Toán rời rạc	GV: Phan Thị Hà Dương (lý thuyết)
Quy tắc đếm, Chỉnh hợp, Tổ hợp	
10/09/2018	GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Bài 1

Một xâu $x_1x_2 \ldots x_n$ trong đó $x_i \in \{0, 1\}$ được gọi là một *xâu nhị phân có độ dài* n. Có bao nhiêu xâu nhị phân

(a) có độ dài 10 và bắt đầu với 000?

(b) có độ dài 10 và kết thúc với 00?

(c) có độ dài 10 và có chứa 00000?

(d) có độ dài 10 và bắt đầu với 000 hoặc kết thúc với 00?

(e) có độ dài 10 và có chứa 00000 hoặc 11111?

(f) có độ dài 8 và có chứa 000 hoặc 1111?

Bài 2

Gọi A là tập các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 100. Có bao nhiêu dãy 4 số hạng của A chứa ba số nguyên $k, k+1, k+2$ theo đúng thứ tự như trên và

(a) chúng không nhất thiết phải đứng liên tiếp nhau trong dãy? (Ví dụ, dãy $1, 2, 6, 3$ thỏa mãn điều kiện đề ra, do 1, 2, và 3 xuất hiện trong dãy theo đúng thứ tự, tuy rằng chúng bị "tách ra" bởi 6.)

(b) chúng phải đứng liên tiếp nhau trong dãy?

Bài 3

Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra trong một trận đua gồm

(a) 3 con ngựa

(b) 4 con ngựa

nếu

(i) không xảy ra việc đồng thứ tự?

(ii) có thể xảy ra việc đồng thứ tự?

Bài 4

Có 6 tuyển thủ trong một cuộc thi chạy 100m. Có tất cả bao nhiêu cách trao huy chương (vàng, bạc, đồng) nếu chấp nhận việc đồng thứ hạng? (Tuyển thủ hoàn thành chặng đường với thời gian ngắn nhất được trao huy chương vàng, tuyển thủ hoàn thành chặng đường chỉ sau đúng một tuyển thủ khác được trao huy chương bạc, và tuyển thủ hoàn thành chặng đường chỉ sau đúng hai tuyển thủ khác được trao huy chương đồng.)

Bài 5

(a) Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$C_{2n}^{n+1} + C_{2n}^{n} = \frac{C_{2n+2}^{n+1}}{2}. \tag{1}$$

(b) Cho các số nguyên n và k với $1 \leq k \leq n$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k C_n^{k-1} = \frac{C_{2n+2}^{n+1}}{2} - C_{2n}^{n}. \tag{2}$$

(c) Cho các số nguyên n và k. Chứng minh rằng

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \cdots + C_{n+k}^k = C_{n+k+1}^k. \tag{3}$$

(d) Cho các số nguyên n và k với $1 \leq k \leq n$. Chứng minh rằng

$$C_k^k + C_{k+1}^k + C_{k+2}^k + \cdots + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}. \tag{4}$$

(e) Tìm số nguyên dương n sao cho

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \cdots + 2^n C_n^n = 243. \tag{5}$$

Bài 6

Chứng minh rằng

$$C_n^r C_r^k = C_n^k C_{n-k}^{r-k}, \tag{6}$$

trong đó n, r và k là các số nguyên không âm thỏa mãn $r \leq n$ và $k \leq r$, bằng cách

(a) sử dụng lý thuyết tổ hợp.

(b) sử dụng công thức tính số tổ hợp chập r của tập có n phần tử.

Bài 7

Sử dụng các công cụ tổ hợp, chứng minh rằng

(a)

$$C_{2n}^2 = 2C_n^2 + n^2. \tag{7}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}. \tag{8}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{n} k(C_n^k)^2 = nC_{2n-1}^{n-1}. \tag{9}$$

(d)

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k = n(n+1)2^{n-2}. \tag{10}$$

Bài 8

Chứng minh

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \tag{11}$$

bằng phương pháp quy nạp.

Bài 9

Số Fibonacci F_n $(n \in \{0, 1, 2, \dots\})$ được định nghĩa như sau: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Giả sử $C_n^k = 0$ nếu $k < 0$ hoặc $k > n$. Chứng minh rằng

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{k}. \tag{12}$$

Bài 10

Tìm công thức tính hệ số của x^k trong khai triển của

(a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{100}$;

(b) $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{100}$;

trong đó k là số nguyên.