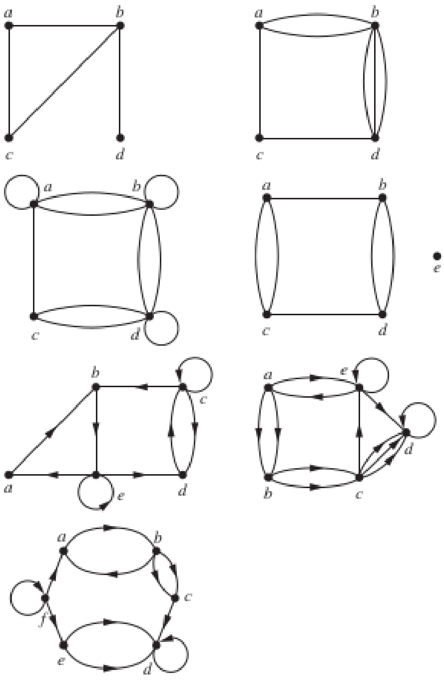
Lý thuyết đồ thị

Nguyễn Hoàng Thạch *   Hoàng Anh Đức †

Bài 1. Cho n tập hợp $S_1, S_2, \ldots, S_n$. *Đồ thị giao* của các tập hợp này là một đồ thị vô hướng, trong đó các đỉnh là các tập hợp và hai tập hợp được nối với nhau bằng một cạnh nếu chúng có giao khác rỗng. Vẽ đồ thị giao của:

1. $S_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $S_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $S_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $S_5 = \{0, 1, 8, 9\}$.

2. $T_1 = \{x | x > 0\}$, $T_2 = \{x | -1 < x < 0\}$, $T_3 = \{x | 0 < x < 1\}$, $T_4 = \{x | -1 < x < 1\}$, $T_5 = \{x | x > -1\}$, $T_6 = \mathbb{R}$.



Hình 1:

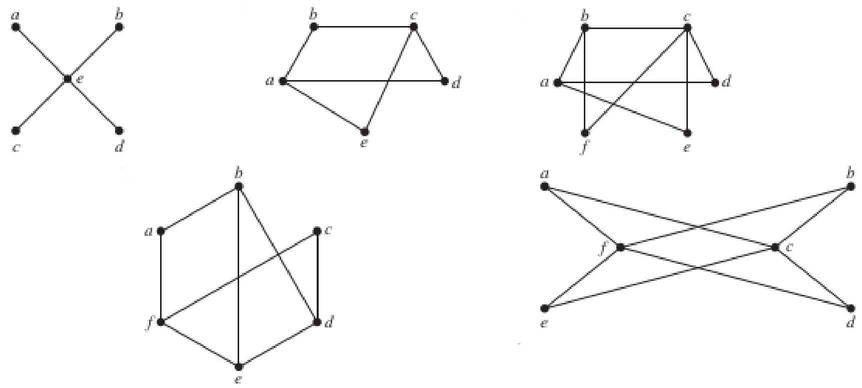
Bài 2. Xác định số đỉnh, số cạnh, bậc của các đỉnh (với đồ thị vô hướng) hoặc bậc đi ra và bậc đi vào của các đỉnh (với đồ thị có hướng) của các đồ thị trong hình 1.

*nhthach@math.ac.vn
†anhduc.hoang1990@gmail.com

Bài 3. Vẽ các đồ thị sau:

1. K_7,
2. $K_{1,8}$,
3. $K_{4,4}$,
4. C_7,
5. W_7,
6. Q_4.

Bài 4. Chứng minh rằng trong mọi đồ thị đơn có 2 đỉnh trở lên, luôn tìm được 2 đỉnh có cùng bậc.



Hình 2:

Bài 5. Trong các đồ thị ở hình 2, những đồ thị nào là đồ thị hai phía? Vẽ lại các đồ thị đó.

