

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC



Đào Xuân Thắng

**ĐỒ THỊ TÁI CẤU HÌNH
CÁC ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT**

Khóa luận tốt nghiệp đại học hệ chính quy
Ngành Toán tin
(Chương trình đào tạo chuẩn)

Hà Nội - 2024

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

Đào Xuân Thắng

ĐỒ THỊ TÁI CẤU HÌNH
CÁC ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

Khóa luận tốt nghiệp đại học hệ chính quy
Ngành Toán tin
(Chương trình đào tạo chuẩn)

Cán bộ hướng dẫn: TS. Hoàng Anh Đức

Hà Nội - 2024

LỜI CẢM ƠN

Trước khi trình bày nội dung chính của khóa luận, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Tiến sỹ Hoàng Anh Đức người đã tận tình hướng dẫn để em có thể hoàn thành khóa luận này.

Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới toàn thể các thầy cô giáo trong khoa Toán - Cơ - Tin học, Đại học Khoa Học Tự Nhiên, Đại Học Quốc Gia Hà Nội đã dạy bảo em tận tình trong suốt quá trình học tập tại khoa.

Nhân dịp này em cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã luôn bên em, cổ vũ, động viên, giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập và thực hiện khóa luận tốt nghiệp.

Hà Nội, ngày 20 tháng 05 năm 2024

Sinh viên

Đào Xuân Thắng

Mục lục

Chương 1. Một số kiến thức liên quan	5
1.1. Kiến thức cơ bản trong đồ thị	5
1.1.1. Thuật ngữ đồ thị (Graph terminology)	5
1.1.2. Đường đi ngắn nhất	6
1.1.3. Hợp, tích Descartes giữa hai đồ thị	7
1.1.4. Đồ thị đầy đủ, đồ thị $K_{2,n}$	7
1.2. Một số định nghĩa khác	8
1.2.1. Đồ thị Claw	8
1.2.2. Đồ thị Cayley	8
1.2.3. Siêu khối n chiều (A hypercube of dimension n)	8
Chương 2. Đồ thị đường đi ngắn nhất	10
2.1. Định nghĩa	10
2.1.1. Đồ thị đường đi ngắn nhất	10
2.1.2. Đồ thị rút gọn (reduced graph)	11
2.2. Một số quan sát chung	11
Chương 3. Tính chất, cấu trúc của đồ thị đường đi ngắn nhất	17
3.1. Phân tích và tổng hợp (Decompositions and sums)	17
3.2. Đồ thị đường đi ngắn nhất với chu vi tối thiểu là 5	25
3.3. Đường đi ngắn nhất trong đồ thị lưới	30

LỜI MỞ ĐẦU

Trong lý thuyết đồ thị và các ứng dụng thực tế của nó, việc tìm kiếm các đường đi ngắn nhất giữa các đỉnh là một vấn đề cơ bản và quan trọng. Tuy nhiên, một vấn đề bất kỳ đều có thể được giải quyết bằng nhiều cách khác nhau. Điều này đặt ra một câu hỏi thú vị về tái cấu hình: Liệu có thể biến đổi một đường đi ngắn nhất thành một đường đi ngắn nhất khác thông qua một loạt các bước trung gian, trong đó mỗi bước cũng là một đường đi ngắn nhất hợp lệ?

Tái cấu hình là một lĩnh vực nghiên cứu đang ngày càng trở nên sôi động và có nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Vấn đề tái cấu hình liên quan đến việc biến đổi từ một lời giải khả thi này sang một lời giải khả thi khác thông qua các bước tuần tự, sao cho mỗi bước trung gian đều duy trì được tính khả thi. Ví dụ, trong bài toán tô màu đỉnh của đồ thị, câu hỏi tái cấu hình có thể là liệu có thể biến đổi một cách tô màu đúng thành một cách tô màu đúng khác bằng cách thay đổi màu của từng đỉnh một lần, mà vẫn giữ cho mỗi bước là một cách tô màu đúng.

Các bài toán tái cấu hình có thể được nghiên cứu thông qua đồ thị tái cấu hình, trong đó các đỉnh đại diện cho các lời giải khả thi và các cạnh biểu thị khả năng chuyển đổi trực tiếp giữa các lời giải này. Tái cấu hình đã được nghiên cứu trong nhiều bối cảnh khác nhau, bao gồm tô màu đỉnh (vertex coloring) [3, 5–8], tập độc lập (independent sets) [15, 16, 18], ghép cặp (matchings) [16], cơ sở matroid (matroid bases) [16], ... Và bài nghiên cứu này tập trung vào việc cấu hình lại các đường đi ngắn nhất trong đồ thị.

Một câu hỏi cơ bản trong tái cấu hình là xác định độ phức tạp của việc kiểm tra xem hai lời giải khả thi có thể được chuyển đổi từ cái này sang cái khác hay không. Như chúng ta đã biết, việc tìm đường đi ngắn nhất trong một đồ thị là một bài toán có độ phức tạp tính toán là đa thức (polynomial), nhưng khi ta mở rộng vấn đề này sang cấu hình lại (biến đổi từ đường đi ngắn nhất này sang đường đi ngắn nhất khác), độ phức tạp lại tăng lên rất nhiều, trở thành PSPACE-complete [18]. Điều này tạo ra một sự khác biệt đáng chú ý và đặt ra nhiều thách thức nghiên cứu.

Với bối cảnh này, trong bài báo cáo này, chúng tôi sẽ tập trung vào cấu trúc của các đồ thị đường đi ngắn nhất thay vì tìm hiểu, phát triển thêm các thuật toán. Mục

tiêu chính của chúng tôi là hiểu những đồ thị nào có thể xuất hiện như các đồ thị đường đi ngắn nhất.

Bố cục của khóa luận bao gồm 3 chương:

- Chương 1 trình bày một số định nghĩa, các kiến thức liên quan đến khóa luận.
- Chương 2 của khóa luận sẽ bắt đầu việc tìm hiểu đồ thị đường đi ngắn nhất là gì, và đưa ra một số quan sát quan trọng.
- Chương 3 sẽ lần lượt trình bày các nội dung chính của bài khóa luận:
 - + Phần 3.1, chúng tôi chứng minh rằng tập hợp các đồ thị đường đi ngắn nhất đóng dưới phép hợp rời rạc và phép tích Cartesian, và kết quả phân rã cho thấy chu trình 4 đỉnh thường xuất hiện trong các đồ thị này.
 - + Phần 3.2 cung cấp một đặc trưng đơn giản về các đồ thị đường đi ngắn nhất có chu vi 5 hoặc lớn hơn, đồng thời xác định rằng cây chỉ có thể là đồ thị đường đi ngắn nhất nếu nó là một đường đi.
 - + Phần 3.3 sẽ khám phá các đồ thị có chu vi nhỏ hơn 5, chứng minh rằng đồ thị đường đi ngắn nhất của đồ thị lưới là một đồ thị con cảm sinh của mạng lưới, và đặc biệt, đồ thị đường đi ngắn nhất của hypercube Q_n với hai đỉnh đối xứng là một đồ thị Cayley trên nhóm đối xứng S_n .

Chúng tôi hy vọng rằng nghiên cứu này sẽ không chỉ đóng góp vào hiểu biết lý thuyết về biểu đồ tái cấu hình của đường đi ngắn nhất mà còn mở ra những hướng nghiên cứu mới và ứng dụng thực tiễn trong các lĩnh vực liên quan. Xin chân thành cảm ơn!

Hà Nội, ngày 20 tháng 05 năm 2024

Sinh viên

Đào Xuân Thắng

Chương 1

Một số kiến thức liên quan

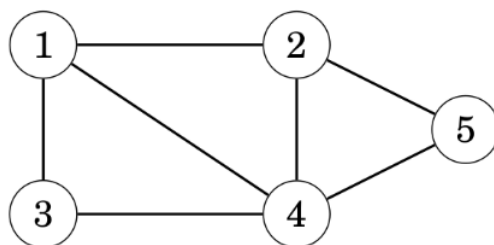
Trong chương này và các chương sau, chúng ta chỉ xét các đồ thị đơn giản G , với tập đỉnh $V(G)$ và tập cạnh $E(G)$. Khi hai đỉnh x, y liền kề nhau, ta ký hiệu là $x \sim y$.

1.1. Kiến thức cơ bản trong đồ thị

1.1.1. Thuật ngữ đồ thị (Graph terminology)

Đồ thị bao gồm các đỉnh (nodes) và cạnh (edges). Ta quy ước, biến n ký hiệu cho số lượng đỉnh trong đồ thị, và biến m ký hiệu cho số lượng cạnh. Các đỉnh được đánh số bằng các số nguyên $(1, 2, \dots, n)$, hoặc ký hiệu theo bảng chữ cái alphabet (A, B, ..., Z).

Đường đi (path) dẫn từ đỉnh a đến đỉnh b đi qua các cạnh của đồ thị. Chiều dài của đường đi là số lượng cạnh chứa trong nó. Ví dụ, đồ thị dưới đây chứa một đường đi $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$ có chiều dài là 3 từ đỉnh 1 đến đỉnh 5.



Hình 1.1: Đồ thị cơ bản

Đường đi được gọi là chu trình (cycle) nếu đỉnh đầu và đỉnh cuối là giống nhau. Ví dụ, đồ thị trên chứa một chu trình $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. Một đường đi là đường đi đơn (simple) nếu mỗi đỉnh xuất hiện nhiều nhất 1 lần trong đường đi.

1.1.2. Đường đi ngắn nhất

Trong mục này, ta sẽ tìm hiểu bài toán đường đi ngắn nhất trong đồ thị. Trước hết, ta cần quy ước một số khái niệm:

Định nghĩa 1.1.1. Một mạng lưới (hay đồ thị có trọng số) là một đồ thị $G = (V, E)$ và một hàm $\phi : E \rightarrow R$

Cho mạng lưới (G, ϕ) , ta xác định trọng số của đồ thị con $H \subset G$ bởi công thức sau

$$\phi(H) = \sum_{e \in E(H)} \phi(e). \quad (1.1.1)$$

Với hai đỉnh $u, v \in V$ bất kỳ, ta quan tâm đến việc tìm đường đi từ u đến v với trọng số nhỏ nhất có thể. Ở đây, ta sẽ giới hạn trong các mạng lưới với trọng số của các cạnh đều dương. Bên cạnh đó, ta cũng mở rộng hàm ϕ trên tất các cặp đỉnh bằng cách gán cho $\phi((u, v)) = \infty$ nếu $(u, v) \notin E$.

Định nghĩa 1.1.2. Cho mạng lưới (G, ϕ) . Khoảng cách giữa hai điểm $u, v \in V(G)$ được xác định bởi

$$d(u, v) = d_G(u, v) = \min\{\phi(P)\} \quad (1.1.2)$$

trong đó P là một đường đi từ u đến v .

Đường đi để đạt được giá trị nhỏ nhất này được gọi là đường đi ngắn nhất giữa 2 đỉnh u và v .

Để thuận tiện hơn cho việc nghiên cứu khóa luận, ta sẽ giới hạn các mạng lưới chính là các đồ thị với trọng số các cạnh đều bằng 1 (hay còn được xem là đồ thị không có trọng số). Do đồ thị không có trọng số, chúng ta có thể hiểu rằng: Đường đi ngắn nhất là đường đi giữa hai đỉnh trong đồ thị mà có ít bước di chuyển nhất, tức là đi qua ít cạnh nhất.

1.1.3. Hợp, tích Descartes giữa hai đồ thị

Định nghĩa 1.1.3. Hợp của hai đồ thị ($G_1 \cup G_2$)

- Nếu G_1 và G_2 là hai đồ thị, thì $G_1 \cup G_2$ được định nghĩa là đồ thị có tập đỉnh là $V(G_1) \cup V(G_2)$ và tập cạnh là $E(G_1) \cup E(G_2)$.
- Khi $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ (tức là hai đồ thị không có đỉnh chung), ta nói rằng G_1 và G_2 là rời rạc (disjoint), và gọi $G_1 \cup G_2$ là hợp rời rạc của G_1 và G_2 .

