Toán rời rạc	GV: Phan Thị Hà Dương (lý thuyết)

Hàm sinh và hệ thức truy hồi

01/10/2018	GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Bài 1. Tìm hàm sinh của các dãy sau dưới dạng tường minh:

(a) $1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots$

(b) $0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, -3, \ldots$

(c) $1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

(d) $0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

(e) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0 \ldots$

Ví dụ, dạng tường minh của hàm sinh của dãy $1, 1, 1, 1, \ldots$ là $\dfrac{1}{1-x}$.

(*Gợi ý:* Có thể tham khảo bảng một số hàm sinh thường dùng ở cuối tài liệu này.)

Bài 2. Tìm công thức cho số hạng tổng quát a_n của dãy $\{a_n\}$ có hàm sinh là

(a) $(3x-4)^3$

(b) $\dfrac{1}{1-2x^2}$

(c) $\dfrac{1}{1+x-2x^2}$

(d) $e^{3x^2} - 1$

(e) $\dfrac{x^2}{(1-x)^3}$

(*Gợi ý:* Có thể tham khảo bảng một số hàm sinh thường dùng ở cuối tài liệu này.)

Bài 3. Giải thích cách sử dụng hàm sinh để tính

(a) số cách chia 15 quả bóng hoàn toàn giống nhau cho sáu bạn và mỗi bạn nhận được ít nhất một quả nhưng không nhiều hơn ba quả bóng.

(b) số cách chọn 14 quả bóng từ một rổ bóng gồm vô số các quả bóng màu đỏ, xanh, và vàng, sao cho có ít nhất 3 quả và nhiều nhất 10 quả bóng xanh được chọn, giả thiết rằng thứ tự lựa chọn trước sau của các quả bóng là không quan trọng.

(c) số cách chia n đồng xu giống hệt nhau vào 5 hộp thỏa mãn điều kiện: số đồng xu ở hộp 1 và hộp 2 là số chẵn và không quá 10, và các hộp còn lại chứa 3 đến 5 đồng xu.

(d) số các từ khác nhau có 4 ký tự được tạo thành từ các chữ cái a, b, c và mỗi từ chứa ít nhất hai chữ a.

(e) số cách sắp xếp khác nhau của n vật chọn ra từ 4 loại vật thể khác nhau, mỗi loại vật thể xuất hiện ít nhất 2 lần và không quá 5 lần.

Bài 4. (a) Chứng minh rằng $1/(1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)$ là hàm sinh của số cách thu được tổng bằng n khi một xúc xắc được gieo nhiều lần liên tiếp và thứ tự các lần gieo là quan trọng.

(b) Chứng minh rằng $\dfrac{x^2 + x}{(1 - x)^3}$ là hàm sinh của dãy $\{n^2\}$.

(c) Chứng minh rằng $(x^2+x)/(1-x)^4$ là hàm sinh của dãy $\{a_n\}$, với $a_n = 1^2+2^2+\cdots+n^2$. Từ đó, hãy tìm công thức tường minh cho tổng $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ theo n.

Bài 5. Sử dụng hàm sinh để tìm công thức của số Fibonacci F_i theo i. *Số Fibonacci* được định nghĩa như sau: $F_0 = 0, F_1 = 1$, và $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ với $i \geq 2$.

Bài 6. Giải các hệ thức truy hồi sau

(a) $a_k = 7a_{k-1}$ với $a_0 = 5$.

(b) $a_k = 3a_{k-1} + 4^{k-1}$ với $a_0 = 1$.

(c) $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ với $a_0 = 6$ và $a_1 = 30$.

(d) $a_k = 4a_{k-1} - 4a_{k-2} + k^2$ với $a_0 = 2$ và $a_1 = 5$.

Bài 7. (a) Tìm hệ thức truy hồi của số các dãy $a_1, a_2, \ldots, a_k$ thỏa mãn điều kiện $a_1 = 1$, $a_k = n$, và $a_j < a_{j+1}$ với $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, và n là một số nguyên dương. Với $n \geq 2$ thì có bao nhiêu dãy thỏa mãn điều kiện đề ra?

