1.5 điểm) Xét thuật toán sắp xếp nổi bọt BUBBLESORT sau cho dãy số thực $a_1, \dots, a_n$, với $n \geq 2$.

```

BUBBLESORT( $a_1, \dots, a_n$ ):
  for  $i := 1$  to  $n - 1$  do
    for  $j := 1$  to  $n - i$  do
      if  $a_j > a_{j+1}$  then
        Hoán đổi  $a_j$  và  $a_{j+1}$ 

```

- (a) Với dãy ban đầu $(6, 1, 4, 2, 5)$, viết lại toàn bộ dãy sau mỗi lần thực hiện vòng **for** ngoài.
- (b) Tính chính xác số lần thực hiện phép so sánh $a_j > a_{j+1}$ theo n . Dùng kết quả đó để xác định độ phức tạp theo thời gian trong trường hợp xấu nhất theo ký hiệu O -lớn. Giả sử mỗi phép toán cơ bản chạy trong thời gian $O(1)$.

Đề thi gồm 2 trang. Không sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
ĐỀ THI GIỮA KỲ, HỌC KỲ I, NĂM HỌC 2026–2027

Tên học phần: Toán rời rạc

Mã học phần: **MAT3500**

Số tín chỉ: **4**

Đề số: **01**

Dành cho sinh viên lớp học phần: MAT3500 3

Chấp nhận cách giải khác nếu lập luận đúng và đáp ứng yêu cầu của từng ý.

Lời giải 1.

[2 điểm]

(a) Khử các phép kéo theo: $F \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$. Theo luật phân phối, $(\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$. Theo luật De Morgan, $\neg p \wedge \neg q \equiv \neg(p \vee q)$.	0.5
Tiếp tục dùng luật phân phối: $F \equiv ((p \vee q) \wedge \neg(p \vee q)) \vee ((p \vee q) \wedge r)$. Luật phủ định và luật đồng nhất cho $F \equiv (p \vee q) \wedge r \equiv r \wedge (p \vee q)$, với bước cuối dùng luật giao hoán.	0.25
Không thể kết luận p đúng. Chẳng hạn, $p = F, q = T, r = T$ làm F đúng.	0.25
(b) Hai phát biểu có dạng $P: \forall x \in S \exists y \in BR(x, y)$ và $Q: \exists y \in B \forall x \in SR(x, y)$.	0.5
Áp dụng luật De Morgan cho lượng từ, $\neg P \equiv \exists x \in S \forall y \in B \neg R(x, y)$. Nghĩa là có một sinh viên chưa giải bài tập nào trong B .	0.25
Phát biểu $P \rightarrow Q$ không luôn đúng. Một phản ví dụ là $S = \{s_1, s_2\}, B = \{b_1, b_2\}$, trong đó chỉ có $R(s_1, b_1)$ và $R(s_2, b_2)$ đúng. Trong ví dụ này, P đúng và Q sai, nên $P \rightarrow Q$ sai.	0.25

Lời giải 2.

[2 điểm]

(a) Theo định nghĩa tập hợp bằng nhau, ta chứng minh hai bao hàm. Với $x \in A$, nếu $x \in C$ thì $x \in A \cap C = B \cap C$, nên $x \in B$. Nếu $x \notin C$ thì $x \in A \cup C = B \cup C$ và $x \notin C$, nên $x \in B$. Vậy $A \subseteq B$.	0.5
Với $x \in B$, nếu $x \in C$ thì $x \in B \cap C = A \cap C$, nên $x \in A$. Nếu $x \notin C$ thì $x \in B \cup C = A \cup C$ và $x \notin C$, nên $x \in A$. Vậy $B \subseteq A$, suy ra $A = B$.	0.5
(b) Ta dùng định nghĩa đơn ánh. Với $a_1, a_2 \in A$, giả sử $g(a_1) = g(a_2)$. Khi đó $f(g(a_1)) = f(g(a_2))$. Do $f \circ g$ đơn ánh, $a_1 = a_2$. Vậy g đơn ánh.	0.5
Không thể kết luận f đơn ánh. Chẳng hạn, $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{0, 1\}; g(1) = 1, g(2) = 2; f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 0$. Hàm $f \circ g$ đưa 1 tới 0 và 2 tới 1, nên đơn ánh. Tuy nhiên, $f(1) = f(3)$ với $1 \neq 3$, nên f không đơn ánh.	0.5

Lời giải 3.