Định nghĩa 1.1.4. Tích Descartes của hai đồ thị ($G_1 \square G_2$)

Với hai đồ thị G_1 và G_2 , tích Descartes $G_1 \square G_2$ là một đồ thị với tập đỉnh là $V(G_1) \times V(G_2)$ (tập các cặp (u_1, u_2) với $u_1 \in V(G_1)$ và $u_2 \in V(G_2)$).

Tập cạnh của $G_1 \square G_2$ bao gồm các cặp $(u_1, u_2)(v_1, v_2)$ sao cho:

- $u_1 = v_1$ và $u_2 \sim v_2$ (nghĩa là u_2 và v_2 kề nhau trong G_2), hoặc
- $u_2 = v_2$ và $u_1 \sim v_1$ (nghĩa là u_1 và v_1 kề nhau trong G_1).

1.1.4. Đồ thị đầy đủ, đồ thị $K_{2,n}$

Đồ thị đầy đủ K_n :

- Đồ thị đầy đủ K_n là một đồ thị trong đó mỗi cặp đỉnh đều được nối với nhau bởi một cạnh. Điều này có nghĩa là có một cạnh giữa mọi cặp đỉnh.

Đồ thị $K_{2,n}$:

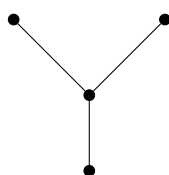
- Đồ thị $K_{2,n}$ là một đồ thị lưỡng phân đầy đủ với hai phần V_1 và V_2 , trong đó phần V_1 có 2 đỉnh và phần V_2 có n đỉnh.
- Các đỉnh trong V_1 đều được nối với tất cả các đỉnh trong V_2 , nhưng không có cạnh nào nối giữa các đỉnh trong cùng một phần V_1 hoặc V_2 .

1.2. Một số định nghĩa khác

1.2.1. Đồ thị Claw

Định nghĩa: Đồ thị Claw, ký hiệu là $K_{1,3}$, là một đồ thị gồm một đỉnh trung tâm và ba đỉnh lá, trong đó đỉnh trung tâm được kết nối với mỗi đỉnh lá bởi một cạnh, và không có cạnh nào giữa các đỉnh lá.

Đồ thị Claw có thể được biểu diễn như sau:

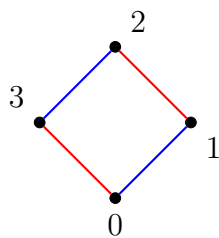


1.2.2. Đồ thị Cayley

Định nghĩa: Cho (Γ, \cdot) là một nhóm. Giả sử S là một tập sinh của Γ không chứa phần tử đơn vị và sao cho với mỗi phần tử $g \in S$, thì phần tử nghịch đảo g^{-1} cũng thuộc S .

Đồ thị Cayley của Γ với tập sinh S , ký hiệu là $\text{Cay}(\Gamma; S)$, là đồ thị có:

- Đỉnh: Các đỉnh là các phần tử của Γ .
- Cạnh: Có một cạnh nối giữa hai đỉnh x và y khi và chỉ khi $x \cdot s = y$ với một phần tử $s \in S$.



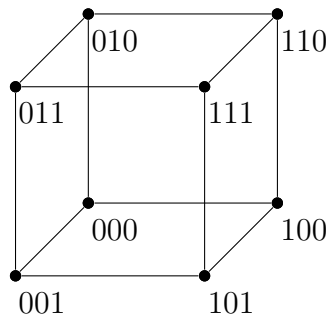
1.2.3. Siêu khối n chiều (A hypercube of dimension n)

Định nghĩa: Một siêu khối có chiều n , ký hiệu là Q_n , là đồ thị được tạo thành bằng cách:

- Gán nhãn cho mỗi đỉnh bằng một dãy nhị phân có độ dài n , tạo thành 2^n đỉnh.
- Nối hai đỉnh bằng một cạnh nếu và chỉ nếu dãy nhị phân của chúng khác nhau chính xác một vị trí.

Ví dụ: Chúng ta xét đến một siêu khối với số chiều là 3, ký hiệu là Q_3 , là đồ thị với:

- 8 đỉnh, mỗi đỉnh được gán nhãn bằng một dãy nhị phân có độ dài 3: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.
- Các cạnh nối hai đỉnh nếu dãy nhị phân của chúng khác nhau chính xác một vị trí.



Trong biểu đồ trên:

- Các đỉnh là các số nhị phân 3-bit: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.
- Các cạnh nối giữa các đỉnh đại diện cho việc chúng chỉ khác nhau đúng một bit.

Ví dụ:

- Đỉnh 000 và 001 được nối với nhau vì chúng khác nhau ở bit cuối cùng.
- Đỉnh 000 và 010 được nối với nhau vì chúng khác nhau ở bit thứ hai.
- Đỉnh 000 và 100 được nối với nhau vì chúng khác nhau ở bit đầu tiên.

Chương 2

Đồ thị đường đi ngắn nhất

2.1. Định nghĩa

2.1.1. Đồ thị đường đi ngắn nhất

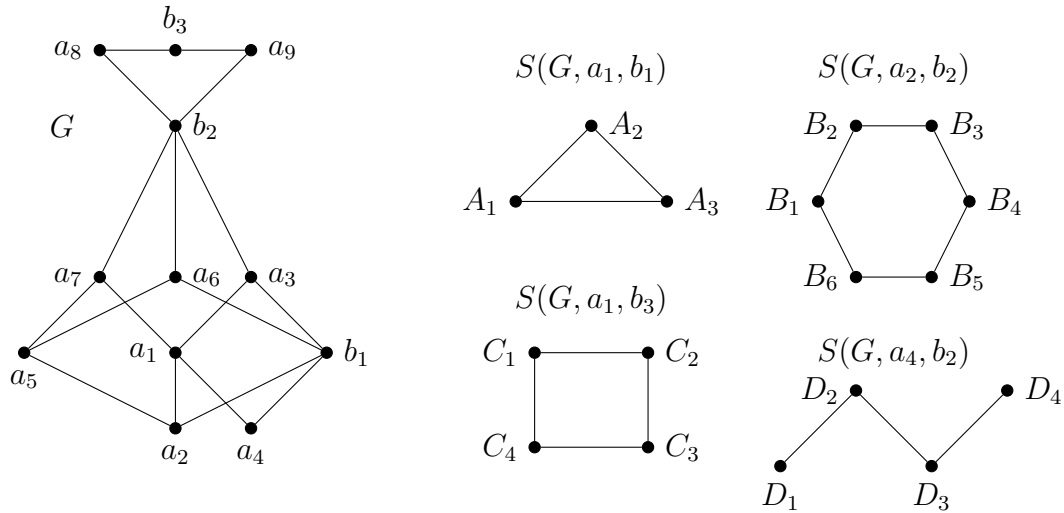
Định nghĩa 2.1.1. Cho G là đồ thị có các đỉnh a và b phân biệt.

- Đồ thị đường đi ngắn nhất của G đối với a và b là đồ thị $S(G, a, b)$ trong đó mọi đỉnh U tương ứng với một đường đi ngắn nhất trong G giữa a và b
- Hai đỉnh $U, W \in V(S(G, a, b))$ được xem là liền kề khi và chỉ khi các đường đi tương ứng của chúng ở trong G khác nhau ở đúng một đỉnh.

Nếu các đường đi của G tương ứng với hai đỉnh liền kề U, W trong $S(G, a, b)$ là $av_1 \cdots v_{i-1}v_i v_{i+1} \cdots v_p b$ và $av_1 \cdots v_{i-1}v'_i v_{i+1} \cdots v_p b$, ta nói U và W khác nhau ở chỉ số thứ i , hay i là chỉ số sai phân của cạnh UW . Có thể xem xét một số ví dụ trong hình 2.1.1.

Lúc này, đồ thị G là đồ thị cơ sở của $S(G, a, b)$. Và chúng ta nói rằng đồ thị H là đồ thị đường đi ngắn nhất, nếu tồn tại đồ thị G với $a, b \in V(G)$ sao cho $S(G, a, b)$ đẳng cấu với H , ký hiệu là $S(G, a, b) \cong H$.

Để tránh nhầm lẫn giữa các đỉnh trong G và các đỉnh trong $S(G, a, b)$, trong suốt bài viết này, chúng tôi sẽ sử dụng chữ thường (a, b, c, \dots) để biểu thị các đỉnh trong đồ thị cơ sở và chữ in hoa (A, B, C, \dots) để biểu thị các đỉnh trong $S(G, a, b)$.



Hình 2.1: Biểu đồ cơ sở G với một số biểu đồ đường đi ngắn nhất.

2.1.2. Đồ thị rút gọn (reduced graph)

Có thể dễ dàng nhận thấy rằng có nhiều đồ thị cơ sở G khác nhau nhưng lại có cùng một đồ thị đường đi ngắn nhất $S(G, a, b)$.

Ví dụ, nếu $e \in E(G)$ nhưng không nằm trên bất kỳ đường đi ngắn nhất nào giữa a và b , thì $S(G, a, b) \cong S(G \setminus e, a, b)$ (đồ thị được tạo ra từ G bằng cách loại bỏ cạnh e).

Định nghĩa: Đồ thị rút gọn (G, a, b) được định nghĩa là đồ thị được tạo ra từ G bằng cách:

- Loại bỏ bất kỳ cạnh hoặc đỉnh nào không nằm trên bất kỳ đường đi ngắn nhất nào giữa a và b .
- Co lại bất kỳ cạnh nào xuất hiện trong tất cả các đường đi ngắn nhất giữa a và b (nghĩa là, gộp hai đỉnh mà cạnh này nối lại thành một đỉnh duy nhất).

2.2. Một số quan sát chung

Trong phần này, chúng tôi sẽ trả lời một số câu hỏi tự nhiên về việc các lớp đồ thị nào có thể là đồ thị đường đi ngắn nhất. Chúng tôi dễ dàng nhận thấy rằng đồ

thị rỗng là một đồ thị đường đi ngắn nhất. Chúng tôi cũng sẽ chứng minh rằng các đồ thị đường đi và đồ thị đầy đủ đều là các đồ thị đường đi ngắn nhất.

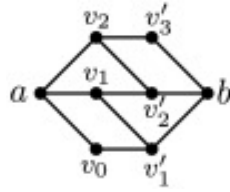
Mệnh đề 2.2.1. *Giả sử G là một đồ thị được tạo thành bằng cách nối t đường đi có độ dài bằng nhau lớn hơn 2, mỗi đường đi có chung hai đỉnh đầu là a và b , và tất cả các đỉnh bên trong của các đường đi này đều khác nhau.*

Khi đó $S(G, a, b) = \overline{K_t}$.

Trước khi tìm các đồ thị đường đi ngắn nhất có các cạnh, chúng tôi đưa ra nhận xét đơn giản sau đây, sẽ được sử dụng xuyên suốt trong bài báo cáo này.

Nhận xét 2.2.1. *Giả sử H là một đồ thị đường đi ngắn nhất. Nếu $U_1U_2U_3$ là một đường đi cảm sinh (induced path) trong H , thì U_1U_2 và U_2U_3 có các chỉ số khác nhau.*

Chúng tôi sử dụng quan sát này để xây dựng một họ đồ thị mà đồ thị đường đi ngắn nhất của chúng là các đường đi. Một ví dụ về phương pháp xây dựng này được minh họa trong hình 2.2 và được mô tả trong bổ đề 2.2.1. P_k sẽ ký hiệu cho một đường đi có độ dài k .



Hình 2.2: Đồ thị cơ sở G_5 sao cho $S(G_5, a, b) = P_5$.

Bổ đề 2.2.1. *Với mọi $k \geq 1$, đường đi P_k là một đồ thị đường đi ngắn nhất.*

Chứng minh: Đối với $k \geq 1$, ta định nghĩa đồ thị G_k như sau:

$$\begin{aligned} V(G_k) &= \{a, b, v_0, v_1, \dots, v_{\lfloor k/2 \rfloor}, v'_1, \dots, v'_{\lfloor k/2 \rfloor}\}, \\ E(G_k) &= \{av_i : 0 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor\} \cup \{v_i v'_i : 1 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor\} \\ &\quad \cup \{v_{i-1} v'_i : 1 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor\} \cup \{v'_i b : 1 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor\}. \end{aligned}$$

Người ta kiểm tra rằng $P_k \cong S(G_k, a, b)$.

