

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC



Nguyễn Ánh Hồng

**ĐỒ THỊ TÁI CẤU HÌNH CÁC TẬP ĐỘC LẬP VÀ
CÁC TÍNH CHẤT LIÊN QUAN**

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP HỆ ĐẠI HỌC CHÍNH QUY

Ngành: Toán Tin

(Chương trình đào tạo: Chuẩn)

Người hướng dẫn: TS. Hoàng Anh Đức

Hà Nội - 2024

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC



Nguyễn Ánh Hồng

**ĐỒ THỊ TÁI CẤU HÌNH CÁC TẬP ĐỘC LẬP VÀ
CÁC TÍNH CHẤT LIÊN QUAN**

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP HỆ ĐẠI HỌC CHÍNH QUY

Ngành: Toán Tin

(Chương trình đào tạo: Chuẩn)

Người hướng dẫn: TS. Hoàng Anh Đức

Hà Nội - 2024

LỜI CẢM ƠN

Trước khi trình bày nội dung chính của khóa luận, em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy Hoàng Anh Đức người đã dành thời gian và tận tình hướng dẫn để em có thể hoàn thành khóa luận này.

Em cũng xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới toàn thể các thầy cô giáo trong khoa Toán - Cơ - Tin học, Đại học Khoa Học Tự Nhiên, Đại Học Quốc Gia Hà Nội đã dạy bảo em tận tình trong suốt quá trình học tập tại khoa.

Nhân dịp này em cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã luôn bên em, cổ vũ, động viên, giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập và thực hiện khóa luận tốt nghiệp.

Mục lục

1	Tổng quan	4
1.1	Đặt vấn đề	4
1.2	Quy tắc trượt token (Quy tắc TS)	4
1.3	Phạm vi nghiên cứu	5
1.4	Nghiên cứu chính	5
2	Một số kiến thức chuẩn bị	7
2.1	Đồ thị vô hướng	7
2.2	Đồ thị cấu hình lại	9
3	Đồ thị có là đồ thị cấu hình lại?	12
4	Các thuộc tính của đồ thị cấu hình lại	23
4.1	s-Partitedness	24
4.2	Phẳng - Planarity	25
4.3	Eulerianity	28
4.4	Chu vi - Girth	29
4.5	Cụm có kích thước nhất định	30

LỜI MỞ ĐẦU

Khóa luận tập trung làm rõ một số vấn đề sau: Trình bày ý tưởng về các khái niệm và các tính chất liên quan đến đồ thị tái cấu hình, chứng minh các khẳng định và cuối cùng là các thuộc tính cũng như kết quả chứng minh để minh họa cho các tính chất liên quan.

Bố cục của khóa luận bao gồm 4 chương và một phụ lục:

- Chương 1 của khóa luận trình bày vấn đề, mục tiêu, phạm vi của khóa luận.
- Chương 2 của khóa luận trình bày các định nghĩa cơ bản và một ví dụ về đồ thị tái cấu hình.
- Chương 3 của khóa luận trình bày các mệnh đề, hệ quả liên quan đến đồ thị tái cấu hình đối với các tập độc lập.
- Chương 4 của khóa luận trình bày các thuộc tính của đồ thị cấu hình lại.
- Kết luận.

Do thời gian thực hiện khóa luận không nhiều, kiến thức còn hạn chế nên khi làm khóa luận không tránh khỏi những hạn chế và sai sót. Em mong nhận được sự góp ý và những ý kiến phản biện của quý thầy cô và bạn đọc. Xin chân thành cảm ơn!

