

Hoán vị và tổ hợp mở rộng

Nguyễn Hoàng Thạch
nhthach@math.ac.vn

Bài 1. Một cửa hàng kem có 12 vị kem khác nhau. Mỗi ngày bạn đều đến ăn kem và luôn ăn một ly kem hai viên, giá 20000 đồng. Bạn muốn mỗi ngày đều thử một cách kết hợp mình chưa từng ăn. Hỏi bạn sẽ tiêu hết bao nhiêu tiền kem khi đã thử hết tất cả các lựa chọn?

Bài 2. Có bao nhiêu kết quả có thể thu được khi gieo 4 viên xúc sắc (6 mặt) nếu tính thứ tự xuất hiện của các mặt? Có bao nhiêu khả năng nếu thứ tự xuất hiện của các mặt là không quan trọng?

Bài 3. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ có bao nhiêu nghiệm thỏa mãn:

- a) Các số x_i là các số nguyên không âm?
- b) Các số x_i là các số nguyên dương?
- c) Các số x_i là các số nguyên không bé hơn 2?
- d) Các số x_i là các số nguyên không âm và $2 \leq x_1 \leq 5$?

Bài 4. Có bao nhiêu “từ” khác nhau có thể được tạo thành bằng cách hoán vị các ký tự của từ “MATHEMATICS”?

Bài 5. Có bao nhiêu cách xếp 5 cặp sinh đôi giống hệt nhau quanh một bàn tròn?

Bài 6. Có bao nhiêu số nguyên dương bé hơn 1000000 và có tổng các chữ số bằng 19?

Bài 7. Có bao nhiêu cách chọn ra một bộ không sắp thứ tự gồm n vật thuộc vào r loại sao cho có ít nhất q_1 vật thuộc loại thứ nhất, q_2 vật thuộc loại thứ hai, \dots , q_r vật thuộc loại thứ r ?

Bài 8. Có bao nhiêu cách xếp 40 số đầu của Tọa độ Pi vào 4 hộp, mỗi hộp 10 số, nếu:

- a) Các hộp giống hệt nhau?
- b) Các hộp được dán nhãn khác nhau?

Bài 9. Chứng minh các quan hệ sau, ở đó $S(n, k)$ là số cách phân hoạch một tập hợp có lực lượng n thành k tập hợp khác rỗng:

a)
$$S(n+1, k+1) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} S(j, k)$$

b)
$$S(n+1, k+1) = \sum_{j=k}^n (k+1)^{n-j} S(j, k)$$