Để có thể chứng minh bổ đề 2.2.1, trước tiên, ta sẽ xem xét các đường đi ngắn nhất từ a đến b trong G_k . Chúng ta thấy rằng mỗi đường đi ngắn nhất từ a đến b sẽ đi qua một dãy các đỉnh v_i và v'_i . Lúc này, ta cần chứng minh rằng mỗi đường đi ngắn nhất từ a đến b trong G_k tương ứng với một đỉnh của P_k và ngược lại.

Thật vậy, $P_k \cong S(G_k, a, b)$ do:

- Đường đi P_k có $k + 1$ đỉnh và k cạnh.
- Trong G_k , các đỉnh a và b được nối bởi một dãy các đỉnh trung gian v_i và v'_i , tạo thành một đường đi từ a đến b qua k cạnh.

Do đó, ta thấy rằng cấu trúc của G_k đảm bảo rằng đường đi ngắn nhất từ a đến b trong G_k có chiều dài đúng bằng k , và mỗi đỉnh của P_k tương ứng với một đường đi ngắn nhất từ a đến b .

Bổ đề 2.2.2. Với mọi $n \geq 1$, đồ thị đầy đủ K_n là một đồ thị đường đi ngắn nhất.

Chứng minh: Cho a và b là các đỉnh nằm trên một phía của phép phân đôi của đồ thị $K_{2,n}$. Khi đó $S(K_{2,n}, a, b) \cong K_n$.

- **Xét đường đi ngắn nhất trong $K_{2,n}$:**
 - Chọn a và b là hai đỉnh trong phần V_1 của $K_{2,n}$.
 - Mọi đường đi ngắn nhất từ a đến b trong $K_{2,n}$ sẽ đi qua các đỉnh trong V_2 . Cụ thể, nếu v_1, v_2, \dots, v_n là các đỉnh trong V_2 , thì các đường đi ngắn nhất từ a đến b là $a \rightarrow v_i \rightarrow b$ cho mỗi v_i .
- **Xét đồ thị đường đi ngắn nhất $S(K_{2,n}, a, b)$:**
 - Đồ thị đường đi ngắn nhất $S(K_{2,n}, a, b)$ là đồ thị có các đỉnh tương ứng với các đường đi ngắn nhất từ a đến b trong $K_{2,n}$.
 - Do mỗi đỉnh trong V_2 tương ứng với một đường đi ngắn nhất từ a đến b qua đỉnh đó, tập các đỉnh của $S(K_{2,n}, a, b)$ sẽ là $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.
- **Ta chứng minh $S(K_{2,n}, a, b)$ đẳng cấu với K_n :**

- Trong $S(K_{2,n}, a, b)$, hai đỉnh v_i và v_j được nối với nhau nếu và chỉ nếu có một cạnh nối v_i và v_j trong $K_{2,n}$.
- Vì các đỉnh v_1, v_2, \dots, v_n nằm trong phần V_2 của $K_{2,n}$, nên không có cạnh nào nối giữa chúng. Điều này dẫn đến đồ thị $S(K_{2,n}, a, b)$ là đồ thị đầy đủ K_n .

Trong thực tế, như chúng tôi trình bày trong định lý 2.2.1, bất kỳ đồ thị nào có đồ thị đường đi ngắn nhất là đồ thị đầy đủ đều phải rút gọn về $K_{2,n}$. Sau này chúng ta sẽ thấy rằng tồn tại các đồ thị rút gọn khác nhau có cùng đồ thị đường đi ngắn nhất.

Định lý 2.2.1. *Các phát biểu sau đây là tương đương:*

- (i) $S(G, a, b) = K_n$ với một số $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) Có chính xác n đường đi ngắn nhất từ a đến b trong G , mỗi cặp trong số đó khác nhau tại cùng một chỉ số.
- (iii) $K_{2,n}$ là đồ thị thu gọn của G .

1. Chứng minh rằng nếu (ii) sai thì (i) cũng sai:

- Giả sử rằng (ii) sai: Điều này có nghĩa là không phải tất cả n đường đi ngắn nhất từ a đến b trong G đều khác nhau tại cùng một chỉ số.
- Hệ quả: Giả sử có ba đỉnh U, V và W trong $S(G, a, b)$ sao cho các cạnh UV và VW có các chỉ số sai phân khác nhau. Điều này có nghĩa là đường đi từ U đến W khác nhau tại hai chỉ số, do đó không thể có cạnh giữa chúng trong $S(G, a, b)$.

Kết luận: Nếu không có cạnh giữa U và W , thì $S(G, a, b)$ không thể là một đồ thị đầy đủ K_n . Do đó, nếu (ii) sai thì (i) cũng sai.

2. Chứng minh rằng (ii) kéo theo (iii):

- Giả sử rằng (ii) đúng: Điều này có nghĩa là G có chính xác n đường đi ngắn nhất từ a đến b và tất cả các đường đi này đều khác nhau tại cùng một đỉnh i , với $d(a, b) = m$.

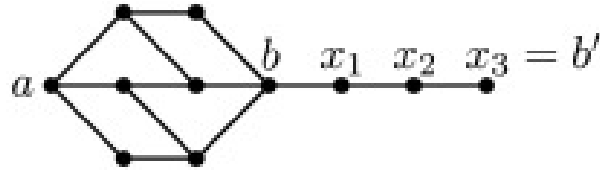
- Thu gọn G : Bắt đầu bằng cách loại bỏ tất cả các đỉnh và cạnh không nằm trong bất kỳ đường đi ngắn nhất nào từ a đến b . Kết quả là đồ thị G' , sẽ là một đường đi từ a đến b bao gồm các đỉnh $\{v_1, \dots, v_m\}$ với n bản sao của đỉnh i (tức là n đỉnh chỉ kết nối với v_{i-1} và v_{i+1}).
- Thu gọn thêm G' : Bằng cách hợp nhất tất cả các cạnh xuất hiện trong mọi đường đi ngắn nhất từ a đến b , ta sẽ có đồ thị $G'' = K_{2,n}$ với a và b là các đỉnh ở một phía của phép phân đôi.

Kết luận: Đồ thị thu gọn của G là $K_{2,n}$.

3. Chứng minh rằng (iii) kéo theo (i):

- Áp dụng bổ đề 2.2.2: Bổ đề này đã chứng minh rằng nếu G có đồ thị thu gọn là $K_{2,n}$, thì đồ thị đường đi ngắn nhất $S(G, a, b)$ tương đương với K_n .

Rõ ràng nếu hai đồ thị cho cùng một đồ thị thu gọn với một số cặp đỉnh nhất định thì chúng có cùng đồ thị đường đi ngắn nhất. Đối với các đồ thị G trong hình 2.2 và G' trong hình 2.3, có thể dễ dàng kiểm tra rằng $S(G, a, b) \cong S(G', a, b) \cong S(G', a, b')$. Sẽ rất hữu ích nếu có thể xây dựng các đồ thị khác nhau với cùng một đồ thị thu gọn. Kết quả tiếp theo liên quan đến, theo một nghĩa nào đó, một thao tác ngược lại của việc hình thành một đồ thị thu gọn. Một ví dụ về thao tác được mô tả sẽ bắt đầu với đồ thị G trong hình 2.2 để xây dựng đồ thị G' trong hình 2.3.



Hình 2.3: Đồ thị cơ sở mở rộng G' , với $S(G', a, b') = P_5$.

Mệnh đề 2.2.2. Nếu $H = S(G, a, b)$ và $d_G(a, b) = k$, thì đối với mọi $k' \geq k$ tồn tại một đồ thị G' với các đỉnh $a, b' \in G'$ sao cho $d_{G'}(a, b') = k'$ và $H \cong S(G', a, b')$.

Chứng minh:

- Nếu $k = k'$, thì kết quả đúng nếu ta để $G' = G$.

- Giả sử $k' > k$. Gọi $H = S(G, a, b)$. Xác định G' như sau:

$$V(G') = V(G) \cup \{x_1, x_2, \dots, x_{k'-k-1}, b'\},$$

$$E(H) = E(H) \cup \{bx_1, x_1x_2, \dots, x_{k'-k-2}x_{k'-k-1}, x_{k'-k-1}b'\}.$$

Rõ ràng rằng $H \cong S(G', a, b')$.

Giải thích: Nếu $k' = k$, chúng ta không cần thay đổi gì cả, chỉ cần chọn $G' = G$ làm đồ thị mới và kết quả vẫn đúng. Trong trường hợp $k' > k$, chúng ta mở rộng G bằng cách thêm đỉnh và cạnh để tạo ra một đường đi ngắn nhất từ a đến b' có độ dài k' . Cụ thể, chúng ta thêm các đỉnh trung gian $x_1, x_2, \dots, x_{k'-k-1}$ và đỉnh b' vào G , sau đó thêm các cạnh mới để mở rộng đường đi từ a đến b' . Điều này đảm bảo rằng $H \cong S(G', a, b')$, tức là H tương đương với đường đi ngắn nhất từ a đến b' trong G' có độ dài k' .

Chương 3

Tính chất, cấu trúc của đồ thị đường đi ngắn nhất

3.1. Phân tích và tổng hợp (Decompositions and sums)

Trong phần trước, chúng ta đã xây dựng một vài lớp đồ thị đặc biệt của các đồ thị đường đi ngắn nhất. Trong phần này, chúng ta sẽ thiết lập hai phương pháp để thu được các đồ thị đường đi ngắn nhất mới từ các đồ thị cũ. Cụ thể, chúng ta sẽ chỉ ra rằng họ đồ thị đường đi ngắn nhất được đóng dấu dưới hai phép toán là phép hợp rời rạc và tích Descartes.

Ví dụ, chúng ta xây dựng một đồ thị \hat{G} sao cho đồ thị đường đi ngắn nhất của \hat{G} là hợp rời rạc của hai bản sao của P_5 . Nhớ lại đồ thị G_5 trong hình 2.2 có $S(G_5, a, b) = P_5$. Đặt G_{51} và G_{52} là hai bản sao của G_5 được gán nhãn sao cho $v_1 \in G_{51}$ tương ứng với $v_2 \in G_{52}$. Xác định \hat{G} bằng cách lấy hợp của hai bản sao của G_5 , thêm hai đỉnh mới $\{a, b\}$, và thêm các cạnh mới $\{aa1, aa2, bb1, bb2\}$. Điều này được thể hiện trong hình 3.1. Khi đó $S(\hat{G}, a, b) = S(G_{51}, a_1, b_1) \cup S(G_{52}, a_2, b_2)$. Cách xây dựng cho mọi cặp đồ thị như trên là điểm chính của định lý tiếp theo.

Định lý 3.1.1. *Nếu H_1 và H_2 là các đồ thị đường đi ngắn nhất, thì $H_1 \cup H_2$ cũng là một đồ thị đường đi ngắn nhất.*

Chứng minh: Theo mệnh đề 2.2.2, ta có thể chọn các đồ thị cơ sở rời rạc G_i cho H_i , $i \in \{1, 2\}$, sao cho $\{a_i, b_i\} \in G_i$, với $d_{G_1}(a_1, b_1) = d_{G_2}(a_2, b_2)$ và với $H_i \cong S(G_i, a_i, b_i)$.

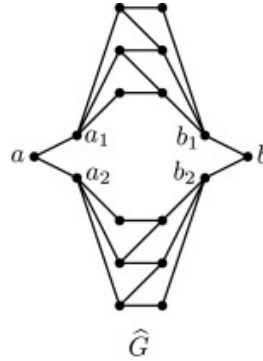
Xây dựng đồ thị G như sau:

$$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) \cup \{a, b\}$$

$$E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{aa_1, aa_2, b_1b, b_2b\}.$$

Rõ ràng từ cách xây dựng của G , mỗi đường đi ngắn nhất từ a đến b trong G tương ứng với một đường đi ngắn nhất từ a_1 đến b_1 trong G_1 hoặc một đường đi ngắn nhất từ a_2 đến b_2 trong G_2 . Ngoài ra, nếu hai đường đi ngắn nhất là kề nhau trong $S(G_i, a_i, b_i)$, $i \in \{1, 2\}$, chúng vẫn kề nhau trong $S(G, a, b)$.