Bài 6. Với giá trị nào của n thì các đồ thị sau là đồ thị hai phía:

1. K_n?
2. C_n?
3. W_n?
4. Q_n?

Bài 7. Cho một đồ thị hai phía $G = (V_1, V_2, E)$. Với mỗi $A \subset V$, định nghĩa *độ khuyết thiếu* của A như sau:

$$\operatorname{def}(A) = |A| - |N(A)| \tag{1}$$

Chứng minh rằng số đỉnh tối đa của V_1 trong một cách ghép cặp trên G là $|V_1| - \max_{A \subset V_1} \operatorname{def}(A)$.

Bài 8. Một dãy các số tự nhiên không tăng $d_1, d_2, \ldots, d_n$ được gọi là một *dãy đồ thị* nếu tồn tại một đồ thị đơn gồm n đỉnh và bậc của các đỉnh là các số hạng của dãy. Chứng minh rằng nếu $d_1, d_2, \ldots, d_n$ là một dãy đồ thị thì tồn tại một đồ thị với n đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sao cho $\forall i, \deg(v_i) = d_i$ và v_1 kề với $v_2, \ldots, v_{d_1+1}$.

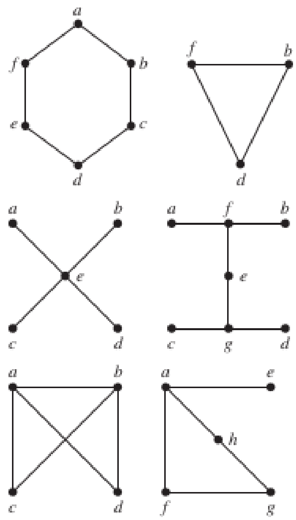
Bài 9. Chứng minh rằng dãy các số tự nhiên không tăng $d_1, d_2, \ldots, d_n$ là một dãy đồ thị khi và chỉ khi dãy $d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$, sau khi sắp xếp lại theo thứ tự từ lớn đến bé, cũng là một dãy đồ thị.

Bài 10. Một đồ thị vô hướng G có n đỉnh, m cạnh, bậc lớn nhất của một đỉnh là D, bậc bé nhất của một đỉnh là d. Chứng minh rằng $d \leq 2m/n \leq D$.

Bài 11. Một đồ thị vô hướng được gọi là *chính quy* nếu tất cả các đỉnh của nó có cùng số bậc. Một đồ thị n-*chính quy* là một đồ thị mà tất cả các đỉnh đều có bậc n.

1. Với giá trị nào của n thì đồ thị sau là chính quy: K_n, C_n, W_n, Q_n? Với giá trị nào của m và n thì $K_{m,n}$ là đồ thị chính quy?

2. Một đồ thị 4-chính quy với 10 cạnh có bao nhiêu đỉnh?



Hình 3:

Bài 12. *Đồ thị bù* của một đồ thị đơn vô hướng không có khuyên $G = (V, E)$ là đồ thị $\overline{G} = (V, E')$ với $E' = V \times V \setminus E$.

1. Vẽ đồ thị bù của các đồ thị trong hình 3.

2. Xác định $\overline{K_n}$, $\overline{K_{m,n}}$, $\overline{C_n}$, $\overline{Q_n}$.

Bài 13. Cho một đồ thị đơn G và đồ thị bù $\overline{G}$ của nó.

1. Nếu G có 15 cạnh và $\overline{G}$ có 13 cạnh, thì G có bao nhiêu đỉnh?
2. Nếu G có n đỉnh và m cạnh thì $\overline{G}$ có bao nhiêu cạnh?

Bài 14. Một đồ thị đơn hai phía với n đỉnh và m cạnh. Chứng minh rằng $m \leq n^2/4$.

Bài 15. Một đồ thị đơn hai phía $G = (V_1, V_2, E)$ là đồ thị chính quy. Chứng minh rằng $|V_1| = |V_2|$.

Bài 16. Chứng minh rằng mọi đồ thị con cảm sinh khác rỗng của một đồ thị đầy đủ là một đồ thị đầy đủ.

