Toán rời rạc	GV: Nguyễn Hoàng Thạch (lý thuyết)
	Lý thuyết đồ thị
22/10/2018	GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Bài 1. Sử dụng đồ thị đầy đủ và các phương pháp đếm để chứng minh các đẳng thức sau:

(a) $C_n^2 = C_k^2 + k(n-k) + C_{n-k}^2$ với $0 \le k \le n$.

(b) Nếu $\sum n_i = n$ thì $\sum C_{n_i}^2 \le C_n^2$.

Bài 2. Chứng minh hoặc tìm phản ví dụ cho các mệnh đề sau:

(a) Trong một đồ thị đơn G có ít nhất hai đỉnh luôn tìm được hai đỉnh có cùng bậc.

(b) Trong một đồ thị không chứa khuyên G có ít nhất hai đỉnh luôn tìm được hai đỉnh có cùng bậc.

(c) Trong một đồ thị có hướng G có ít nhất hai đỉnh, luôn tìm được hai đỉnh có cùng bậc ra hoặc là hai đỉnh có cùng bậc vào.

Bài 3. Đồ thị Q_n là một đồ thị đơn với tập đỉnh là các chuỗi nhị phân độ dài n và hai đỉnh kề nhau khi và chỉ khi hai chuỗi nhị phân tương ứng khác nhau ở đúng một vị trí. Tìm số cạnh của Q_n theo n.

Bài 4. Chứng minh rằng dãy các số tự nhiên $d_1, d_2, \ldots, d_n$ là bậc của các đỉnh của một đồ thị nào đó khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^n d_i$ là chẵn.

Chứng mỉnh rằng dãy các cặp số tự nhiên $(d_1^+, d_1^-), (d_2^+, d_2^-), \ldots, (d_n^+, d_n^-)$ là bậc ra và bậc vào của các đỉnh của một đồ thị có hướng nào đó khi và chỉ khi $\sum d_i^+ = \sum d_i^-$.

Bài 5. Một dãy các số tự nhiên không tăng $d_1, d_2, \ldots, d_n$ được gọi là một *dãy đồ thị* nếu tồn tại một đồ thị đơn gồm n đỉnh và bậc của các đỉnh là các số hạng của dãy. Chứng minh rằng nếu $d_1, d_2, \ldots, d_n$ là một dãy đồ thị thì tồn tại một đồ thị với n đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sao cho $\forall i, \deg(v_i) = d_i$ và v_1 kề với $v_2, \ldots, v_{d_1+1}$.

Bài 6. Chứng minh rằng dãy các số tự nhiên không tăng $d_1, d_2, \ldots, d_n$ là một dãy đồ thị khi và chỉ khi dãy $d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$, sau khi sắp xếp lại theo thứ tự từ lớn đến bé, cũng là một dãy đồ thị.

Bài 7. Mô tả một thuật toán kiểm tra xem một đồ thị đơn có phải là đồ thị hai phía hay không dựa trên mệnh đề sau: một đồ thị là đồ thị hai phía khi và chỉ khi tồn tại một cách tô màu các đỉnh của đồ thị bằng hai màu sao cho hai đỉnh kề nhau luôn có màu khác nhau.

Bài 8. Một đồ thị vô hướng được gọi là *chính quy* nếu tất cả các đỉnh của nó có cùng số bậc. Một đồ thị n-*chính quy* là một đồ thị mà tất cả các đỉnh đều có bậc n.

Giả sử đồ thị đơn hai phía $G = (V_1, V_2, E)$ là đồ thị chính quy. Chứng minh rằng $|V_1| = |V_2|$.

Bài 9. *Đồ thị Petersen* là một đồ thị đơn có các đỉnh là v_{xy} với $\{x, y\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$; và hai đỉnh v_{xy} và $v_{x'y'}$ kề nhau khi và chỉ khi $\{x, y\} \cap \{x', y'\} = \emptyset$.

(a) Hãy vẽ đồ thị Petersen mô tả ở trên và chứng minh rằng với hai đỉnh bất kỳ không kề nhau trong đồ thị, có chính xác một đỉnh của đồ thị kề với cả hai đỉnh này.

(b) Đồ thị Petersen có phải là đồ thị hai phía hay không?

Bài 10. Cho một đồ thị hai phía $G = (V_1, V_2, E)$. Với mỗi $A \subset V$, định nghĩa *độ khuyết thiếu* của A như sau:

$$\operatorname{def}(A) = |A| - |N(A)| \tag{1}$$

Chứng minh rằng số đỉnh tối đa của V_1 trong một cách ghép cặp trên G là $|V_1| - \max_{A \subset V_1} \operatorname{def}(A)$.