

Logic cơ bản

Bài 1. Cho p , q , và r lần lượt là các mệnh đề:

p : Bạn bị cúm.

q : Bạn trượt kỳ thi cuối kỳ.

r : Bạn được lên lớp.

Hãy diễn đạt những mệnh đề sau thành các câu thông thường.

(a) $p \rightarrow q$

(c) $\neg q \leftrightarrow r$

(e) $(p \rightarrow \neg r) \vee (q \rightarrow \neg r)$

(b) $q \rightarrow \neg r$

(d) $p \vee q \vee r$

(f) $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$

Bài 2. Xác định các biểu thức sau:

(a) $11000 \wedge (010111 \vee 11011)$

(c) $(01010 \oplus 11011) \oplus 01000$

(b) $(01111 \wedge 10101) \vee 01000$

(d) $(11011 \vee 01010) \wedge (10001 \vee 11011)$

Bài 3. Khẳng định “Mệnh đề này là sai” có phải là một mệnh đề logic hay không? Vì sao?

Bài 4. *Logic mờ (Fuzzy Logic)* được sử dụng trong trí tuệ nhân tạo. Trong logic mờ, giá trị chân lý (truth value) của một mệnh đề (proposition) là một số nằm giữa 0 và 1. Một mệnh đề với giá trị chân lý 0 là sai, và giá trị chân lý 1 là đúng. Còn giá trị chân lý nằm giữa 0 và 1 chỉ ra mức độ thay đổi của chân lý. Ví dụ, giá trị chân lý 0.8 có thể được gán cho mệnh đề “Fred hạnh phúc” vì phần lớn thời gian Fred sống hạnh phúc, giá trị chân lý 0.4 có thể được gán cho mệnh đề “John hạnh phúc” vì John hạnh phúc gần một nửa thời gian.

(a) Giá trị chân lý của phủ định một mệnh đề trong logic mờ là hiệu của 1 và giá trị chân lý của mệnh đề đó. Hãy xác định giá trị chân lý của các mệnh đề “Fred không hạnh phúc” và “John không hạnh phúc”.

(b) Giá trị chân lý của hợp hai mệnh đề trong logic mờ là giá trị chân lý nhỏ nhất của hai mệnh đề đó. Hãy xác định giá trị chân lý của các mệnh đề “Cả Fred và John đều hạnh phúc” và “Cả Fred và John đều không hạnh phúc”.

$$(a-1) p \wedge \neg q \wedge \neg r$$

$$(a-2) p \wedge (q \vee (r \wedge \mathbf{T}))$$

- (b) Khi nào thì $s = s^*$, với s là một mệnh đề phức hợp nào đó?
- (c) Chứng minh rằng $(s^*)^* = s$.
- (d) * Chứng minh rằng nếu $p \equiv q$ (tương đương logic) thì $p^* \equiv q^*$, với p, q là các mệnh đề phức hợp. (*Gợi ý*: So sánh $\neg p$ với p^* và $\neg q$ với q^* trong trường hợp các mệnh đề p và q có dạng $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_k$ với $\circ \in \{\wedge, \vee\}$, và các x_i có dạng x hoặc $\neg x$, với x là mệnh đề nguyên tử.)

Bài 8. (a) Giả sử bảng chân lý với n biến mệnh đề đã được cho trước đầy đủ các giá trị chân lý. Chứng minh rằng một mệnh đề phức hợp tương ứng với bảng giá trị chân lý đó có thể tạo thành bằng cách lấy tuyển các hội của các biến hoặc phủ định của chúng. Đối với mỗi tổ hợp các giá trị sao cho mệnh đề phức hợp là đúng ta đưa vào một hội. Mệnh đề tạo thành được gọi là có *dạng tuyển chuẩn tắc (DNF - disjunctive normal form)*.

- (b) Sử dụng phần (a), hãy tìm một mệnh đề dạng tuyển chuẩn tắc tương đương logic với mệnh đề $(p \vee q) \rightarrow \neg r$, với p, q, r là các biến mệnh đề.
- (c) Một tập hợp các toán tử logic được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi mệnh đề phức hợp đều tương đương logic với một mệnh đề chỉ chứa các toán tử logic đó. Từ phần (a), dễ thấy \wedge, \vee , và \neg tạo thành một tập hợp các toán tử logic đầy đủ. Hãy chỉ ra rằng \neg và \wedge cũng có thể tạo thành một tập hợp các toán tử logic đầy đủ. (*Gợi ý*: Đầu tiên, sử dụng luật De Morgan để chỉ ra rằng $p \vee q$ tương đương logic với $\neg(\neg p \wedge \neg q)$.)

Bài 9. Cho $P(x)$ là câu “ x nói được tiếng Nga” và $Q(x)$ là câu “ x biết ngôn ngữ C++”. Hãy diễn đạt các câu sau bằng cách dùng $P(x)$, $Q(x)$, các lượng từ và các toán tử logic. Cho không gian đối với các lượng từ là tập hợp tất cả các sinh viên trong trường.

- (a) Có một sinh viên trong trường nói được tiếng Nga và biết C++.
- (b) Có một sinh viên trong trường nói được tiếng Nga nhưng không biết C++.
- (c) Mọi sinh viên trong trường đều nói được tiếng Nga hoặc biết C++.
- (d) Không có sinh viên nào trong trường có thể nói được tiếng Nga hoặc biết C++.

Bài 10. Cho $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, và $S(x)$ tương ứng là các câu “ x là một đứa bé”, “ x là logic”, “ x có khả năng cai quản một con cá sấu”, và “ x bị coi thường”. Giả sử rằng không gian là tập hợp tất cả mọi người. Hãy dùng các lượng từ, các toán tử logic, và $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ để diễn đạt các câu sau:

- (a) Những đứa bé là không logic.

- (b) Không ai bị coi thường nếu cai quản được cá sấu.
- (c) Những người không logic bị coi thường.
- (d) Những đứa bé không ai cai quản được cá sấu.

Có thể suy ra (d) từ (a), (b), và (c) hay không?