

Quan hệ truy hồi

Nguyễn Hoàng Thạch * Hoàng Anh Đức †

Bài 1. Gọi s_n ($n \geq 2$) là số các dãy số nguyên tăng chặt chẽ bắt đầu tại 1 và kết thúc tại n : $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_k = n$.

- a) Tính s_2, s_3, s_4 .
- b) Lập một quan hệ truy hồi cho dãy (s_n) .
- c) Tìm một công thức tổng quát của s_n .

Bài 2. Gọi u_n là số từ nhị phân độ dài n có chứa hai chữ số 0 liên tiếp.

- a) Tính u_0, u_1, u_2, u_3 .
- b) Lập một quan hệ truy hồi tuyến tính cho dãy (u_n) .

Bài 3. Xét một phiên bản của trò chơi “Tháp Hà Nội” trong đó các đĩa không được phép “nhảy” giữa cột 1 và cột 3 mà chỉ có thể di chuyển giữa cột 1 và cột 2, giữa cột 2 và cột 3. Gọi s_n là số bước tối thiểu để chuyển n đĩa từ cột 1 sang cột 3.

- a) Lập một quan hệ truy hồi cho dãy (s_n) .
- b) Giải quan hệ truy hồi trên.
- c) Có bao nhiêu cách sắp xếp hợp lệ của n đĩa, tức là không có đĩa nào nằm bên trên một đĩa bé hơn?
- d) Chứng minh rằng tất cả các cách sắp xếp hợp lệ xuất hiện trong các bước chuyển của lời giải tối thiểu.

Bài 4. Gọi $S(m, n)$ là số toàn ánh từ $\{1, 2, \dots, m\}$ vào $\{1, 2, \dots, n\}$.

- a) Lập một quan hệ truy hồi và đưa ra điều kiện ban đầu cho các số $S(m, n)$.

*nhthach@math.ac.vn

†anhduc.hoang1990@gmail.com

b) Tính $S(7, 4)$.

Bài 5. Xét trò chơi sau: Xếp các số tự nhiên từ 1 đến n thành một vòng tròn theo thứ tự tăng dần theo chiều kim đồng hồ. Bắt đầu từ 1, đi theo chiều kim đồng hồ, cứ cách một số thì xóa đi một số, đến khi nào còn lại đúng một số thì dừng. Gọi số còn lại là $J(n)$.

a) Tính $J(4), J(5), \dots, J(16)$. “Đoán” một công thức tổng quát của $J(n)$.

b) Biểu diễn $J(2n)$ và $J(2n + 1)$, $n \geq 1$, theo $J(n)$.

c) Đưa ra và chứng minh một công thức tổng quát của $J(n)$.

Bài 6. Giải các quan hệ truy hồi sau:

a) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $n \geq 2$; $a_0 = 1, a_1 = 0$;

b) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $n \geq 2$; $a_0 = 6, a_1 = 8$;

c) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $n \geq 2$; $a_0 = 3, a_1 = 6$;

d) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, $n \geq 2$; $a_0 = 2, a_1 = 1$;

e) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$, $n \geq 2$; $a_0 = 4, a_1 = 10$;

f) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, $n \geq 2$; $a_0 = 3, a_1 = -3$;

Bài 7. Chứng minh quan hệ sau giữa số Fibonacci và số tổ hợp:

$$f_{n+1} = \sum_{k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}.$$

Bài 8. Giải các quan hệ truy hồi sau:

a) $a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$, $n \geq 2$; $a_1 = 4$;

b) $a_n = 2a_{n-1} + 3^n$, $n \geq 2$; $a_1 = 5$;

c) $a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 42 \times 4^n$, $n \geq 3$; $a_1 = 56, a_2 = 278$;