Bài 17. Vẽ tất cả các đồ thị con của đồ thị đầu tiên trong hình 1.

Bài 18. Vẽ đồ thị hợp của các cặp đồ thị trong hình 3.

Bài 19. Biểu diễn các đồ thị trong hình 1 bằng danh sách các đỉnh kề và bằng ma trận kề.

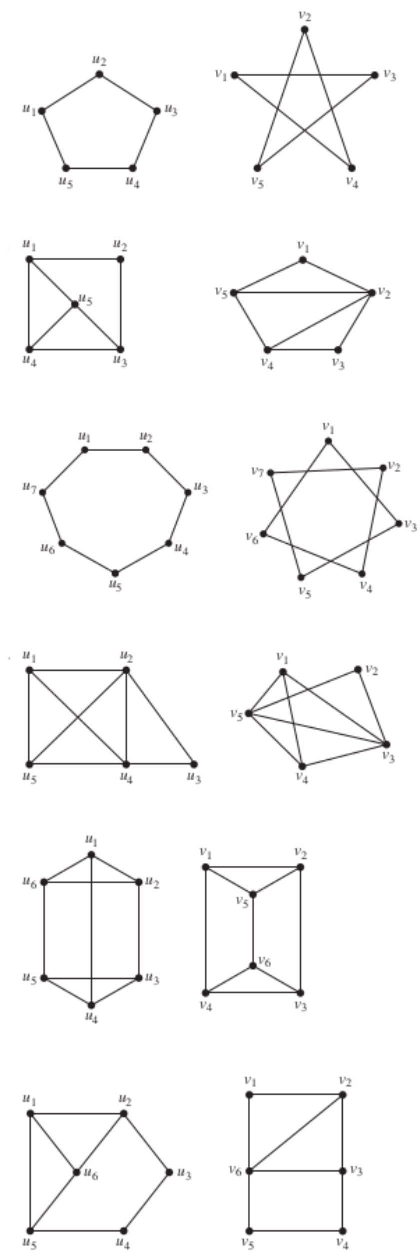
Bài 20. Viết ma trận kề của K_n, C_n, W_n, Q_n, $K_{m,n}$. Viết ma trận liên hợp của K_n, C_n, W_n, $K_{m,n}$.

Bài 21. Chỉ ra mỗi cặp đồ thị trong các hình 4 và 5 có đẳng cấu với nhau hay không (nếu có, chỉ ra ánh xạ, nếu không, giải thích vì sao).

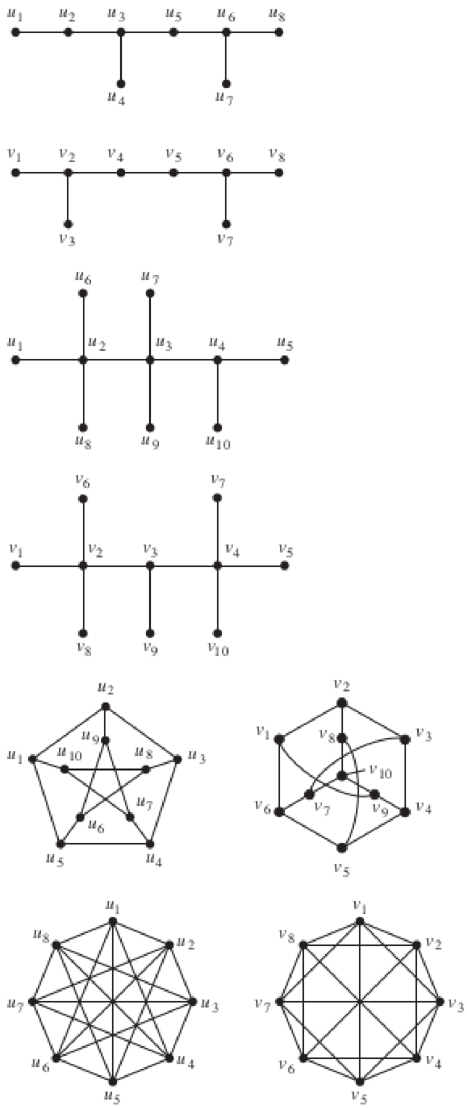
Bài 22. Chứng minh rằng nếu G và H đẳng cấu với nhau thì $\overline{G}$ và $\overline{H}$ cũng đẳng cấu với nhau.