Cuối cùng, nếu U_1 và U_2 là đường đi ngắn nhất trong G giữa a và b với $V(U_2) \cap V(G_1) \neq \emptyset$ và $V(U_1) \cap V(G_2) \neq \emptyset$, khi đó vì $a_1, b_1 \in V(U_1)$ và $a_2, b_2 \in V(U_2)$ nên $U_1 \neq U_2$. Do đó, ta kết luận rằng $H_1 \cup H_2$ là một đồ thị đường đi ngắn nhất.



Hình 3.1: Hai bản sao của đồ thị cơ sở được kết hợp như mô tả trong định lý 3.1.1.

Mệnh đề 3.1.1 liên quan đến cấu trúc của đồ thị con của một đồ thị đường đi ngắn nhất $H \cong S(G, a, b)$ được tạo ra bởi tất cả các đường đi ngắn nhất từ a đến b mà chứa một đỉnh v đã cho trước.

Mệnh đề 3.1.1. Cho G là một đồ thị liên thông với $a, b \in V(G)$ và $d = d(a, b) \geq 2$.

Giả sử $H = S(G, a, b)$ và v là một đỉnh của G nằm trên ít nhất một đường đi ngắn nhất từ a đến b .

Gọi H' là đồ thị con của H được tạo ra bởi tất cả các đỉnh tương ứng với các đường đi ngắn nhất từ a đến b mà chứa v . Khi đó:

$$H' \cong S(G, a, v) \square S(G, v, b)$$

Hơn nữa, nếu G_1 là bất kỳ đồ thị con của G chứa tất cả các đường đi ngắn nhất từ a đến v , và G_2 là bất kỳ đồ thị con của G chứa tất cả các đường đi ngắn nhất từ v đến b , thì H' đẳng cấu với:

$$S(G_1, a, v) \square S(G_2, v, b)$$

Chứng minh: Gọi H' là đồ thị con của H được tạo ra bởi tất cả các phần tử của $V(H)$ tương ứng với các đường đi ngắn nhất từ a đến b trong G chứa đỉnh v .

Các đường đi ngắn nhất từ a đến b này chính là các phép nối $T_{av} \circ T_{vb}$ trong đó T_{av} là một đoạn đường đi ngắn nhất từ a đến v và T_{vb} là một đoạn đường đi ngắn nhất từ v đến b . Do đó, chúng ta có thể thay thế các phần tử trong tập đỉnh của H' và các đường đi ngắn nhất trong G có dạng $T_{av} \circ T_{vb}$.

Theo định nghĩa, tập đỉnh của $S(G, a, v) \square S(G, v, b)$ chính là tập hợp các cặp có thứ tự (T_{av}, T_{vb}) trong đó T_{av} là một đỉnh của $S(G, a, v)$, và T_{vb} là một đỉnh của $S(G, v, b)$.

Rõ ràng rằng ánh xạ $f : V(H') \rightarrow V(S(G, a, v) \square S(G, v, b))$ được cho bởi $f(T_{av} \circ T_{vb}) = (T_{av}, T_{vb})$, là một ánh xạ một một. Chúng ta khẳng định rằng ánh xạ này bảo toàn cạnh.

Thật vậy, giả sử $(U_1, R_1) \sim (U_2, R_2)$ trong $S(G, a, v) \square S(G, v, b)$. Theo định nghĩa của tích Descartes, hoặc (i) $U_1 \sim U_2$ trong $S(G, a, v)$ và $R_1 = R_2$ hoặc (ii) $U_1 = U_2$ và $R_1 \sim R_2$ trong $S(G, v, b)$. Trong trường hợp (i), U_1 và U_2 khác nhau chỉ ở một chỉ số trong khi $V(R_1) = V(R_2)$, do đó $U_1 \circ R_1 \sim U_2 \circ R_2$ trong H' . Một lập luận tương tự áp dụng trong trường hợp (ii). Giả sử bây giờ rằng (U_1, R_1) không bằng hoặc kề với (U_2, R_2) trong $S(G, a, v) \square S(G, v, b)$. Khi đó, một trong những trường hợp sau xảy ra: $U_1 = U_2$, trong trường hợp đó R_1 và R_2 khác nhau ít nhất hai chỉ số; $R_1 = R_2$ trong trường hợp đó U_1 và U_2 khác nhau ít nhất hai chỉ số; hoặc $U_1 \neq U_2$ và $R_1 \neq R_2$ trong trường hợp đó U_1 và R_1 khác nhau với U_2 và R_2 một chỉ số tương ứng. Trong mỗi trường hợp này, $R_1 \circ U_1$ và $R_2 \circ U_2$ khác nhau ít nhất hai chỉ số và do đó không kề nhau, như yêu cầu.

Để hoàn thành chứng minh, chúng ta chỉ cần nhận thấy $S(G, a, v) \cong S(G_1, a, v)$ và $S(G, v, b) \cong S(G_2, v, b)$.

Với hai đồ thị G_1 và G_2 có tập đỉnh sao cho $V(G_1) \cap V(G_2) = \{c\}$, phép tổng một (one-sum) của G_1 và G_2 được định nghĩa là đồ thị G với tập đỉnh $V(G_1) \cup V(G_2)$ và tập cạnh $E(G_1) \cup E(G_2)$. Định lý 3.1.2 sẽ mô tả đồ thị đường đi ngắn nhất của phép tổng một của hai đồ thị.

Định lý 3.1.2. Cho G_1 và G_2 là các đồ thị với tập đỉnh sao cho $V(G_1) \cap V(G_2) = c$.

Gọi G là phép tổng một của G_1 và G_2 . Khi đó, với mọi $a \in V(G_1) \setminus c$ và mọi $b \in V(G_2) \setminus c$, ta có:

$$S(G, a, b) \cong S(G_1, a, c) \square S(G_2, c, b).$$

Chứng minh: Vì c là đỉnh cắt, mọi đường đi ngắn nhất từ a đến b trong G đều phải chứa c . Áp dụng mệnh đề 3.1.1, chúng ta có điều phải chứng minh.

Hệ quả 3.1.1. Cho H_1 và H_2 là đồ thị đường đi ngắn nhất. Khi đó $H_1 \square H_2$ cũng là đồ thị đường đi ngắn nhất.

Chứng minh:

- Đặt $H_1 = S(G_1, a_1, b_1)$ và $H_2 = S(G_2, a_2, b_2)$, trong đó G_1 và G_2 là các đồ thị đã được rút gọn.
- Gộp hai đỉnh b_1 của H_1 và a_2 của H_2 lại thành một đỉnh chung trong đồ thị mới. Điều này tạo ra một đồ thị mới $S(G, a_1, b_2)$.
- Đồ thị $S(G, a_1, b_2)$ này được tạo ra từ phép tích Descartes của hai đồ thị đường đi ngắn nhất ban đầu H_1 và H_2 , và do đó, nó cũng là một đồ thị đường đi ngắn nhất.

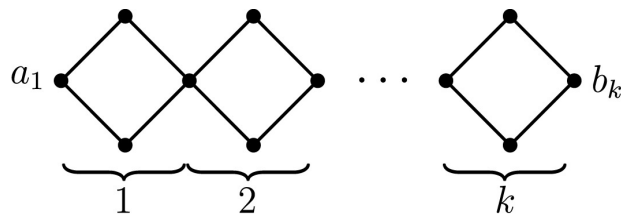
Việc xây dựng định lý 3.1.2 dẫn đến một họ các đồ thị mà đồ thị đường đi ngắn nhất của chúng là các siêu khối (hypercubes). Gọi J_k là đồ thị được tạo thành bằng cách thực hiện phép tổng một của k bản sao của C_4 (một chu trình đơn với 4 đỉnh) như sau. Với $i = 1, \dots, k$ gọi a_i và b_i là các đỉnh đối cực (antipodal vertices) trong bản sao thứ i của C_4 . Tạo thành J_k bằng cách gộp hai đỉnh b_i và a_{i+1} cho $i = 1, \dots, k-1$. Xem hình 5.

Hệ quả 3.1.2. Với J_k được định nghĩa ở trên, đồ thị đường đi ngắn nhất $S(J_k, a_1, b_k) \cong Q_k$ trong đó Q_k là siêu khối có k chiều.

Chứng minh: Để chứng minh hệ quả 3.1.2, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp quy nạp. Trước tiên, chúng ta cần chứng minh rằng đẳng thức $S(J_1, a_1, b_1) \cong Q_1$ là đúng.

- Với $k = 1$, ta có $S(J_1, a_1, b_1) \cong Q_1$, vì đồ thị J_1 chỉ bao gồm một chu trình 4 đỉnh, tương ứng với một hypercube Q_1 có một đỉnh và không có cạnh.
- Tiếp theo, giả sử rằng $S(J_k, a_1, b_k) \cong Q_k$ cho một số nguyên $k \geq 1$. Ta sẽ chứng minh rằng $S(J_{k+1}, a_1, b_{k+1}) \cong Q_{k+1}$.
- Xây dựng J_{k+1} từ J_k bằng cách thêm một chu trình 4 đỉnh khác và nối nó với J_k thông qua hai đỉnh tương đồng (antipodal). Do đó, J_{k+1} là một đồ thị mà ta có thể xây dựng từ J_k bằng cách thêm một chu trình 4 đỉnh nối vào chu trình 4 đỉnh của J_k .
- Tương tự, Q_{k+1} được xây dựng từ Q_k bằng cách thêm một chu trình 4 đỉnh nối vào một chu trình 4 đỉnh của Q_k (hay một hypercube Q_k). Bằng cách sử dụng giả thiết quy nạp và tính chất đồng cấu của đồ thị đường đi ngắn nhất, ta kết luận rằng $S(J_{k+1}, a_1, b_{k+1}) \cong Q_{k+1}$.

Do đó, theo phương pháp quy nạp, hệ quả 3.1.2 được chứng minh là đúng cho mọi $k \geq 1$.



Hình 3.2: Đồ thị cơ sở J_k có đồ thị đường đi ngắn nhất là siêu khối.

Kết quả tiếp theo cung cấp một phép phân tích của đồ thị đường đi ngắn nhất thành một tập hợp rời rạc của các phép tổng một với các cạnh bổ sung. Lưu ý rằng

định lý sau đây áp dụng cho tất cả các giá trị $1 \leq i < d(a, b)$. Do đó, thực sự có $d(a, b) - 1$ phép phân tích khác nhau của dạng này.

Định lý 3.1.3. *Gọi H là đồ thị đường đi ngắn nhất với đồ thị cơ sở rút gọn (G, a, b) , trong đó $d(a, b) \geq 2$. Cố định một chỉ số i , với $1 \leq i < d(a, b)$.*

Gọi $\{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}\}$ là tập hợp gồm k đỉnh trong $V(G)$ có khoảng cách i từ a , và gọi E_i là tập hợp tất cả các cạnh $UW \in E(H)$ có chỉ số khác biệt là i . Khi đó:

(a) *Kết quả của việc xóa các cạnh E_i khỏi H thu được một đồ thị có k thành phần liên thông rời rạc, mỗi thành phần là một tích Descartes:*

$$H \setminus E_i = \bigcup_{j=1}^k D_{ij},$$

trong đó $D_{ij} = S(G, a, v_{ij}) \square S(G, v_{ij}, b)$

(b) *Đối với bất kỳ hai đồ thị con D_{ij} và $D_{i\ell}$, các cạnh trong E_i giữa $V(D_{ij})$ và $V(D_{i\ell})$ tạo thành một phép ghép cặp từng phần.*

Chứng minh:

(a) Với mỗi $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, từ mệnh đề 3.1.1 ta biết rằng tập hợp các đỉnh trong H tương ứng với các đường đi ngắn nhất từ a đến b chứa v_{ij} sẽ tạo thành một đồ thị con đẳng cấu với $S(G, a, v_{ij}) \square S(G, v_{ij}, b)$.