Chương 1

Tổng quan

1.1. Đặt vấn đề

Vấn đề cấu hình lại phát sinh khi chúng ta muốn nghiên cứu mối quan hệ giữa lời giải của một số bài toán tính toán cho trước (gọi là bài toán nguồn) chẳng hạn như bài toán SAT, bài toán tìm tập độc lập, tìm tập thống trị, bài toán tô màu đỉnh... Mục tiêu chính của các vấn đề cấu hình lại là nghiên cứu đồ thị cấu hình lại-một đồ thị có các nút là nghiệm và sự liên kết của chúng có thể được xác định thông qua một số quy tắc cấu hình lại nhất định. Một ví dụ điển hình là câu đố khối Rubik cổ điển nổi tiếng, trong đó mỗi cấu hình của Rubik khối tương ứng với một giải pháp và hai cấu hình (giải pháp) liên kết nếu có thể lấy được cái này từ cái kia bằng cách xoay một mặt của khối lập phương đi 90° , 180° hoặc 270° . Câu hỏi đặt ra là liệu có tồn tại một đường đi từ một điểm tùy ý nút đến nút mà mỗi mặt chỉ có một màu. Đồ thị cấu hình lại được nghiên cứu từ ba quan điểm chính: tính chất cấu trúc (khả năng kết nối, tính Hamilton, tính phẳng, v.v.), khả năng phân loại (đồ thị nào có thể được nhận ra dưới dạng một loại biểu đồ cấu hình lại nhất định) và các thuộc tính thuật toán (cho dù một số câu hỏi nhất định, chẳng hạn như tìm đường đi (ngắn nhất) giữa hai các nút, có thể được trả lời một cách hiệu quả và nếu vậy, hãy thiết kế một thuật toán để thực hiện điều đó). Tham khảo thêm [15, 16, 18].

1.2. Quy tắc trượt token (Quy tắc TS)

Một trong những quy tắc cấu hình lại cổ điển được gọi là Trượt token (*TS*). Bất kì tập con đỉnh của đồ thị G có thể coi là tập các token được đặt trên một số đỉnh của G . Theo *TS*, một token trên một đỉnh v nào đó chỉ có thể được chuyển đến một

trong các đỉnh liền kề của v . Hai tập con đỉnh kề nhau dưới TS nếu có được một tập con từ bên kia chỉ bằng một động tác TS . Một đồ thị token $F_k(G)$ [14] là một cấu hình lại đồ thị có các nút là tập con đỉnh kích thước k của G và các cạnh được xác định trong TS . Nghiên cứu về $F_k(G)$ bắt đầu từ những năm 1990, khi Alavi, Behzad, Erdős và Lick[1] đã xem xét một số đặc tính cấu trúc cơ bản (ví dụ: tính đều đặn, tính lưỡng cực, Euler, v.v.) của $F_2(G)$ (mà họ gọi là đồ thị hai đỉnh).

Một tập độc lập của đồ thị G là tập con đỉnh I sao cho không có cạnh nào nối hai đỉnh bất kỳ trong I . Hãy tưởng tượng rằng một token được đặt trên mỗi đỉnh của một tập độc lập của G . Đồ thị cấu hình lại TS (TS_k) của G nhận mọi giá trị tập độc lập khác rỗng (có kích thước k) làm các nút của nó, trong đó k là một số nguyên dương cho trước. Hai nút là liền kề nếu có thể thu được cái này từ cái kia bằng cách trượt token trên một đỉnh nào đó tới một trong những hàng xóm trống của nó.

1.3. Phạm vi nghiên cứu

Trong khóa luận này, chúng tôi lấy tập độc lập làm bài toán nguồn và xét hai loại đồ thị cấu hình lại có các cạnh được xác định theo TS : Đồ thị cấu hình lại TS_k , với một số nguyên dương k cho trước, có các nút có kích thước k các tập độc lập của G (tức là các tập con đỉnh có các thành viên không liền kề theo cặp, còn gọi là các tập ổn định) và các đồ thị cấu hình lại TS có các nút là các tập độc lập có kích thước tùy ý. Chúng ta ký hiệu các đồ thị này bằng $TS_k(G)$ và $TS(G)$, tương ứng. Cụ thể, mỗi $TS_k(G)$ là đồ thị con cảm sinh của $TS(G)$ và cũng là đồ thị con của $F_k(G)$.

1.4. Nghiên cứu chính

Cụ thể, khóa luận này nghiên cứu hai câu hỏi chính cho một đồ thị G đã cho:

- (1) Đồ thị cấu hình lại TS_k của G có thuộc về một số đồ thị lớp \mathcal{G} (bao gồm đồ thị đầy đủ, đường đi, chu trình, đồ thị hai phía đầy đủ, đồ thị phân chia liên thông, đồ thị ngoài phẳng cực đại và đồ thị đầy đủ trừ một cạnh).
- (2) Nếu G thỏa mãn một số tính chất \mathcal{P} (bao gồm tính s -partite, tính phẳng, Euler, chu vi và kích thước của cụm), liệu đồ thị cấu hình lại TS (TS_k) có thỏa mãn \mathcal{P} , và ngược lại.

