Nguyên lý Dirichlet – Nguyên lý bù trừ

Nguyễn Hoàng Thạch [*] Hoàng Anh Đức [†]

Bài 1. Lớp K61 khoa Toán có 39 sinh viên. Chứng minh rằng có ít nhất 4 bạn có cùng tháng sinh. Tìm số sinh viên ít nhất để chắc chắn có ít nhất 5 bạn có cùng tháng sinh.

Bài 2. Chứng minh rằng trong một nhóm sáu người bất kỳ, luôn tồn tại một nhóm ba người đôi một quen nhau, hoặc một nhóm ba người đôi một không quen nhau.

Bài 3. Chứng minh rằng trong năm điểm có tọa độ nguyên bất kỳ trong mặt phẳng, luôn tìm được ít nhất hai điểm sao cho trung điểm của đoạn thẳng nối chúng cũng có tọa độ nguyên.

Bài 4. Tìm số nguyên dương n bé nhất sao cho trong n điểm có tọa độ nguyên bất kỳ trong không gian ba chiều, luôn tìm được hai điểm sao cho trung điểm của đoạn thẳng nối chúng cũng có tọa độ nguyên.

Bài 5. Chứng minh rằng trong 7 số bất kỳ được chọn ra từ tập hợp $\{1, 2, \ldots, 10\}$, luôn tìm được ít nhất hai cặp có tổng bằng 11. Điều đó còn đúng không nếu chỉ chọn ra 6 số thay vì 7?

Bài 6. Chứng minh rằng với mọi cách xếp 25 bạn nữ và 25 bạn nam thành một vòng tròn, luôn tìm được một người đứng giữa hai bạn nam.

Bài 7. Nếu thời khóa biểu một tuần có 40 tiết học, và tổng số tiết học của các môn học trong tuần là 650 tiết, thì cần ít nhất bao nhiêu phòng học?

Bài 8. Chứng minh rằng với mọi số vô tỷ x và với mọi số nguyên dương n, tồn tại một số nguyên dương k không vượt quá n sao cho khoảng cách từ kx tới số nguyên gần nó nhất không lớn hơn $1/n$.

[*]nhthach@math.ac.vn
[†]anhduc.hoang1990@gmail.com

Bài 9. Cho t số nguyên dương $n_1, n_2, \ldots, n_t$. Chứng minh rằng với mọi cách xếp $n_1 + n_2 + \cdots + n_t - t + 1$ quả bóng vào t cái hộp, luôn tìm được một chỉ số i sao cho hộp i chứa ít nhất n_i quả bóng.

Bài 10. Chứng minh nguyên lý bù trừ bằng cách quy nạp theo số tập hợp.

Bài 11. Tìm số số nguyên dương không vượt quá 1000 và không phải bình phương, cũng không phải lập phương của một số nguyên.

Bài 12. Sử dụng nguyên lý bù trừ, chứng minh công thức đếm số toàn ánh từ một tập hợp có m phần tử tới một tập hợp có n phần tử ($m \geq n$). Từ đó suy ra công thức số Stirling loại hai.

Bài 13. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ thỏa mãn các điều kiện $x_1 \leq 3\,, x_2 \leq 4\,, x_3 \leq 5\,, x_4 \leq 8$.

Bài 14. Liệt kê các hoán vị mất thứ tự của $\{1, 2, 3, 4\}$.

Bài 15. Một chiếc máy cho thư mời vào phong bì (cả thư và phong bì đều in sẵn địa chỉ) bị trục trặc và cho thư vào phong bì một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất để trong một nhóm 100 lá thư:

1. không có lá thư nào được cho vào đúng phong bì?
2. có đúng một lá thư được cho vào đúng phong bì?
3. có đúng 98 lá thư được cho vào đúng phong bì?
4. có đúng 99 lá thư được cho vào đúng phong bì?

Bài 16. Có bao nhiêu cách sắp xếp lại dãy số 0, 1, 2, ..., 9 sao cho không có chữ số chẵn nào ở đúng vị trí ban đầu của nó?

Bài 17. Chứng minh đẳng thức sau, ở đó $n \geq 2$ và D_n là số hoán vị mất thứ tự của n:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})\,.$$

Từ đó suy ra $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ với $n \geq 1$.

Bài 18. Với mỗi số nguyên dương n, *chỉ số Euler* của n, ký hiệu là $\varphi(n)$, là số các số nguyên dương không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n.

1. Giả sử $n = pq$, ở đó p và q là hai số nguyên số khác nhau. Tìm một công thức của $\varphi(n)$ theo p và q.
2. Giả sử $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ là phân tích của n thành các thừa số nguyên tố. Tìm một công thức của $\varphi(n)$ theo các p_i và các α_i