Bài 23. Chứng minh rằng nếu G đẳng cấu với $\overline{G}$ thì số đỉnh của G chia hết cho 4 hoặc chia 4 dư 1.

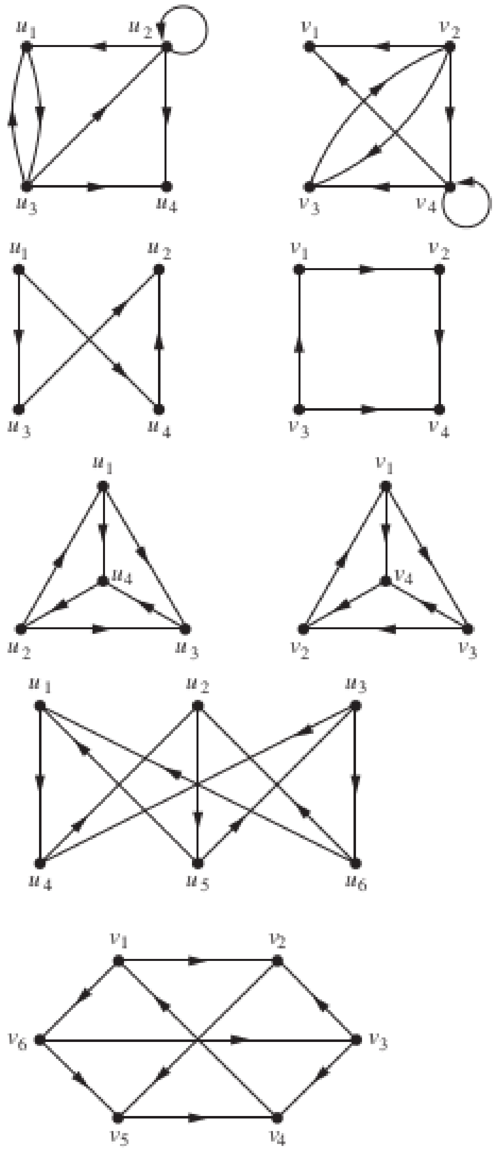
Bài 24. Chỉ ra mỗi cặp đồ thị trong hình 6 có đẳng cấu với nhau hay không (nếu có, chỉ ra ánh xạ, nếu không, giải thích vì sao).


u_1 u_2 u_3 u_4 u_5
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5
u_1 u_2 u_3 u_4 u_5
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5
u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 u_7
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7
u_1 u_2 u_3 u_4 u_5
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5
u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6
u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6

Hình 4:


u_1 u_2 u_3 u_5 u_6 u_8
u_4 u_7
v_1 v_2 v_4 v_5 v_6 v_8
v_3 v_7
u_6 u_7
u_1 u_2 u_3 u_4 u_5
u_8 u_9 u_{10}
v_6 v_7
v_1 v_2 v_3 v_4 v_5
v_8 v_9 v_{10}
u_2 u_9 u_1 u_{10} u_8 u_3 u_7 u_6 u_5 u_4
v_2 v_1 v_8 v_3 v_{10} v_6 v_7 v_9 v_4 v_5
u_1 u_8 u_2 u_7 u_3 u_6 u_4 u_5
v_1 v_8 v_2 v_7 v_3 v_6 v_4 v_5

Hình 5:


u1 u2 u3 u4
v1 v2 v3 v4
u1 u2 u3 u4
v1 v2 v3 v4
u1 u4 u2 u3
v1 v4 v2 v3
u1 u2 u3 u4 u5 u6
v1 v2 v6 v3 v5 v4

Hình 6: