

## Lý thuyết đồ thị (tiếp)

**Bài 1.** Hãy chỉ ra lỗi sai trong chứng minh sau:

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng *mọi cây gồm  $n$  đỉnh đều chứa một đường đi độ dài  $n - 1$* . Trước hết, mệnh đề trên đúng với  $n = 1$ , vì mọi cây có 1 đỉnh hiển nhiên có chứa một đường đi có độ dài bằng 0. Giả sử mệnh đề đúng với mọi cây có nhiều nhất  $n$  đỉnh. Gọi  $T$  là một cây gồm  $n$  đỉnh chứa một đường đi độ dài  $n - 1$  với đỉnh  $u$  là một đỉnh đầu mút của đường đi đó. Gọi  $T'$  là cây thu được từ  $T$  bằng cách thêm một đỉnh  $v$  và một cạnh từ  $u$  đến  $v$ . Rõ ràng,  $T'$  là một cây có  $n + 1$  đỉnh và có chứa một đường đi độ dài  $(n - 1) + 1 = n$ . Như vậy, mệnh đề đã cho đúng với cây có  $n + 1$  đỉnh, suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 2.** Giả sử  $T = (V, E)$  là một cây gồm  $n$  đỉnh.

- Chứng minh  $T$  là một đồ thị hai phía.
- Gọi  $X, Y$  là hai phía của  $T$ , tức là  $X \cup Y = V$  và các đỉnh thuộc  $X$  (hoặc  $Y$ ) đôi một không kề nhau. Giả sử  $|X| \geq |Y|$ . Chứng minh rằng  $X$  có ít nhất một đỉnh bậc 1.

**Bài 3.** Gọi  $T$  là một cây gồm  $n$  đỉnh ( $n \geq 2$ ). Chứng minh rằng  $T$  có ít nhất hai đỉnh bậc 1 bằng cách:

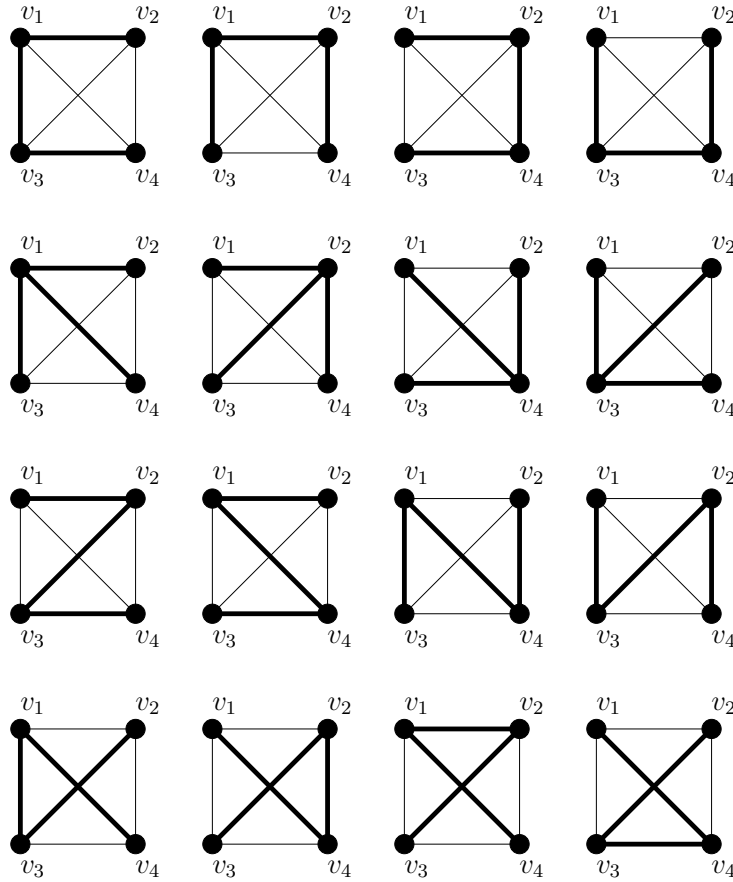
- Sử dụng phương pháp quy nạp theo  $n$ .
- Xét đường đi dài nhất trong  $T$ .
- Sử dụng định lý bắt tay (Handshaking Theorem) và giả sử phản chứng rằng  $T$  có 0 hoặc 1 đỉnh bậc 1.

**Bài 4.** Gọi  $T = (V, E)$  là một cây và  $\Delta(T) = \max_{v \in V} \deg(v)$ . Chứng minh rằng  $T$  có ít nhất  $\Delta(T)$  đỉnh bậc 1.

**Bài 5.** Cho  $d_1, d_2, \dots, d_n$  là một dãy các số nguyên dương thỏa mãn  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 1$  và  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ , với  $n \geq 2$ . Liệu có tồn tại hay không một cây  $T$  gồm  $n$  đỉnh  $v_1, v_2, \dots, v_n$  thỏa mãn điều kiện  $\deg(v_i) = d_i$ ? Nếu có, hãy chỉ ra cách xây dựng một cây như thế. Nếu không, hãy giải thích lý do tại sao?

**Bài 6.** Gọi  $T$  là một cây gồm  $n$  đỉnh ( $n > 1$ ). Chứng minh rằng số đỉnh bậc 1 của  $T$  là  $2 + \sum_{\deg(v) \geq 3} (\deg(v) - 2)$ , trong đó tổng lấy trên tất cả các đỉnh  $v$  có bậc lớn hơn hoặc bằng 3.

**Bài 7.** Một *cây bao trùm* của một đồ thị  $G$  gồm  $n$  đỉnh là một đồ thị con  $T$  của  $G$  thỏa mãn:  $T$  là một cây, và  $T$  chứa tất cả các đỉnh của  $G$ . Biết rằng đồ thị đầy đủ  $K_n$  có tất cả  $n^{n-2}$  cây bao trùm được gán nhãn khác nhau.



Hình 1:  $K_4$  có  $4^{4-2} = 16$  cây bao trùm được gán nhãn khác nhau. Các cây bao trùm được đánh dấu bằng các cạnh tô đậm.

Gọi  $e$  là một cạnh của đồ thị  $K_n$ . Chứng minh rằng đồ thị  $K_n - e$  thu được từ  $K_n$  bằng cách bỏ đi  $e$  có  $(n - 2)n^{n-3}$  cây bao trùm được gán nhãn khác nhau.

**Bài 8.** Trong một cây, *độ trung tâm* của một đỉnh là độ dài của đường đơn dài nhất xuất phát từ đỉnh đó. Một đỉnh được gọi là một *tâm* nếu độ trung tâm của nó là nhỏ nhất trong tất cả các đỉnh. Chứng minh rằng mọi cây hoặc có 1 đỉnh tâm, hoặc có 2 đỉnh tâm kề nhau.