Trọng tâm của khóa luận này là các tính chất lý thuyết đồ thị thuần túy của $TS(G)$ và $TS_k(G)$ chứ không phải các thuộc tính thuật toán đã được nghiên cứu kỹ

lưỡng. Đặc biệt, tính dễ/khó của câu hỏi có đường đi hay không giữa hai nút nhất định và một số câu hỏi tiếp theo (ví dụ: nếu có, liệu một cái ngắn nhất có thể được tìm thấy một cách hiệu quả; liệu câu lệnh có đúng với bất kỳ cặp nào không của các nút; v.v.) đã được nghiên cứu kỹ lưỡng cho một số đồ thị G . Độc giả tham khảo [16, Mục 4-5] để hiểu thêm về các kết quả gần đây. Đặc biệt, một số tính chất cấu trúc liên quan đến khả năng liên thông và đường kính của $TS_k(G)$ có thể được suy ra từ nhiều kết quả thuật toán này [4-6, 8, 10-12]. Mặt khác, sự phân loại và tính chất của $TS(G)/TS_k(G)$ chưa được nghiên cứu một cách có hệ thống và chúng tôi bắt đầu nghiên cứu này đây. Chính xác hơn, với đồ thị G , chúng tôi cung cấp một số kết quả ban đầu liên quan đến hai câu hỏi chính: (1) Đồ thị cấu hình lại TS_k của G có thuộc về một lớp đồ thị \mathcal{G} nào đó và (2) Nếu G thỏa mãn tính chất \mathcal{P} nào đó thì $TS(G)/TS_k(G)$ cũng thỏa mãn \mathcal{P} và ngược lại.

Nội dung khóa luận gồm các phần sau. Trong Chương 2, chúng tôi đưa ra các khái niệm cơ bản liên quan đến đồ thị và một ví dụ về đồ thị cấu hình lại TS_k được sử dụng làm mô hình cho một bài toán trong hình học tính toán. Trong Chương 3, với các lớp đồ thị \mathcal{G} khác nhau (bao gồm đồ thị đầy đủ, đường đi, chu trình, đồ thị hai phía đầy đủ, đồ thị phân chia liên thông, đồ thị ngoài phẳng tối đa và đồ thị đầy đủ trừ một cạnh), chúng tôi nghiên cứu xem có đồ thị G mà đồ thị cấu hình lại TS_k thuộc về \mathcal{G} hay không. (Xem Bảng 3.1). Trong Chương 4, với một số tính chất \mathcal{P} khác nhau (bao gồm tính s -partite, tính phẳng, tính Euler, chu vi và kích thước của cụm), chúng tôi tập trung trả lời câu hỏi sau: nếu đồ thị G thỏa mãn \mathcal{P} , liệu $TS(G)$ ($TS_k(G)$) cũng thỏa mãn \mathcal{P} và ngược lại. (Xem Bảng 4.1). Cuối cùng, trong Chương 5, chúng tôi tổng kết kết quả nghiên cứu và đề xuất một số vấn đề cũng như hướng nghiên cứu tiếp theo.

Chương 2

Một số kiến thức chuẩn bị

2.1. Đồ thị vô hướng

Định nghĩa 2.1. Đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, được định nghĩa bởi:

- Tập hợp $V \neq \emptyset$ là tập hợp các đỉnh.
- Tập hợp E là tập hợp các cặp không có thứ tự gồm 2 phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh.

Định nghĩa 2.2. Hai đỉnh u, v của đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ được gọi là kề nhau khi (u, v) là cạnh thuộc đồ thị G .

Nếu $e = (u, v)$ là cạnh của đồ thị G , thì ta nói cạnh này liên thuộc với 2 đỉnh u, v , đồng thời các đỉnh u và v sẽ được gọi là đỉnh đầu của cạnh (u, v) .

Định nghĩa 2.3. Giả sử G là đồ thị vô hướng, $v \in V$ là một đỉnh nào đó.

- Bậc của đỉnh v , là số cạnh kề với nó.
- Đỉnh bậc 0 được gọi là đỉnh cô lập (isolated).
- Đỉnh bậc 1 được gọi là đỉnh treo (pendant).

