

Các quy tắc đếm cơ bản

Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp

Nguyễn Hoàng Thạch
nhthach@math.ac.vn

Bài 1. Khoa Toán in áo phong cho ngày kỷ niệm thành lập khoa. Áo có ba màu xanh, vàng và trắng, và có các cỡ Lớn, Vừa, Nhỏ và Trẻ em. Khoa dự định in 25 chiếc mỗi màu cho cỡ Vừa và cỡ Nhỏ, 15 chiếc mỗi màu cho cỡ Lớn và cỡ Trẻ em. Hỏi có tất cả bao nhiêu chiếc áo được in?

Bài 2. Một từ nhị phân độ dài n là một từ được tạo bởi n ký tự 0 hoặc 1. Chẳng hạn 001 là một từ nhị phân có độ dài 3.

- Có bao nhiêu từ nhị phân có độ dài 8?
- Có bao nhiêu từ nhị phân có độ dài 8 và được bắt đầu *và* kết thúc bởi 1?
- Có bao nhiêu từ nhị phân có độ dài không quá 6?
- Có bao nhiêu từ nhị phân có độ dài 8 và được bắt đầu *hoặc* kết thúc bởi 1?
- Có bao nhiêu từ nhị phân có độ dài 8 và chứa 4 ký tự 0?
- Có bao nhiêu từ nhị phân có độ dài 8 và chứa 4 ký tự 0 liên tiếp?
- Có bao nhiêu từ nhị phân có độ dài 8 và chứa 4 ký tự giống nhau liên tiếp?
- Có bao nhiêu từ nhị phân có độ dài 8 và chứa 4 ký tự 0 liên tiếp hoặc 3 ký tự 1 liên tiếp?

Bài 3. Có bao nhiêu số có 3 chữ số chia hết cho:

- 4?
- 6?
- 4 hoặc 6?

Bài 4. Có bao nhiêu số có 5 chữ số mà:

- a) Các chữ số đôi một khác nhau?
- b) Các chữ số đôi một khác nhau và có ít nhất một chữ số lẻ?
- c) Các chữ số đôi một khác nhau và có ít nhất một chữ số chẵn?

Bài 5. Có bao nhiêu cách chọn ra 4 người từ một nhóm 10 người và xếp họ ngồi quanh một cái bàn tròn (hai cách xếp được coi là giống nhau nếu mỗi người có cùng hai người ngồi cạnh, không phân biệt trái phải, trong hai cách xếp)?

Bài 6. Có bao nhiêu cách xếp 5 bạn A, B, C, D, E thành một hàng ngang sao cho A đứng cạnh B?

Bài 7. Người chụp ảnh ở đám cưới muốn chọn ra 6 trong 10 người (trong đó có cô dâu và chú rể) và sắp thành hàng để chụp ảnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách sắp xếp nếu:

- a) Cô dâu phải có mặt trong ảnh?
- b) Cả cô dâu và chú rể cùng phải có mặt trong ảnh?
- c) Cô dâu hoặc chú rể phải có mặt trong ảnh?

Bài 8. Liệt kê các hoán vị của $S = \{1, 2, 3\}$.

Bài 9. Liệt kê các chỉnh hợp của $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Bài 10. Có bao nhiêu cách xếp 8 bạn nữ và 6 bạn nam thành một hàng sao cho không có hai bạn nam nào đứng cạnh nhau?

Bài 11. Có bao nhiêu chỉnh hợp chập 4 của các số nguyên dương từ 1 đến 100 có chứa 3 số liên tiếp theo thứ tự tăng dần và sao cho:

- a) có thể có các số nguyên khác chen vào giữa ba số đó (chẳng hạn (2, 5, 6, 7) và (5, 2, 6, 7) đều được)?
- b) ba số đó phải đứng liền nhau (chẳng hạn (2, 5, 6, 7) được nhưng (5, 2, 6, 7) không được)?

Bài 12. Có bao nhiêu từ nhị phân gồm 8 chữ số 0 và 10 chữ số 1 sao cho mỗi chữ số 0 luôn đứng trước một chữ số 1?

Bài 13. Có bao nhiêu từ nhị phân gồm 5 chữ số 0 và 15 chữ số 1 sao cho mỗi chữ số 0 luôn đứng trước hai chữ số 1?

Bài 14. Cho một hình chữ nhật cạnh $m \times n$ (m, n là các số nguyên dương). Có bao nhiêu đường đi từ đỉnh ở góc Tây Nam đến đỉnh ở -góc Đông Bắc của hình chữ nhật chỉ gồm các bước đơn vị về phía Bắc hoặc phía Đông?

Bài 15. Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên dương? Bao nhiêu nghiệm nguyên không âm? Bao nhiêu nghiệm nguyên không âm sao cho $x_1 \leq 5$:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21 ?$$

Bài 16. Có bao nhiêu số nguyên dương bé hơn 1000000 có tổng các chữ số bằng 19?

Bài 17. Tìm hệ số của x^k trong khai triển của

1. $(x + \frac{1}{x})^{100}$;

2. $(x^2 - \frac{1}{x})^{100}$

Bài 18. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n , ta có:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \dots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n}$$

Từ đó suy ra $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \geq \frac{2^n}{n}$ và $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$.

Bài 19. Chứng minh rằng với mọi n, k nguyên dương và $1 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$.

Bài 20. Chứng minh các đẳng thức sau (bằng cách đếm hai lần nếu có thể):

a) $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}, 1 \leq k \leq n$

b) $\binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k}, 0 \leq k \leq r \leq n$

c) $\binom{n+1}{k} = (n+1) \binom{n}{k-1} / k, 1 \leq k \leq n+1$

d) $\binom{2n}{n+1} + \binom{2n}{n} = \binom{2n+2}{n+1} / 2$

e) $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} = \binom{2n+2}{n+1} / 2 - \binom{2n}{n}, 1 \leq k \leq n$

f) $\sum_{k=0}^r \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$

g) $\binom{2n}{2} = 2 \binom{n}{2} + n^2$

h) $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$

i) $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$