[2.5 điểm]

(a) Ta dùng quy nạp mạnh với bốn trường hợp cơ sở. Từ 0, cộng lần lượt các số 4 hoặc 7 cho thấy $18 = 7 + 7 + 4, 19 = 7 + 4 + 4 + 4, 20 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4, 21 = 7 + 7 + 7$ đều thuộc S .	0.5
Giả sử $k \geq 21$ và mọi số nguyên m thỏa mãn $18 \leq m \leq k$ đều thuộc S . Ta chứng minh $k + 1 \in S$. Vì $18 \leq k - 3 \leq k$, giả thiết quy nạp cho $k - 3 \in S$. Theo quy tắc đệ quy, $(k - 3) + 4 = k + 1 \in S$. Do đó, mọi số nguyên $n \geq 18$ đều thuộc S .	0.75
(b) Đa thức đặc trưng là $r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2$. Nghiệm đặc trưng 2 có bội 2; theo công thức nghiệm tổng quát, ta có $a_n = (\alpha + \beta n)2^n$.	0.5
Từ $a_0 = 1$, ta có $\alpha = 1$. Từ $a_1 = 4$, ta có $2(\alpha + \beta) = 4$, suy ra $\beta = 1$.	0.5
Vậy $a_n = (n + 1)2^n$ với mọi $n \geq 0$.	0.25

Lời giải 4.

[2 điểm]