(b) Tìm hệ thức truy hồi của số các xâu nhị phân độ dài n có chứa 01. Với $n \geq 0$ thì có bao nhiêu xâu nhị phân thỏa mãn điều kiện đề ra?

Bài 8. Giải các hệ thức truy hồi đồng thời sau:

$$\begin{aligned} a_n &= 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} \end{aligned}$$

với $a_0 = 1$ và $b_0 = 2$.

Bài 9. Xét một hệ thống mã hóa thông tin sử dụng các chuỗi ký tự cơ số 4 (các ký tự thuộc tập $\{0, 1, 2, 3\}$). Một chuỗi ký tự được gọi là *hợp lệ* nếu số các số 0 và số các số 1 trong từ khóa đều là số chẵn. Gọi a_n là số các chuỗi hợp lệ gồm n ký tự. Gọi b_n, c_n, và d_n lần lượt là số các chuỗi gồm n ký tự cơ số 4 có chứa một số chẵn các số 0 và một số lẻ các số 1, chứa một số lẻ các số 0 và một số chẵn các số 1, và chứa một số lẻ các số 0 và một số lẻ các số 1.

(a) Chứng minh rằng $d_n = 4^n - a_n - b_n - c_n$. Sử dụng đẳng thức này để chỉ ra rằng $a_{n+1} = 2a_n + b_n + c_n$; $b_{n+1} = b_n - c_n + 4^n$; và $c_{n+1} = c_n - b_n + 4^n$.

(b) Tìm a_1, b_1, c_1, và d_1.

(c) Sử dụng phần (a) và (b) để tìm a_3, b_3, c_3, và d_3.

(d) Sử dụng các hệ thức truy hồi ở phần (a) và các điều kiện ban đầu ở phần (b) để thành lập ba phương trình tương ứng với các hàm sinh $A(x), B(x)$, và $C(x)$ của các dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$, và $\{c_n\}$.

(e) Giải hệ ba phương trình thu được từ phần (d) để thu được công thức tường minh của $A(x), B(x)$, và $C(x)$, và sử dụng các công thức này để suy ra các công thức của a_n, b_n, c_n, và d_n.

TABLE 1 **Useful Generating Functions.**

$G(x)$	a_k
$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^k$ $= 1 + C(n,1)x + C(n,2)x^2 + \cdots + x^n$	$C(n,k)$
$(1+ax)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^k x^k$ $= 1 + C(n,1)ax + C(n,2)a^2x^2 + \cdots + a^n x^n$	$C(n,k)a^k$
$(1+x^r)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)x^{rk}$ $= 1 + C(n,1)x^r + C(n,2)x^{2r} + \cdots + x^{rn}$	$C(n,k/r)$ if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$	1 if $k \le n$; 0 otherwise
$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$	1
$\frac{1}{1-ax} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x^k = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots$	a^k
$\frac{1}{1-x^r} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{rk} = 1 + x^r + x^{2r} + \cdots$	1 if $r \mid k$; 0 otherwise
$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$	$k+1$
$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k$ $= 1 + C(n,1)x + C(n+1,2)x^2 + \cdots$	$C(n+k-1,k) = C(n+k-1,n-1)$
$\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)(-1)^k x^k$ $= 1 - C(n,1)x + C(n+1,2)x^2 - \cdots$	$(-1)^k C(n+k-1,k) = (-1)^k C(n+k-1,n-1)$
$\frac{1}{(1-ax)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)a^k x^k$ $= 1 + C(n,1)ax + C(n+1,2)a^2x^2 + \cdots$	$C(n+k-1,k)a^k = C(n+k-1,n-1)a^k$
$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$	$1/k!$
$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$	$(-1)^{k+1}/k$

Note: The series for the last two generating functions can be found in most calculus books when power series are discussed.