- Vì mỗi đường đi ngắn nhất từ a đến b trong G chỉ chứa duy nhất một đỉnh v_{ij} trong tập $\{v_{i1}, \dots, v_{ik}\}$, nên các đồ thị con này trong H là không giao nhau (tức là chúng không chia sẻ đỉnh nào với nhau).
- Hơn nữa, nếu có một cặp đỉnh U và W kề nhau trong H mà các đường đi ngắn nhất từ a đến b tương ứng của chúng chứa các đỉnh khác nhau trong tập $\{v_{i1}, \dots, v_{ik}\}$, thì các đỉnh này phải khác nhau ở chỉ số i . Kết luận là cạnh UW có chỉ số khác biệt là i và nằm trong tập E_i .

Từ các điều trên, chúng ta nhận thấy rằng $H \setminus E_i$ có k thành phần liên thông rời rạc, mỗi thành phần là một tích Descartes.

- (b) Mỗi đỉnh U trong D_{ij} tương ứng với một đường đi có đỉnh v_{ij} ở chỉ số i , và mỗi đỉnh W trong D_{il} tương ứng với một đường đi có đỉnh v_{il} ở chỉ số i . Vì vậy, với mỗi đỉnh U trong D_{ij} , sẽ có tối đa một đỉnh trong D_{il} kề với U .

Điều này chứng tỏ rằng các cạnh trong E_i giữa $V(D_{ij})$ và $V(D_{il})$ tạo thành một phép ghép cặp từng phần.

Lưu ý rằng chu trình 4 đỉnh xuất hiện rất thường xuyên trong tích Descartes: Lấy bất kỳ cạnh nào UW trong H_1 và bất kỳ cạnh nào XY trong H_2 . Khi đó, tập hợp các đỉnh $\{(U, X), (U, Y), (W, X), (W, Y)\}$ tạo thành một chu trình 4 đỉnh trong $H_1 \square H_2$. Từ định lý 3.1.3 phần (a) và trong thực tế, chu trình 4 đỉnh phổ biến trong tích Descartes của các đồ thị, chúng ta kết luận rằng

Nhận xét 3.1.1. *Các chu trình 4 đỉnh xuất hiện phổ biến trong các đồ thị đường đi ngắn nhất.*

Xét về thực tế, định lý 3.1.3 cho chúng ta biết rằng, khi xóa các cạnh với chỉ số khác nhau trong đồ thị đường đi ngắn nhất, chúng ta sẽ thu được các thành phần đồ thị rời rạc dưới dạng tích Descartes của các đồ thị đường đi ngắn nhất con. Điều này gợi ý rằng nếu một đồ thị đường đi ngắn nhất không có các chu trình 4 đỉnh, thì cấu trúc của nó sẽ đơn giản hơn và dễ hiểu hơn. Ngược lại, nếu không đặt ra giới hạn này, việc nghiên cứu các đồ thị đường đi ngắn nhất sẽ trở nên phức tạp hơn nhiều.

Để kết thúc phần này, chúng ta sẽ thử một phương pháp khác để kết hợp các đồ thị cơ sở. Giả sử G_1 và G_2 là các đồ thị với tập cạnh sao cho $E(G_1) \cap E(G_2) = \{e\}$, trong đó $e = xy$, và $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x, y\}$. Khi đó, phép tổng hai của G_1 và G_2 được định nghĩa là đồ thị G với tập đỉnh $V(G_1) \cup V(G_2)$ và tập cạnh $E(G_1) \cup E(G_2)$. Định lý 3.1.4 sẽ mô tả đồ thị đường đi ngắn nhất của phép tổng hai của hai đồ thị này.

Định lý 3.1.4. *Cho G_1 và G_2 là các đồ thị có tập cạnh sao cho $E(G_1) \cap E(G_2) = \{e\}$, trong đó $e = xy$, và $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x, y\}$.*

Gọi G là phép tổng hai của G_1 và G_2 . Cho $a \in V(G_1)$ và $b \in V(G_2)$ sao cho $\{a, b\} \cap \{x, y\} = \emptyset$. Khi đó $S(G, a, b)$ đẳng cấu với một trong các trường hợp sau:

- (i) Hợp của các đồ thị rời rạc $(S(G_1, a, x) \square S(G_2, x, b)) \cup (S(G_1, a, y) \square S(G_2, y, b))$ cộng thêm các cạnh bổ sung tạo thành một đoạn ghép giữa hai đồ thị, trong trường hợp $d(a, x) = d(a, y)$ và $d(x, b) = d(y, b)$;
- (ii) $S(G_1, a, x) \square S(G_2, x, b)$, trong trường hợp $d(a, x) \leq d(a, y)$ và $d(x, b) < d(y, b)$, hoặc $d(a, x) < d(a, y)$ và $d(x, b) \leq d(y, b)$;
- (iii) $S(G_1, a, y) \square S(G_2, y, b)$, trong trường hợp $d(a, y) \leq d(a, x)$ và $d(y, b) < d(x, b)$, hoặc $d(a, y) < d(a, x)$ và $d(y, b) \leq d(x, b)$;
- (iv) và ngược lại $(S(G_1, a, x) \square S(G_2, x, b)) \cup (S(G_1, a, y) \square S(G_2, y, b))$, trong đó các đỉnh chung của $S(G_1, a, x) \square S(G_2, x, b)$ và $S(G_1, a, y) \square S(G_2, y, b)$ tương ứng chính xác với các đường đi ngắn nhất từ a đến b chứa cạnh e .

Chứng minh. Lưu ý rằng mỗi đường đi ngắn nhất từ a đến b đều có giao khác rỗng với x, y .

Trường hợp (i): Giả sử, $i = d(a, x) = d(a, y)$ và $d(x, b) = d(y, b)$. Trong trường hợp này, các đỉnh x và y là duy nhất ở khoảng cách i từ a trong G được sử dụng trong bất kỳ đường đi ngắn nhất nào từ a đến b .

• Gọi E_i là tập hợp các cạnh trong $S(G, a, b)$ có chỉ số khác nhau là i . Nếu chúng ta nhận thấy rằng $S(G, a, x)$, $S(G, a, y)$, $S(G, x, b)$ và $S(G, y, b)$ tương ứng lần lượt với $S(G_1, a, x)$, $S(G_1, a, y)$, $S(G_2, x, b)$ và $S(G_2, y, b)$, thì kết luận ngay lập tức từ ý (a) của định lý 3.1.3, là:

$$S(G, a, b)/E_i \cong (S(G_1, a, x) \square S(G_2, x, b)) \cup (S(G_1, a, y) \square S(G_2, y, b)).$$

• Từ phần (b) của cùng một định lý, ta có thể suy ra rằng các cạnh nối các thành phần đồ thị không giao nhau $S(G_1, a, x) \square S(G_2, x, b)$ và $S(G_1, a, y) \square S(G_2, y, b)$ tạo thành một đoạn ghép.

Trường hợp (ii): $d(a, x) \leq d(a, y)$ và $d(x, b) < d(y, b)$, hoặc là $d(a, x) < d(a, y)$ và $d(x, b) \leq d(y, b)$. Mọi đường đi ngắn nhất từ a đến b đều chứa đỉnh x , và kết quả được suy ra trực tiếp từ định lý 3.1.2.

Trường hợp (iii): $d(a, y) \leq d(a, x)$ và $d(y, b) < d(x, b)$, hoặc là $d(a, y) < d(a, x)$ và $d(y, b) \leq d(x, b)$. Mọi đường đi ngắn nhất từ a đến b đều chứa đỉnh y , và kết quả được suy ra trực tiếp từ định lý 3.1.2.

Trường hợp (iv): Xét trường hợp khi $d(a, x) > d(a, y)$ và $d(x, b) < d(y, b)$.

Vì $d(x, y) = 1$, ta có $d(a, x) = d(a, y) + 1$ và $d(x, b) + 1 = d(y, b)$. Theo mệnh đề 3.1.1, các đỉnh của $S(G, a, b)$ tương ứng với các đường đi chứa x tạo ra một đồ thị con đẳng cấu với $S(G1, a, x) \square S(G2, x, b)$, và các đỉnh tương ứng với các đường đi chứa y tạo ra một đồ thị con đẳng cấu với $S(G1, a, y) \square S(G2, y, b)$. Lưu ý rằng một số đường đi ngắn nhất từ a đến b chứa cạnh $e = xy$, và do đó hai đồ thị con được mô tả ở trên có giao nhau.

Giờ hãy xem U là một đỉnh trong $V(S(G, a, b))$ tương ứng với một đường đi ngắn nhất từ a đến b chứa x nhưng không chứa y , và W là một đỉnh trong $V(S(G, a, b))$ tương ứng với một đường đi ngắn nhất từ a đến b chứa y nhưng không chứa x . Khi đó U và W khác nhau cả về chỉ số $d(a, y)$ và chỉ số $d(a, y) + 1$, và do đó không kề nhau. Trường hợp khi $d(a, x) < d(a, y)$ và $d(x, b) > d(y, b)$ được xử lý tương tự.

Lưu ý rằng trong chứng minh của định lý 3.1.4, cạnh e chỉ được sử dụng trong Trường hợp (iv). Do đó, nếu Trường hợp (i), (ii) hoặc (iii) đúng với phát biểu của định lý đó thì $S(G \setminus e, a, b) \cong S(G, a, b)$. Cũng lưu ý rằng các kết quả tương tự như định lý 3.1.4 có thể thu được bằng cách xem xét việc nối hai đồ thị ở hai đỉnh không có cạnh nào giữa hai đỉnh này; hoặc thậm chí là nối các đồ thị trên nhiều hơn hai đỉnh.

3.2. Đồ thị đường đi ngắn nhất với chu vi tối thiểu là 5

Trong phần này, chúng tôi phân loại hoàn toàn tất cả các đồ thị đường đi ngắn nhất có chu vi từ 5 trở lên. Trong quá trình này, chúng tôi mô tả chính xác chu trình nào là đồ thị đường đi ngắn nhất và chúng tôi chỉ ra rằng đồ thị Claw không phải là đồ thị đường đi ngắn nhất. Quan sát đơn giản sau đây sẽ đóng vai trò quan trọng.

Mệnh đề 3.2.1. *Cho H là một đồ thị đường đi ngắn nhất.*

Cho U_1, U_2, U_3 là ba đỉnh phân biệt trong H sao cho $U_1U_2U_3$ là một đường đi cảm sinh (induced path).

Nếu sự chênh lệch giữa các chỉ số của U_1U_2 và U_2U_3 là i và j , trong đó $j \notin$

$\{i-1, i, i+1\}$, thì H có một chu trình cảm sinh C_4 chứa $U_1U_2U_3$.

Chứng minh: Đặt

$$U_1 = av_1 \dots v_p b,$$

$$U_2 = av_1 \dots v'_i \dots v_p b,$$

$$U_3 = av_1 \dots v_{i-1} v'_i v_{i+1} \dots v'_j \dots v_p b.$$

Khi đó tồn tại một đường đi ngắn nhất $U_4 = av_1 \dots v'_j \dots v_p b$ trong G , tạo thành chu trình 4 đỉnh (U_1, U_2, U_3, U_4) trong G .

Kết quả tiếp theo khẳng định rằng bất kỳ đồ thị đường đi ngắn nhất nào chứa một chu trình cảm sinh lẻ có số đỉnh nhiều hơn C_3 sẽ bắt buộc chứa một chu trình cảm sinh 4 đỉnh được tạo ra từ các đỉnh cụ thể trong đồ thị. Định lý 19 sau đây đưa ra một kết quả tương tự cho các đồ thị cảm sinh Claw.

Bổ đề 3.2.1. Cho H là một đồ thị đường đi ngắn nhất chứa một chu trình cảm sinh C_k với k lẻ và $k > 3$. Khi đó, H chứa một chu trình cảm sinh C_4 .

Chứng minh: Giả sử (U_1, \dots, U_k) là một chu trình C_k cảm sinh với k lẻ lớn hơn 3 trong H .

Giả sử rằng H không chứa một chu trình C_4 cảm sinh.

- Gọi i là chỉ số khác biệt của U_1U_2 .
- Theo mệnh đề 3.2.1, chỉ số khác biệt của U_2U_3 có thể là $i-1$ hoặc $i+1$. Đặc biệt, nếu i là số lẻ, thì U_2 và U_3 khác nhau ở chỉ số chẵn, và nếu i là số chẵn, thì U_2 và U_3 khác nhau ở chỉ số lẻ. Điều này cũng đúng ở mọi bước, tức là tính chẵn lẻ của chỉ số khác biệt luân phiên xung quanh chu trình. Điều này là không thể nếu k là số lẻ.

Ngược lại, C_3 và mọi chu trình chẵn là đồ thị đường đi ngắn nhất.

Định lý 3.2.1. C_k là đồ thị đường đi ngắn nhất khi và chỉ khi k chẵn hoặc $k = 3$.

Chứng minh: Chúng ta đã thấy rằng C_3 và C_4 là các đồ thị đường đi ngắn nhất, xem hình 2.1.1 và hệ quả 3.1.2. Từ bổ đề 3.2.1, suy ra rằng C_k không phải là một đồ thị đường đi ngắn nhất cho k lẻ lớn hơn 3.

Bây giờ chúng ta xây dựng một đồ thị mà đồ thị đường đi ngắn nhất của nó là C_{2n} . Định nghĩa G với $2n + 2$ đỉnh như sau:

$$\begin{aligned} V(G) &= \{a, b, v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v'_0, v'_1, \dots, v'_{n-1}\} \\ E(G) &= \{av_i : i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{bv'_i : i \in \mathbb{Z}_n\} \\ &\quad \cup \{v_iv'_i : i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{v_iv'_{i+1} : i \in \mathbb{Z}_n\}, \end{aligned}$$

trong đó chỉ số được tính modulo n . Có chính xác $2n$ đường đi ngắn nhất từ a đến b của G , cụ thể là tập hợp $\{av_iv'_ib, av_iv'_{i+1}b : i = 0, \dots, n - 1\}$. Dễ dàng kiểm tra rằng đồ thị đường đi ngắn nhất $S(G, a, b) = C_{2n}$.

Định lý 3.2.2. *Nếu một đồ thị đường đi ngắn nhất H có một đồ thị cảm sinh Claw $K_{1,3}$, thì H phải có một chu trình 4 chứa hai cạnh của đồ thị cảm sinh Claw đó. Đặc biệt, $K_{1,3}$ không phải là một đồ thị đường đi ngắn nhất.*

Chứng minh: Giả sử H là một đồ thị đường đi ngắn nhất có chứa một đồ thị cảm sinh Claw với các đỉnh U_0, U_1, U_2, U_3 , sao cho U_0 kề với U_1, U_2 , và U_3 .

- Gọi i_j là chỉ số khác nhau của U_0U_j với $j \in \{1, 2, 3\}$. Vì đồ thị Claw này là cảm sinh, nên các chỉ số phải khác nhau.
- Giả sử rằng không có ba đỉnh nào của đồ thị Claw này thuộc về một chu trình cảm sinh 4 đỉnh. Theo mệnh đề 3.2.1, vì U_0, U_1, U_2 không thuộc về một chu trình 4 cảm sinh, suy ra $i_2 = i_1 \pm 1$.
- Không mất tính tổng quát, giả sử $i_2 = i_1 + 1$. Tương tự, vì U_0, U_1, U_3 không thuộc về một chu trình 4 cảm sinh, ta có $i_3 = i_1 \pm 1$. Vì các chỉ số i_j khác nhau, nó phải là $i_3 = i_1 - 1$.

Theo mệnh đề 3.2.1, suy ra rằng U_0, U_2, U_3 nằm trong một chu trình 4 cảm sinh trong $S(G, a, b)$.

Một hệ quả trực tiếp của định lý 3.2.2 là nhận xét sau đây.

Nhận xét 3.2.1. *Nếu H vừa là một cây vừa là một đồ thị đường đi ngắn nhất thì H là một đường đi.*

Tiếp theo, chúng ta sẽ thiết lập một đặc trưng khi C_k có thể là một đồ thị con cảm sinh của một số đồ thị đường đi ngắn nhất.

Định lý 3.2.3. C_k là đồ thị con cảm sinh của một đồ thị đường đi ngắn nhất nào đó khi và chỉ khi $k \neq 5$.

Chứng minh: Giả sử ngược lại rằng $S(G, a, b)$ chứa một chu trình cảm sinh C_5 , gọi là $\tilde{U} = (U_1, U_2, U_3, U_4, U_5)$.

Xét các chỉ số khác nhau dọc theo các cạnh của chu trình này. Mỗi chỉ số khác nhau xuất hiện ít nhất hai lần để quay trở lại đường đi ngắn nhất ban đầu. Do đó, một chu trình 5 chỉ có thể sử dụng tối đa 2 chỉ số khác nhau.

Hơn nữa, nếu một chỉ số khác nhau xuất hiện hai lần liên tiếp, giả sử cho U_1U_2 và U_2U_3 , thì cạnh U_1U_3 cũng nằm trong $S(G, a, b)$. Vì vậy, C_5 không phải là một đồ thị con cảm sinh của một đồ thị đường đi ngắn nhất.

Để kết thúc phần chứng minh, chúng ta cho thấy rằng với bất kỳ $k \neq 5$, C_k là một đồ thị con cảm sinh của một số đồ thị đường đi ngắn nhất. Trong định lý 3.2.1, chúng ta đã thấy rằng C_k là một đồ thị đường đi ngắn nhất khi $k = 3$ hoặc khi k là số chẵn. Do đó, chúng ta chỉ cần xem xét k lẻ lớn hơn 6.

Giả sử rằng $k = 2p + 1$ và gọi G_{2p+1} là một đồ thị với:

$$\begin{aligned} V(G_{2p+1}) &= \{a, b, v_1, v_2, \dots, v_p, v'_1, v'_2, \dots, v'_p, v''_1\} \\ E(G_{2p+1}) &= \{av_1, av'_1, bv_p, bv'_p, av''_1, v''_1v'_2, v'_1v_2\} \\ &\quad \cup \{v_i v_{i+1}, v'_i v'_{i+1}, v_i v'_{i+1}, v'_i v_{i+1} : i \in \{1, 2, \dots, p-1\}\} \end{aligned}$$

Khi đó, các đường đi sau đây của G_{2p+1} tạo ra một C_{2p+1} cảm sinh trong $S(G_{2p+1}, a, b)$:

$$\begin{aligned}
& av_1v_2v_3 \cdots v_p b, \\
& av'_1v_2v_3 \cdots v_p b, \\
& av'_1v'_2v_3 \cdots v_p b, \\
& \quad \cdots, \\
& av'_1v'_2v'_3 \cdots v'_p b, \\
& av''_1v'_2v'_3 \cdots v'_p b, \\
& av''_1v_2v'_3 \cdots v'_p b, \\
& av''_1v_2v_3v'_4 \cdots v'_p b, \\
& \quad \cdots, \\
& av''_1v_2v_3 \cdots v_{p-1}v'_p b, \\
& av_1v_2v_3 \cdots v_{p-1}v'_p b
\end{aligned}$$

Định lý 3.2.4. *Giả sử H là một đồ thị với chu vi $\text{girth}(H) \geq 5$. Khi đó, H là một đồ thị đường đi ngắn nhất khi và chỉ khi mỗi thành phần không tầm thường (nontrivial component) của H là một đường đi hoặc một chu trình có độ dài chẵn lớn hơn 5.*

Chứng minh: Nếu $\text{girth}(H) \geq 5$, theo định lý 3.2.2 không có đỉnh $U \in V(H)$ có bậc $d_H(U) \geq 3$. Do đó, mỗi đỉnh trong H phải có bậc 0, 1 hoặc 2. Từ đó, suy ra rằng mỗi thành phần không tầm thường của H là một đường đi hoặc chu trình. Theo bổ đề 3.2.1, một chu trình lẻ bất kỳ đều buộc phải chứa một C_4 cảm sinh. Do đó, tất cả các chu trình này phải có độ dài chẵn.

Theo bổ đề 2.2.1, một đường đi có thể có bất kỳ độ dài nào. Trong định lý 3.2.1, đã được chỉ ra cách xây dựng một đồ thị đường đi ngắn nhất là một chu trình có độ dài chẵn. Cuối cùng, theo định lý 3.1.1, hợp của bất kỳ tập hợp nào của các đồ thị đường đi ngắn nhất cũng lại là một đồ thị đường đi ngắn nhất.

Và bây giờ, có thể nói các đồ thị đường đi ngắn nhất có chu vi 5 trở lên đã được mô tả một cách hoàn chỉnh. Bước tiếp theo, chúng ta sẽ hướng tới việc mô tả các đặc trưng của đồ thị đường đi ngắn nhất có chu vi 4. Sự xuất hiện phổ biến của các tích Descartes trong các đồ thị đường đi ngắn nhất thường chỉ ra rằng các chu trình

4 đỉnh (4-cycle) sẽ đóng vai trò quan trọng và thách thức trong việc nghiên cứu các đồ thị này. Chúng tôi bắt đầu nghiên cứu bằng cách mô tả các đồ thị đường đi ngắn nhất của biểu đồ lưới, mà cuối cùng được biết đến là các ví dụ có cấu trúc đẹp và dễ hiểu của các đồ thị đường đi ngắn nhất có chu vi bốn.

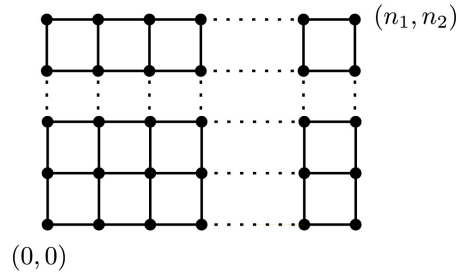
3.3. Đường đi ngắn nhất trong đồ thị lưới

Một đồ thị lưới m -chiều là tích Descartes của m đường đi, $P_{n_1} \square \cdots \square P_{n_m}$. Chúng ta ký hiệu các đỉnh của $P_{n_1} \square \cdots \square P_{n_m}$ với hệ tọa độ Descartes thông thường trên lưới m -chiều, vì vậy tập hợp các đỉnh được cho bởi:

$$V(P_{n_1} \square \cdots \square P_{n_m}) = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq x_1 \leq n_1, \dots, 0 \leq x_m \leq n_m\}.$$

Trong phần tiếp theo, chúng ta xem xét các đoạn geodesic giữa hai đỉnh đường kính (diametric vertices) của một đồ thị lưới, tức là các đường đi ngắn nhất giữa gốc và đỉnh (n_1, \dots, n_m) . Bởi vì hai đỉnh này luôn luôn là các đỉnh được xem xét cho các đồ thị lưới, chúng ta sẽ ký hiệu đồ thị đường đi ngắn nhất của $P_{n_1} \square \cdots \square P_{n_m}$ theo cách đơn giản là $S(P_{n_1} \square \cdots \square P_{n_m})$. Một đồ thị lưới hai chiều và các đỉnh đường kính được xem xét được hiển thị trong hình 3.3.

Để thuận tiện trong ký hiệu, chúng ta sẽ xem xét các đường đi ngắn nhất trong $P_{n_1} \square \cdots \square P_{n_m}$ như là một chuỗi các bước di chuyển qua lưới theo cách sau đây. Đối với $1 \leq i \leq m$, gọi e_i là vectơ cơ sở thứ i trong \mathbb{R}^m . Một bước di chuyển từ một đỉnh $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) \in V(P_{n_1} \square \cdots \square P_{n_m})$ theo hướng e_i có nghĩa là đỉnh tiếp theo trên đường đi là $(x_1, \dots, x_i + 1, \dots, x_m)$.



Hình 3.3: $P_{n_1} \square P_{n_2}$

Định lý 3.3.1. Đồ thị đường đi ngắn nhất của $P_{n_1} \square \dots \square P_{n_m}$ đẳng cấu với một đồ thị con cảm sinh của đồ thị lưới số nguyên Z^M , trong đó $M = \sum_{i=2}^m (i-1) \cdot n_i$.