KH: $\deg_G(v) = |N_G(v)|$

Định nghĩa 2.4. Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trong đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ là dãy các cạnh e_1, e_2, \dots, e_n thỏa mãn điều kiện tồn tại các đỉnh v_0, v_1, \dots, v_n sao cho $e_i = v_{i-1}v_i$ ($1 \leq i \leq n$) và $v_0 = u, v_n = v$.

Đường đi có đỉnh đầu trùng đỉnh cuối hay $u = v$ gọi là chu trình.

Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu không có cạnh nào lặp lại.

Định nghĩa 2.5. Đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa 2 đỉnh bất kì của nó.

Định nghĩa 2.6.

- *Lân cận của đỉnh v trong G là tập sao cho $\{w \in V(G) : vw \in E(G)\}$. KH: $N_G(v)$.*
- *Lân cận đóng của v trong G là tập $N_G(v) + v$. KH: $N_G[v]$.*

Với $I \subseteq V(G)$: $N_G(I) = \cup_{v \in I} N_G(v)$, $N_G[I] = N_G(I) + I$

- $G[I]$: đồ thị con của G cảm sinh bởi các đỉnh trong I ($\forall I \subseteq V$).

Định nghĩa 2.7. Đồ thị có các đỉnh là $V(G)$ và hai các đỉnh kề nhau trong \bar{G} nếu chúng không kề nhau trong G được gọi là phần bù của G .

Định nghĩa 2.8. Một tập độc lập của G là tập con đỉnh I sao cho $\forall u, v \in I$, ta có $uv \notin E(G)$. KH: $\alpha(G)$: kích thước tối đa của một tập độc lập của G .

Định nghĩa 2.9. Một cụm (clique) của G là một tập con đỉnh K sao cho $\forall u, v \in K$, ta có $uv \in E(G)$. KH: $\omega(G)$: kích thước tối đa của một cụm của G .

Định nghĩa 2.10. Chu vi (girth) của G , là kích thước nhỏ nhất của một chu trình trong G . KH: $girth(G)$.

Nếu G không có chu trình, thì $girth(G) = \infty$, và ta nói rằng G có chu vi vô hạn, ngược lại G có chu vi hữu hạn.

Định nghĩa 2.11. Hai đồ thị vô hướng $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là đẳng cấu, kí hiệu $G_1 \simeq G_2$, nếu tồn tại song ánh $f : V_1 \rightarrow V_2$ thỏa mãn điều kiện: với mọi đỉnh $u, v \in V_1$, $uv \in E_1$ khi và chỉ khi $f(u)f(v) \in E_2$.

Định nghĩa 2.12. Một đồ thị là H -free nếu nó không có đồ thị H là đồ thị con cảm sinh.

Định nghĩa 2.13. G là đồ thị phân tách (split graph) nếu $V(G)$ có thể được phân hoạch thành hai tập K và S sao cho K là một cụm và S là một tập độc lập (stable set). Một phân hoạch như thế được gọi là một KS -phân hoạch (KS -partition).

Phân hoạch K -max của $V(G)$ là phân hoạch KS trong đó $|K| = w(G)$.

Người ta biết rằng bất kỳ một đồ thị phân tách G cũng có một K -max duy nhất.

Giả định rằng đối với bất kỳ đồ thị phân tách G , phân hoạch K -max của $V(G)$ luôn được cho và để nhấn mạnh điều này giả định, chúng ta viết $G = (K \cup S, E)_{K\text{-max}}$.

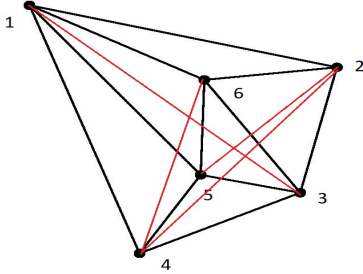
2.2. Đồ thị cấu hình lại

Định nghĩa 2.14. Đồ thị cấu hình lại TS_k của G , lấy tất cả các tập độc lập của G có kích thước k làm nút của nó. KH: $TS_k(G)$.

