Toán rời rạc — GV: Phan Thị Hà Dương (lý thuyết)

Lý thuyết đồ thị (tiếp)

05/11/2018 — GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Bài 1. Trong một bài tập từ các tuần trước, ta đã chỉ ra rằng một dãy số tự nhiên $d_1, d_2, \ldots, d_n$ là bậc của các đỉnh của một đồ thị nào đó khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^{n} d_i$ là một số chẵn. Mệnh đề này có còn đúng khi thay từ "đồ thị" bằng "đồ thị đơn"? Nếu đúng, hãy chứng minh mệnh đề mới thành lập. Nếu sai, hãy tìm một phản ví dụ.

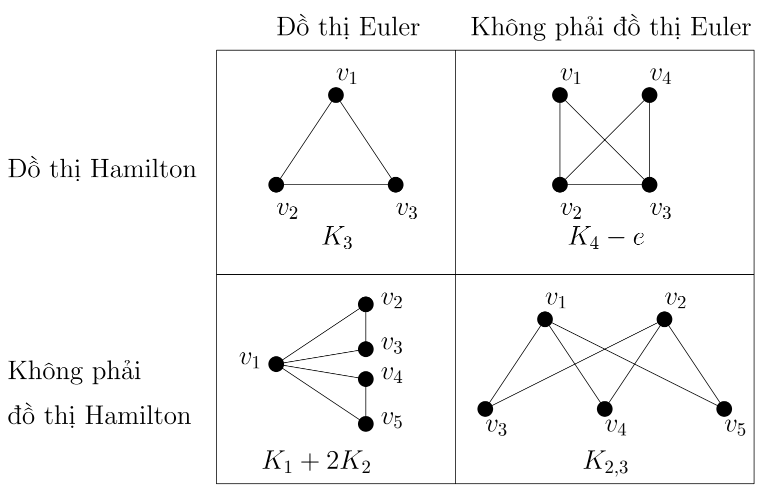
Bài 2. Chứng minh rằng một đồ thị có hướng $G = (V, E)$ là liên thông mạnh khi và chỉ khi với mọi cách phân hoạch V thành hai tập con khác rỗng V_1, V_2, tồn tại một cạnh có hướng đi từ một đỉnh của V_1 tới một đỉnh của V_2.

Bài 3. Để kiểm tra một đa đồ thị vô hướng liên thông G có chu trình Euler hay không, ta sử dụng định lý

Định lý 1. *Một đa đồ thị vô hướng liên thông G có chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.*

Trong trường hợp G là một đa đồ thị có hướng, hãy thử phát biểu và chứng minh một mệnh đề tương tự Định lý 1.

Bài 4. Một đồ thị G được gọi là *đồ thị Euler/đồ thị Hamilton* nếu như G có chứa chu trình Euler/chu trình Hamilton. Ví dụ sau cho thấy các khái niệm này là độc lập. Hãy kiểm tra



lại ví dụ trên bằng cách chỉ ra rằng các đồ thị đưa ra trong ví dụ đều thuộc các lớp tương ứng.

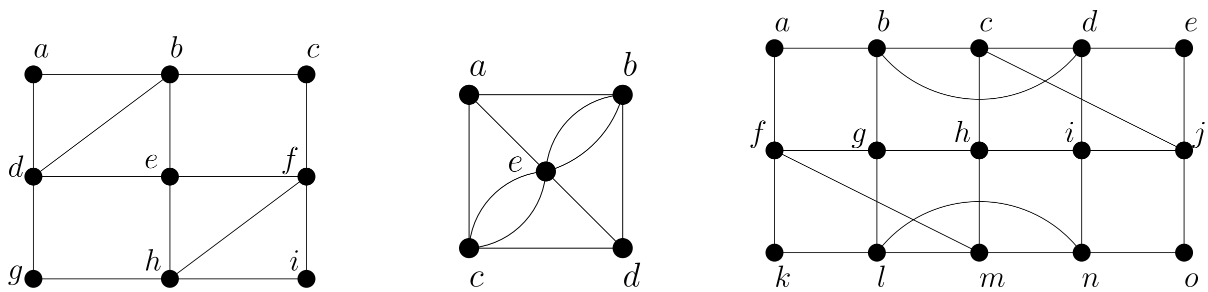
Bài 5. Chứng minh hoặc tìm phản ví dụ cho các mệnh đề sau:

(a) Nếu G là một đồ thị hai phía có chứa chu trình Euler thì G có số cạnh là chẵn.