(a) Bảng truy vết:	0.5																
<table><tr><th>Lần lặp</th><th>i</th><th>j</th><th>m</th></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>8</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>5</td><td>8</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td></tr></table>	Lần lặp	i	j	m	1	1	8	4	2	5	8	6	3	5	6	5	
Lần lặp	i	j	m														
1	1	8	4														
2	5	8	6														
3	5	6	5														
Vòng lặp dừng với $i = j = 6$. Do $a_6 = 23 \neq 19$, thuật toán trả về 0.																	
(b) Gọi L là phát biểu: “Hai chỉ số i và j thỏa mãn $1 \leq i \leq j \leq n$, và x là một phần tử của dãy $a_1, \dots, a_n$ khi và chỉ khi x là một phần tử của dãy con $a_i, \dots, a_j$.” Ta chứng minh L là một bất biến của vòng while .	0.25																
Khởi động: Trước lần lặp đầu tiên, $i = 1$ và $j = n$. Vì $n \geq 1$, hai chỉ số hợp lệ; dãy con $a_i, \dots, a_j$ chính là dãy ban đầu. Do đó, L đúng trước lần lặp đầu tiên.																	
Duy trì: Giả sử L đúng trước một lần lặp có $i < j$. Gọi i', j' là các giá trị của hai chỉ số sau lần lặp này. Với $m = \lfloor (i + j)/2 \rfloor$, ta có $i \leq m < j$, nên cả hai cách cập nhật đều cho $1 \leq i' \leq j' \leq n$.	0.5																
- Nếu $x > a_m$, mọi phần tử của dãy $a_i, \dots, a_m$ đều nhỏ hơn x vì dãy thực sự tăng. Cập nhật $i' = m + 1$, $j' = j$ loại bỏ đúng các phần tử này khỏi khoảng tìm kiếm. - Nếu $x \leq a_m$, mọi phần tử của dãy $a_{m+1}, \dots, a_j$ đều lớn hơn x vì dãy thực sự tăng. Cập nhật $i' = i$, $j' = m$ loại bỏ đúng các phần tử này khỏi khoảng tìm kiếm.																	
Trong cả hai nhánh, các phần tử bị loại đều khác x . Vì vậy, x là một phần tử của dãy con cũ khi và chỉ khi x là một phần tử của dãy con mới. Kết hợp với giả thiết L và $1 \leq i' \leq j' \leq n$, suy ra L đúng sau lần lặp này, trước lần kiểm tra điều kiện tiếp theo.																	
Dừng: Khi vòng lặp dừng, điều kiện $i < j$ sai. Kết hợp với $i \leq j$ trong L , ta có $i = j$. Khi đó, L cho biết x là một phần tử của dãy ban đầu khi và chỉ khi $x = a_i$. Do đó, nếu $x = a_i$ thì thuật toán trả về i , đúng vị trí cần tìm. Nếu $x \neq a_i$ thì x không là phần tử của dãy ban đầu, nên trả về 0 là đúng.	0.25																
Vòng lặp luôn kết thúc: Vì $i \leq m < j$, mỗi cách cập nhật đều làm độ dài $j - i + 1$ giảm ít nhất 1 và vẫn dương. Một số nguyên dương không thể giảm mãi, nên vòng lặp phải dừng.																	
(c) Mỗi lần lặp của vòng while có đúng một phép so sánh cần đếm: $x > a_m$. Nhánh else không thực hiện thêm phép so sánh. Phép kiểm tra $i < j$ chỉ so sánh các chỉ số nên không được tính theo yêu cầu của đề. Sau vòng lặp, phép so sánh $x = a_i$ được thực hiện đúng một lần. Vì vậy, nếu vòng lặp thực hiện t lần lặp thì số phép so sánh cần đếm là $t + 1$.	0.25																
Ta chặn số lần lặp bằng cách xét số phần tử còn lại trong khoảng tìm kiếm. Nếu khoảng $[i, j]$ có $s = j - i + 1$ phần tử, thì sau cập nhật $i := m + 1$ còn $j - m = \lfloor s/2 \rfloor$ phần tử, còn sau cập nhật $j := m$ thì còn $m - i + 1 = \lceil s/2 \rceil$ phần tử. Do đó, mỗi lần lặp để lại nhiều nhất $\lceil s/2 \rceil$ phần tử.	0.25																
Gọi $k = \lceil \log_2 n \rceil$; khi đó $n \leq 2^k$. Từ một khoảng có nhiều nhất 2^r phần tử, với số nguyên $r \geq 1$, sau một lần lặp còn nhiều nhất $\lceil 2^r/2 \rceil = 2^{r-1}$ phần tử. Lặp lại lập luận này, số phần tử lần lượt bị chặn bởi $2^k, 2^{k-1}, \dots, 2^0 = 1$. Sau nhiều nhất k lần lặp, ta có $i = j$, nên vòng lặp dừng. Vậy $t \leq k$ và số phép so sánh là $t + 1 \leq k + 1 = \lceil \log_2 n \rceil + 1$.																	
Ta đánh giá thời gian bằng phương pháp đếm số phép toán cơ bản. Mỗi lần lặp chỉ gồm một số hằng phép toán cơ bản, kể cả kiểm tra điều kiện lặp. Theo giả thiết của đề, mỗi phép toán cơ bản chạy trong thời gian $O(1)$, nên mỗi lần lặp chạy trong thời gian $O(1)$. Phần khởi tạo và kết thúc cũng chỉ gồm một số hằng phép toán, nên có thời gian $O(1)$. Vì vòng lặp thực hiện không quá k lần, tổng thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất là $O(k + 1) = O(\log n)$.																	

Lời giải 5.**[1.5 điểm]**

(a) Sau mỗi lần lặp ngoài:		0.5
i	Dãy	
1	(1, 4, 2, 5, 6)	
2	(1, 2, 4, 5, 6)	
3	(1, 2, 4, 5, 6)	
4	(1, 2, 4, 5, 6)	
(b) Ở lần lặp ngoài thứ i , vòng trong có $n - i$ lần so sánh. Tổng số so sánh là $\sum_{i=1}^{n-1} (n - i) = \sum_{k=1}^{n-1} k = n(n - 1)/2$.		0.5
Mỗi lần lặp của vòng trong thực hiện một phép so sánh, nhiều nhất một phép hoán đổi và một số hằng phép toán điều khiển. Theo giả thiết mỗi phép toán cơ bản chạy trong thời gian $O(1)$, mỗi lần lặp này chạy trong thời gian $O(1)$. Ngoài các lần lặp của vòng trong, mỗi lần lặp của vòng ngoài chỉ cần một số hằng phép toán khởi tạo và điều khiển. Có $n - 1$ lần lặp của vòng ngoài, nên phần này tốn tổng cộng $O(n)$ thời gian. Từ số lần lặp của vòng trong vừa tính, thời gian chạy trong trường hợp xấu nhất là $O(n(n - 1)/2 + n) = O(n^2)$.		0.5