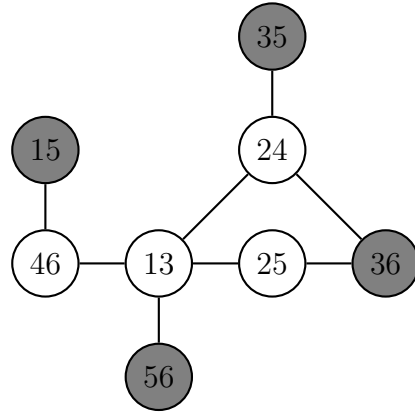
Đồ thị cấu hình lại TS của G , lấy tất cả các tập độc lập của G làm nút của nó. KH: $TS(G)$.

Hai nút (tập độc lập) I và J liền kề nhau trong $TS(G)$ (hay $TS_k(G)$) nếu tồn tại $u, v \in V(G)$ sao cho $I - J = \{u\}$, $J - I = \{v\}$ và $uv \in E(G)$.

Đương nhiên, chúng ta gọi một đồ thị F là đồ thị cấu hình lại TS_k nếu tồn tại đồ thị G sao cho $F \simeq TS_k(G)$ hay chính xác hơn là $F \simeq_f TS_k(G)$.



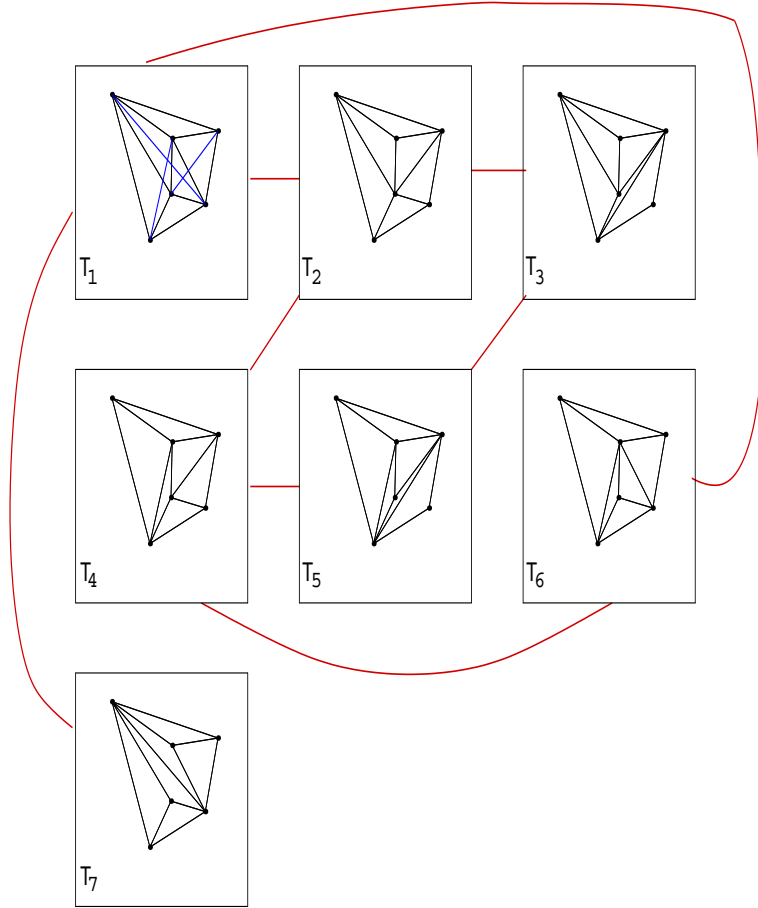
Hình 2.1: Tập điểm P với các đoạn thẳng của nó. Một hình tam giác được thể hiện bằng các đường màu đen.



Hình 2.2: Đồ thị giao điểm cạnh G . Mỗi số ab bên trong một nút biểu thị một đoạn thẳng giao nhau của P . Tập ỏn định tương ứng với tam giác trong Hình 2.1 được tô màu xám.

Chúng tôi trình bày một ví dụ về đồ thị cấu hình lại TS phát sinh từ một vấn đề được nghiên cứu kỹ trong hình học tính toán: tam giác trên một tập hợp mặt phẳng điểm. Đối với các thuật ngữ và ký hiệu liên quan đến hình học tính toán không được định nghĩa ở đây có thể tham khảo [17].