Chứng minh: Xem xét đồ thị lưới m chiều $P_{n_1} \square \dots \square P_{n_m}$, với $B_{n_1, \dots, n_m} \subset Z_m^N$ là tập hợp tất cả các dãy m -ary tương ứng với các đường đi ngắn nhất của nó. Định nghĩa một ánh xạ $\phi : B_{n_1, \dots, n_m} \rightarrow Z^M$. Đối với một dãy $\tilde{U} \in B_{n_1, \dots, n_m}$, đặt

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{U}) := & (a_{121}, \dots, a_{12n_2}, \\ & a_{131}, \dots, a_{13n_3}, a_{231}, \dots, a_{23n_3}, \\ & \dots, \\ & a_{1m1}, \dots, a_{1mn_m}, a_{2m1}, \dots, a_{2mn_m}, \dots, a_{(m-1)m1}, \dots, a_{(m-1)mn_m}), \end{aligned}$$

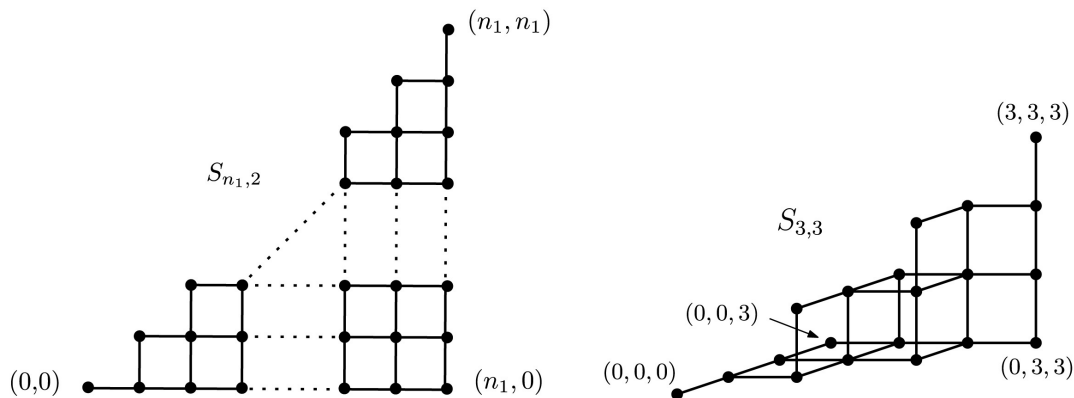
trong đó a_{ijk} là số lượng i theo sau j thứ k trong \tilde{U} . Ví dụ, nếu $\tilde{U} = 32121231 \in B_{3,3,2}$, thì $\phi(\tilde{U}) = (3, 2, 1, 3, 1, 3, 0)$. Ngoài ra, ϕ ánh xạ chuỗi $1 \dots 12 \dots 2 \dots m \dots m$ vào gốc tọa độ. Do đó, ϕ ánh xạ B_{n_1, \dots, n_m} vào một tập hợp các vector $(a_{ijk}) \in Z^M$ sao cho $2 \leq j \leq m$, $1 \leq i < j$, và $1 \leq k \leq n_j$, theo thứ tự đã chỉ định. Lưu ý rằng đối với tất cả các i, j, k , $a_{ijk} \leq n_i$ vì có tối đa n_i i theo sau một j , và $a_{ijk} \geq a_{ij(k+1)}$ vì ít nhất có bằng số lượng i xuất hiện sau j thứ k so với j thứ $(k+1)$.

Để chứng minh rằng ϕ là một ánh xạ đơn ánh, xem xét hai dãy khác biệt $\tilde{U} = s_1 \dots s_N$ và $\tilde{W} = s'_1 \dots s'_N$ trong B_{n_1, \dots, n_m} , và ký hiệu ảnh của chúng dưới ϕ là A và A' , tương ứng. Đặt r là chỉ số đầu tiên mà các phần tử của \tilde{U} và \tilde{W} khác nhau. Mà không mất tính tổng quát, giả sử rằng $s_r = j > s'_r = i$ và r là chỉ số xuất hiện thứ k của j trong \tilde{U} . Khi đó, xuất hiện thứ k của j trong \tilde{W} sẽ xuất hiện sau $s'_r = i$, vì vậy số lượng i trong \tilde{W} theo sau xuất hiện thứ k của j sẽ ít nhất là một ít hơn so với dãy \tilde{U} . Do đó, nếu a_{ijk} và a'_{ijk} là các thành phần ijk của A và A' , tương ứng, thì $a_{ijk} > a'_{ijk}$, cho thấy $\phi(\tilde{U}) \neq \phi(\tilde{W})$.

Để hoàn thành chứng minh, chúng ta cần chỉ ra rằng ϕ bảo toàn tính kề. Giả sử \tilde{U} và \tilde{W} là các dãy kề nhau trong B_{n_1, \dots, n_m} . Khi đó, \tilde{U} và \tilde{W} có dạng $\tilde{U} = s_1 \dots s_r s_{r+1} \dots s_N$ và $\tilde{W} = s_1 \dots s_{r+1} s_r \dots s_N$, với $s_r \neq s_{r+1}$. Đặt $s_{r+1} = j > s_r = i$. Bây giờ, giả sử rằng s_{r+1} là xuất hiện thứ k của j trong \tilde{U} . Khi đó, sự khác biệt duy nhất trong các vector $\phi(\tilde{U})$ và $\phi(\tilde{W})$ là thành phần ijk của $\phi(\tilde{W})$ tăng thêm một đơn vị, vì vậy $\phi(\tilde{U})$ và $\phi(\tilde{W})$ là các đỉnh kề nhau trong Z^M . Để thấy rằng ϕ^{-1} cũng bảo

toàn tính kê, xem xét hai đỉnh kê nhau, A và A' , trong ảnh của ϕ . Đặt a_{ijk} là thành phần ijk của A , và mà không mất tính tổng quát, giả sử rằng A' được thu được từ A bằng cách tăng a_{ijk} lên $a_{ijk} + 1$. Vì A' thuộc ảnh của ϕ , nên ký hiệu trước trực tiếp của j xuất hiện thứ k trong $\phi^{-1}(A)$ là i . Để thấy điều này, trước hết chúng ta nhận thấy phải có ít nhất một i đứng trước j xuất hiện thứ k . Nếu không, $a_{ijk} = n_i$ và không thể tăng thêm. Nếu có bất kỳ biểu tượng khác nào giữa j xuất hiện thứ k và i đứng trước nó, các thành phần khác của A phải được thay đổi để tăng a_{ijk} . Tuy nhiên, A và A' chỉ khác nhau đúng một thành phần. Do đó, $\phi^{-1}(A')$ có thể được thu được từ $\phi^{-1}(A)$ bằng cách hoán đổi j xuất hiện thứ k và i đứng trước nó. Do đó, $\phi^{-1}(A)$ và $\phi^{-1}(A')$ là các đỉnh kê nhau trong B_{n_1, \dots, n_m} .

Đồ thị đường đi ngắn nhất của một đồ thị lưới hai chiều $P_{n_1} \square P_{n_2}$ dễ dàng xác định, như được minh họa trong hệ quả sau đây. Đầu tiên, chúng ta cần một định nghĩa bổ sung. Đồ thị cầu thang (staircase graph) S_{n_1, n_2} là một đồ thị con cảm sinh của đồ thị lưới trên lưới số nguyên \mathbb{Z}^{n_2} . S_{n_1, n_2} có tập đỉnh $V(S_{n_1, n_2}) = \{(a_1, \dots, a_{n_2}) : a_k \in \mathbb{Z}, n_1 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n_2} \geq 0\}$ (xem hình 3.5).



Hình 3.5: Đồ thị cầu thang $S_{n_1, 2}$ (trái) và $S_{3, 3}$ (phải).

Hệ quả 3.3.1. Đồ thị đường đi ngắn nhất của $P_{n_1} \square P_{n_2}$ đẳng cấu với đồ thị cầu thang (staircase graph) S_{n_1, n_2} .

Chứng minh: Chúng ta đã thấy rằng đồ thị đường đi ngắn nhất $S(P_{n_1} \square P_{n_2})$ có thể được mô tả như một đồ thị trên tập hợp các chuỗi nhị phân B_{n_1, n_2} . Hơn nữa, từ chứng minh của định lý 3.3.1, ánh xạ $\varphi : B_{n_1, n_2} \rightarrow \mathbb{Z}^{n_2}$ được định nghĩa bởi

$\varphi(\tilde{U}) := (a_1, a_2, \dots, a_{n_2})$, trong đó a_k là số lượng số 1 theo sau lần xuất hiện thứ k của số 2 trong chuỗi \tilde{U} , là đơn ánh và bảo toàn tính kề. Do đó, hệ quả này sẽ đúng nếu chúng ta có thể chứng minh $\varphi(B_{n_1, n_2}) = V(S_{n_1, n_2})$.

Đặt $\tilde{U} \in B_{n_1, n_2}$ và $\varphi(\tilde{U}) = (a_1, a_2, \dots, a_{n_2})$. Từ định nghĩa của φ , ta có $n_1 \geq a_k \geq a_{k+1} \geq 0$ với mọi $k \in \{1, \dots, n_2 - 1\}$, bởi vì số lượng số 1 theo sau lần xuất hiện thứ k của số 2 lớn hơn hoặc bằng số lượng số 1 theo sau lần xuất hiện thứ $(k + 1)$ của số 2. Do đó, $\varphi(\tilde{U}) \in V(S_{n_1, n_2})$. Ngược lại, với bất kỳ $A = (a_1, \dots, a_{n_2}) \in V(S_{n_1, n_2})$, đặt \tilde{U} là chuỗi trong B_{n_1, n_2} có chính xác a_k số 1 theo sau lần xuất hiện thứ k của số 2 với $k \in \{1, \dots, n_2\}$. Khi đó, $\varphi(\tilde{U}) = A$ chứng tỏ $V(S_{n_1, n_2}) \subseteq \varphi(B_{n_1, n_2})$.

Chú ý 3.3.1. Định lý 3.3.1 ngụ ý rằng chiều của đồ thị lưới \mathbb{Z}^M trong đó $S(P_{n_1} \square \dots \square P_{n_m})$ là một đồ thị con phụ thuộc vào thứ tự của n_1, \dots, n_m . Vì $M = \sum_{i=2}^m (i - 1)n_i$, giá trị nhỏ nhất của M sẽ xảy ra khi n_1, \dots, n_m được liệt kê theo thứ tự giảm dần.

Dưới đây chính là hệ quả trực tiếp từ những thảo luận của chúng ta về đồ thị lưới, rằng đường đi có độ dài k là đồ thị đường đi ngắn nhất của $P_k \square P_1$.

Hệ quả 3.3.2. Cho lưới $G = P_k \square P_1$, ta có $S(G) \cong P_k$.

Trước đó, chúng ta đã nhận xét rằng hai đồ thị cơ sở có thể tạo ra cùng một đồ thị đường đi ngắn nhất. Trên thực tế, thậm chí hai đồ thị rút gọn cũng có thể có cùng một đồ thị đường đi ngắn nhất, ví dụ, các đồ thị $P_k \square P_1$ và G_k được đưa ra trong định lý 2.2.1 có cùng một đồ thị đường đi ngắn nhất nhưng chúng không đẳng cấu với nhau.

Một đồ thị lưới đặc biệt khác là siêu khối $Q_m = P_1 \square \dots \square P_1$. Chúng ta sẽ quan sát trong mệnh đề 3.3.1, rằng $S(Q_m)$ đẳng cấu với đồ thị Cayley của nhóm đối xứng S_m .

Đầu tiên, chúng ta nhắc lại một số nội dung từ lý thuyết nhóm cơ bản (elementary group theory) và lý thuyết đồ thị đại số (algebraic graph theory). Xem [1, 12, 13] để biết thêm chi tiết. Cho (Γ, \cdot) là một nhóm. Cho S là một tập sinh của Γ không chứa phần tử đơn vị và sao cho với mỗi $g \in S$, g^{-1} cũng thuộc S . Đồ thị Cayley của Γ với tập sinh S , được ký hiệu là $\text{Cay}(\Gamma; S)$, là đồ thị có đỉnh là các phần tử của Γ , và có một cạnh giữa hai đỉnh x và y nếu và chỉ nếu có một phần tử $s \in S$ sao cho $x \cdot s = y$.