(b) Nếu G là một đồ thị đơn gồm một số chẵn các đỉnh và có chu trình Euler thì G có số cạnh là chẵn.

(c) Nếu G là một đồ thị có chu trình Euler và hai cạnh e, f của G có chung một đỉnh thì G có chu trình Euler trong đó các cạnh e, f xuất hiện liên tiếp.

Bài 6. Kiểm tra xem các đồ thị sau có chu trình Euler hay không? Nếu có, hãy chỉ ra một chu trình Euler trong đồ thị? Nếu không, liệu đồ thị có đường đi Euler hay không? Nếu có, hãy chỉ ra một đường đi Euler trong đồ thị.



(a) (b) (c)

Bài 7. Với các giá trị nào của n thì các đồ thị sau có chu trình Euler? Với các giá trị nào của n thì các đồ thị sau có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler?

(a) K_n.

(b) C_n.

(c) W_n.

(d) Q_n.

Bài 8. Bài tập sau mô tả một cách chứng minh định lý Dirac [1] cho chu trình Hamilton.

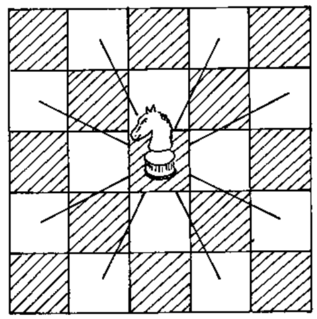
Định lý 2 (Dirac (1952))**.** *Nếu G là một đồ thị đơn gồm n đỉnh ($n \geq 3$) thỏa mãn điều kiện bậc của mỗi đỉnh trong G lớn hơn hoặc bằng $n/2$ thì G có một chu trình Hamilton.*

(a) Chứng minh G là một đồ thị liên thông.

(b) Gọi $P = v_1, \ldots, v_k$ là đường đi đơn có độ dài lớn nhất trong G ($1 \leq k \leq n$). Chỉ ra rằng tồn tại một chu trình đơn C đi qua mỗi đỉnh của P chính xác một lần.

(c) Chỉ ra rằng mọi đỉnh của G phải thuộc C, và từ đó kết luận C là chu trình Hamilton.

Bài 9. Quân mã có thể di chuyển trên bàn cờ hoặc là hai ô theo chiều ngang và một ô theo chiều dọc, hoặc là hai ô theo chiều dọc và một ô theo chiều ngang, tức là nếu nó đang ở vị trí (x, y) thì nó có thể di chuyển đến một trong số tám ô có tọa độ $(x \pm 2, y \pm 1)$, $(x \pm 1, y \pm 2)$ nếu các ô đó vẫn còn nằm trong bàn cờ (xem hình dưới đây). *Hành trình của quân mã* là



một dãy các bước di chuyển hợp lệ từ một ô nào đó đến tất cả các ô, mỗi ô đúng một lần. Hành trình của quân mã được gọi là *tái lập* nếu có một di chuyển đưa quân mã từ ô cuối cùng của hành trình về ô xuất phát. Ta có thể mô hình các hành trình bằng một đồ thị với các đỉnh là các ô của bàn cờ, và các cạnh nối hai đỉnh nếu quân mã có thể di chuyển hợp lệ giữa các ô biểu diễn bởi các đỉnh này.

(a) Vẽ đồ thị biểu diễn các bước di chuyển hợp lệ của quân mã trong các bàn cờ kích thước 3×3 và 3×4.

(b) Chỉ ra rằng đồ thị biểu diễn các bước di chuyển hợp lệ của quân mã trong bàn cờ kích thước $m \times n$ là một đồ thị hai phía.

(c) Chỉ ra rằng không tồn tại một hành trình của quân mã trên bàn cờ kích thước 3×3, nhưng có một hành trình như thế trên bàn cờ kích thước 3×4. Liệu có tồn tại một hành trình tái lập của quân mã trong trường hợp này hay không?

Tài liệu

[1] Dirac, G. A. (1952), Some Theorems on Abstract Graphs. Proceedings of the London Mathematical Society, s3-2: 69–81. doi:10.1112/plms/s3-2.1.69.