Toán rời rạc	GV: Phan Thị Hà Dương (lý thuyết)

Nguyên lý chuồng chim bồ câu và nguyên lý bù trừ tổng quát

24/09/2018	GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Bài 1

(a) Chứng minh rằng nếu chọn ra năm số từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ thì tồn tại một cặp số nguyên lấy từ năm số được chọn có tổng bằng 9.

(b) Kết luận ở phần (a) có đúng hay không nếu thay vì năm số ta chỉ chọn bốn số?

(c) Cần phải chọn bao nhiêu số từ tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ để chắc chắn rằng có một cặp từ các số được chọn có tổng bằng 7?

Bài 2

Giả sử một lớp toán rời rạc có 9 sinh viên. Chứng minh rằng

(a) lớp có ít nhất năm bạn nam hoặc ít nhất năm bạn nữ;

(b) lớp có ít nhất ba bạn nam hoặc ít nhất bảy bạn nữ.

Bài 3

(a) Cần chọn ra bao nhiêu cặp số nguyên (a, b) để chắc chắn rằng có hai cặp (a_1, b_1) và (a_2, b_2) thỏa mãn $a_1 \mod 5 = a_2 \mod 5$ và $b_1 \mod 5 = b_2 \mod 5$?

(b) Giả sử (x_i, y_i) $(i \in \{1, 2, 3, 4, 5\})$ là năm điểm trên mặt phẳng với tọa độ nguyên. Chứng minh rằng có ít nhất một đoạn thẳng nối hai trong năm điểm này thỏa mãn điều kiện trung điểm của đoạn thẳng đó có tọa độ nguyên.

Bài 4

Tìm một dãy gồm 16 số nguyên X sao cho không có dãy con tăng dần hoặc giảm dần nào của X có 5 phần tử.

Bài 5

Số Ramsey $R(m, n)$, với m, n là các số nguyên dương lớn hơn hoặc bằng 2, là số người nhỏ nhất trong một buổi gặp mặt thỏa mãn điều kiện có m người là bạn của nhau[1] hoặc n người là kẻ thù của nhau[2], giả thiết rằng hai người bất kỳ trong buổi gặp mặt hoặc là bạn hoặc là kẻ thù của nhau. Chứng minh rằng

(a) $R(3, 3) = 6$.

(b) Nếu n là một số nguyên thỏa mãn $n \geq 2$ thì $R(2, n) = n$.

Bài 6

Chứng minh rằng nếu có 25 bạn nam và 25 bạn nữ ngồi xung quanh một bàn tròn thì với mọi cách xếp chỗ ta luôn tìm được một người ngồi giữa hai bạn nam.

Bài 7

Trong tập $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ có bao nhiêu số không chia hết cho bất kỳ số nào trong các số $2, 3, 4, 5, 6, 7$?

Bài 8

Có bao nhiêu cách xếp 4 cặp vợ chồng quanh một bàn tròn thỏa mãn

(a) không có thêm điều kiện gì?

(b) nam và nữ ngồi xen kẽ nhau?

(c) không có cặp vợ chồng nào ngồi cạnh nhau?

Bài 9

Chứng minh rằng trong một phòng họp bao giờ cũng tìm được hai người có số người quen trong số những người dự họp là bằng nhau.

[1] Tức là, hai người bất kỳ trong m người là bạn của nhau.
[2] Tức là, hai người bất kỳ trong n người là kẻ thù của nhau.