Nhóm đối xứng S_m là nhóm có các phần tử là các hoán vị trên tập hợp $\{1, 2, \dots, m\}$. Một phần tử của S_m là một ánh xạ từ tập hợp $\{1, 2, \dots, m\}$ vào chính nó. Ký hiệu bởi $s_1 s_2 \dots s_m$, hoán vị σ được xác định bởi $\sigma(i) = s_i$, với $1 \leq i \leq m$. Phép toán nhóm trong S_m là sự kết hợp của các hoán vị được xác định bởi $(\sigma\tau)(j) = \sigma(\tau(j))$, cho $\sigma, \tau \in S_m$, $1 \leq j \leq m$.

Một hoán vị chuyển vị liền kề là một hoán vị τ_i sao cho $\tau_i(i) = i + 1$, $\tau_i(i + 1) = i$, và $\tau_i(k) = k$ đối với $k \notin \{i, i + 1\}$. Mỗi hoán vị có thể được biểu diễn như sự kết hợp của một số hữu hạn hoán vị chuyển vị liền kề. Vì vậy, tập hợp các hoán vị chuyển vị liền kề, T , sinh ra S_m . Chúng ta cũng lưu ý rằng mỗi hoán vị chuyển vị liền kề là phần tử nghịch đảo của chính nó. Do đó, chúng ta có thể định nghĩa đồ thị Cayley của S_m với tập sinh T , ký hiệu là $\text{Cay}(S_m; T)$.

Để hiểu sâu hơn về cấu trúc của $\text{Cay}(S_m; T)$, ta xem xét kết quả của việc kết hợp một phần tử $\sigma \in S_m$ với một hoán vị chuyển vị liền kề. Giả sử $\sigma = s_1 s_2 \dots s_m$ và $1 \leq i \leq m - 1$. Khi đó, với $k \notin \{i, i + 1\}$

$$\sigma\tau_i(i) = \sigma(i + 1), \quad \sigma\tau_i(i + 1) = \sigma(i), \quad \sigma\tau_i(k) = \sigma(k)$$

hoặc đơn giản là

$$\sigma\tau_i = s_1 s_2 \dots s_{i+1} j_i s_{i+2} \dots s_m.$$

Do đó, kết quả của việc kết hợp $\sigma\tau_i$ là hoán đổi hai phần tử liền kề s_i và s_{i+1} trong σ . Ta có thể kết luận rằng lân cận của một đỉnh σ trong $\text{Cay}(S_m; T)$ là tập hợp của tất cả $(m - 1)$ hoán vị trên $\{1, \dots, m\}$ thu được từ σ bằng cách hoán đổi hai phần tử liền kề.

Bây giờ hãy xem xét siêu khối $Q_m = P_1 \square \dots \square P_1$. Các đỉnh của $P_1 \square \dots \square P_1$ tương ứng với tất cả các chuỗi nhị phân có độ dài m . Một đường đi ngắn nhất trong Q_m là một chuỗi gồm đúng một bước theo mỗi hướng. Trong định lý 3.3.1, chúng ta đã đề cập đến sự tương quan giữa các đường chéo của $P_{n_1} \square \dots \square P_{n_m}$ và tập hợp các chuỗi bước B_{n_1, \dots, n_m} . Đối với Q_m , đây là một ánh xạ song ánh giữa các đường chéo trong $P_1 \square \dots \square P_1$ và các chuỗi trong $B_{1, \dots, 1}$. Vì trong mỗi đường chéo, một tọa độ đỉnh thay đổi đúng một lần, $B_{1, \dots, 1}$ trùng khớp với tập các hoán vị trên $\{1, 2, \dots, m\}$. Biểu diễn chuỗi của U được ký hiệu là $\tilde{U} = s_1 s_2 \dots s_m$, trong đó mỗi phần tử của $\{1, \dots, m\}$ xuất hiện chính xác một lần. Hãy nhớ rằng chúng ta đã xác định hai chuỗi

trong $B_{1,\dots,1}$ là kề nhau nếu và chỉ nếu một có thể được thu được từ cái khác bằng cách hoán đổi hai ký tự liền kề (khác nhau). Điều này tương đương với hai hoán vị kề nhau nếu và chỉ nếu một có thể được thu được từ cái khác bằng cách sử dụng một hoán vị chuyển vị liền kề. Do đó, tập $B_{1,\dots,1}$ cùng với mối quan hệ kề nhau tương đương với $\text{Cay}(S_m; T)$. Do đó, chúng ta quan sát được:

Mệnh đề 3.3.1. *Cho S_m là nhóm đối xứng, T là tập hợp các hoán vị chuyển vị liền kề, và a và b là các đỉnh đường kính trên Q_m . Khi đó $S(Q_m, a, b) \cong \text{Cay}(S_m; T)$.*

Mặc dù hàm φ (đề cập trong phần chứng minh của định lý 3.3.1) là không cần thiết trong mệnh đề 3.3.1, nhưng hàm đó có một diễn giải thú vị trong trường hợp của Q_m . Ở đây, miền của φ là $B_{1,\dots,1}$, tương đương với S_m , tập hợp các hoán vị của $\{1, 2, \dots, m\}$. Bây giờ, ta quay lại định nghĩa của φ trong phần chứng minh định lý 3.3.1, và sử dụng ký hiệu được giới thiệu ở đó, hình ảnh của φ là một chuỗi các phần tử a_{ijk} , trong đó $1 \leq i < j \leq m$ và $1 \leq k \leq n_j$. Trong trường hợp của Q_m , $n_j = 1$ cho mỗi j . Do đó, đối với một chuỗi $\tilde{U} \in B_{1,\dots,1}$, tương ứng với một hoán vị $s_1 s_2 \dots s_m$, việc rút gọn ký hiệu của chúng ta thành

$$\varphi(\tilde{U}) := (a_{12}, a_{13}, a_{23}, \dots, a_{1m}, a_{2m}, \dots, a_{(m-1)m}),$$

trong đó a_{ij} bằng số lượng i đi sau j trong \tilde{U} . Từ định lý 3.3.1, độ dài của chuỗi $\varphi(\tilde{U})$ là

$$M = \sum_{i=2}^m (i-1)n_i = \sum_{i=1}^m (i-1) = \binom{m}{2}.$$

Vì mỗi phần tử trong $\{1, 2, \dots, m\}$ xuất hiện chính xác một lần trong hoán vị $s_1 s_2 \dots s_m$, chúng ta có rằng với mọi cặp i, j với $1 \leq i < j \leq m$,

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \text{ xuất hiện trước } j \\ 1 & \text{nếu } i \text{ xuất hiện sau } j. \end{cases}$$

Trong trường hợp của Q_m , người ta có thể diễn giải $\varphi(\tilde{U})$ như tập cạnh của một đồ thị hướng hoàn chỉnh trên m đỉnh như sau. Đối với mỗi cặp đỉnh i, j với $1 \leq i < j \leq m$, cạnh ij được hướng từ i đến j nếu $a_{ij} = 0$, và từ j đến i nếu $a_{ij} = 1$. Một đồ thị hướng hoàn chỉnh có tính chất chuyển tiếp như vậy được gọi là một giải đấu chuyển tiếp (a transitive tournament). Chúng ta kết luận rằng đối với siêu khối Q_m , hình ảnh của φ tương ứng chính xác với tập hợp $m!$ giải đấu chuyển tiếp.

KẾT LUẬN

Trong bài khóa luận này, chúng tôi đã tập trung vào việc nghiên cứu cấu trúc của các đồ thị đường đi ngắn nhất. Chúng tôi đã tìm hiểu về khái niệm tái cấu hình và những thách thức đặc biệt liên quan đến việc tái cấu hình các đường đi ngắn nhất trong một đồ thị. Mặc dù việc tìm kiếm một đường đi ngắn nhất có độ phức tạp tính toán là đa thức, nhưng vấn đề cấu hình lại các đường đi này lại có độ phức tạp PSPACE-complete, đã đặt ra nhiều thách thức và cơ hội nghiên cứu. Các đóng góp chính của bài khóa luận bao gồm:

- Khám phá cấu trúc đồ thị đường đi ngắn nhất: Làm rõ đặc điểm và tính chất của các đồ thị đường đi ngắn nhất, đặc biệt là sự xuất hiện của các chu trình 4 đỉnh.
- Tính đóng dưới phép hợp rời rạc và tích DesCartes: Chứng minh rằng tập hợp các đồ thị đường đi ngắn nhất đóng dưới các phép toán này.
- Kết quả phân rã và chu vi đồ thị: Xác định rằng đồ thị đường đi ngắn nhất có chu vi từ 5 trở lên thường có cấu trúc đơn giản.
- Khám phá đồ thị có chu vi nhỏ hơn 5: Chứng minh rằng đồ thị đường đi ngắn nhất của đồ thị lưới là đồ thị con cảm sinh của mạng lưới, cho thấy sự phức tạp và đa dạng trong cấu trúc.

Những đóng góp này không chỉ giúp hiểu rõ hơn về cấu trúc của các đồ thị đường đi ngắn nhất mà còn mở ra những hướng nghiên cứu mới và hấp dẫn trong lĩnh vực lý thuyết đồ thị và các ứng dụng của nó.

Tài liệu tham khảo

- [1] Bacher R. (1994), "Minimal Eigenvalue of the Coxeter Laplacian for the Symmetrical Group", *Journal of Algebra*, 167 (2), pp. 460-472.
- [2] Beier J., Fierston J., Haas R., Russell H., Shavo K. (2016), "Classifying coloring graphs", *Discrete Mathematics*, 339 (8), pp. 2100–2112.
- [3] Bonamy M., Johnson M., Lignos I., Patel V., Paulusma D., "Reconfiguration graphs for vertex colourings of chordal and chordal bipartite graphs".
- [4] Bonsma P. (2013), "The complexity of rerouting shortest paths", *Theoretical computer science*, 510, pp. 1–12.
- [5] Bonsma P., Cereceda L. (2009), "Finding paths between graph colourings: PSPACE-completeness and superpolynomial distances", *Theoretical computer science*, 410 (50), pp. 5215–5226.
- [6] Cereceda L., Van Den Heuvel J., Johnson M. (2008), "Connectedness of the graph of vertex-colourings", *Discrete Mathematics*, 308 (5), pp. 913–919.
- [7] Cereceda L., Van Den Heuvel J., Johnson M. (2009), "Mixing 3-colourings in bipartite graphs", *European Journal of Combinatorics*, 30 (7), pp. 1593–1606.
- [8] Cereceda L., Van Den Heuvel J., Johnson M. (2011), "Finding paths between 3-colorings", *Journal of graph theory*, 67 (1), pp. 69–82.
- [9] Choo K., MacGillivray G. (2011), "Gray code numbers for graphs", *Ars Mathematica Contemporanea*, 4 (1), pp. 125–139.

- [10] Eggermont C., Woeginger G. (2013), "Motion planning with pulley, rope, and baskets", *Theory of Computing Systems*, 53 (4), pp. 569–582.
- [11] Finbow S., MacGillivray G., "Hamiltonicity of bell and stirling colour graphs, preprint".
- [12] Fraleigh J. (2003), "A First Course in Abstract Algebra", *Pearson Education India*.
- [13] Godsil C., Royle G. (2013), "Algebraic Graph Theory", *Springer Science & Business Media*.
- [14] Haas R., Seyffarth K. (2014), "The k-dominating graph", *Graphs and Combinatorics*, 30 (3), pp. 609–617.
- [15] Hearn R., Demaine E. (2005), "PSPACE-completeness of sliding-block puzzles and other problems through the nondeterministic constraint logic model of computation", *Theoretical computer science*, 343 (1), pp. 72–96.
- [16] Ito T., Demaine E., Harvey N., Papadimitriou C., Sideri M., Uehara R., Uno Y. (2011), "On the complexity of reconfiguration problems", *Theoretical computer science*, 412 (12), pp. 1054–1065.
- [17] Ito T., Kamiński M., Demaine E. (2012), "Reconfiguration of list edge-colorings in a graph", *Discrete Applied Mathematics*, 160 (15), pp. 2199–2207.
- [18] Kamiński M., Medvedev P., Milanič M. (2011), "Shortest paths between shortest paths", *Theoretical computer science*, 412 (39), pp. 5205–5210.