Cho một tập hợp P gồm n điểm trên mặt phẳng, không có ba điểm nào thẳng hàng và không có bốn điểm nào cùng nằm trên một đường tròn. Hai đoạn thẳng giao nhau nếu chúng cắt nhau tại một điểm bên trong của mỗi đoạn, và không giao nhau nếu không cắt nhau. Một tam giác của P là bất kỳ tập hợp tối đa các đoạn không giao nhau. Biết rằng mọi tam giác có cùng số cạnh. Đồ thị giao điểm cạnh G của P là đồ thị có đỉnh V là các đoạn thẳng có đầu nút thuộc P cắt nhau ít nhất một



Hình 2.3: Các tam giác của P . Các cạnh màu đỏ tương ứng với các lần lật cạnh. Trong T_1 (hình tam giác trong Hình 2.1), ba cạnh có thể bị lật, tương ứng với trượt các token 15-46, 56-13 và 36-25 trong G (Hình 2.2), được hiển thị bằng màu xanh lam.

đoạn thẳng khác. Gọi L là tập hợp các đoạn thẳng còn lại được xác định bởi P . Lưu ý rằng bất kỳ cạnh nào trên bao lồi của P đều nằm trong L và có thể có đoạn thẳng khác như vậy. Trong Hình 2.1, chúng tôi đưa ra một tập hợp gồm 6 điểm và chỉ ra 15 đoạn mà chúng xác định. Một hình tam giác được thể hiện bằng các đường liền nét màu đen. Tập L bao gồm bảy đoạn thẳng $\{12, 14, 16, 23, 26, 34, 45\}$. Ta thấy các cạnh $\{16, 26, 45\}$ là cạnh bên trong bao lồi. Hai đỉnh trong G được nối với nhau bằng một cạnh nếu các đoạn thẳng tương ứng của chúng giao nhau. Trong Hình 2.2, chúng tôi đưa ra ví dụ về đồ thị giao điểm G , với $\alpha(G) = 4$. tam giác xuất hiện trong G dưới dạng tập ổn định $\{15, 35, 36, 56\}$.

Mỗi đỉnh của $TS_k(G)$ tương ứng với tập hợp k các đoạn thẳng không giao nhau đôi một. Hình 2.3 cho thấy ví dụ về $TS_4(G)$, trong đó các tập độc lập được biểu diễn bằng các tam giác tương ứng của chúng. tam giác phía trên bên trái tương ứng đến

tập ổn định $\{15, 35, 36, 56\}$. Bằng cách trượt token ta thấy nó liền kề trong $TS_4(G)$ với các tập ổn định $\{15, 35, 25, 56\}$, $\{46, 35, 36, 56\}$ và $\{15, 35, 36, 13\}$ tương ứng với các tam giác T_2 , T_6 và T_7 . Về mặt hình học, thấy rằng việc trượt token tương ứng với việc lật chéo của một tứ giác lồi trong tam giác. Lawson [13] cho thấy rằng việc lật các đường chéo giao nhau được lựa chọn tốt của các hình tứ giác lồi sẽ dẫn đến tam giác Delaunay duy nhất chứng tỏ rằng $TS_{\alpha(G)}(G)$ liên thông. Kết quả này đã được Bern và Eppstein [3] khái quát hóa cho trường hợp một tập hợp các đoạn thẳng không giao nhau có thể được chỉ định và các tam giác bị hạn chế để bao gồm các đoạn này. Trong trường hợp này, chúng tôi thêm các phân đoạn bị ràng buộc này và bất kỳ phân đoạn nào giao nhau với L . Họ có thể chỉ ra rằng tam giác Delaunay ràng buộc tương ứng có thể thu được sau nhiều nhất $O(n^2)$ lật chéo, tạo ra một giới hạn tương ứng trên đường kính $TS_{\alpha(G)}(G)$. (Xem thêm phụ lục A).

Chương 3

Đồ thị có là đồ thị cấu hình lại?

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu khả năng phân loại của đồ thị cấu hình lại TS_k . Nó tầm thường rằng bất kỳ đồ thị G cũng là đồ thị có cấu hình lại TS_1 , vì $G \simeq TS_1(G)$. Vì thế, trong phần này chúng tôi luôn giả sử $k \geq 2$.

Đối với đồ thị G , đặt $L_k(G)$ là đồ thị có các nút là các cụm kích thước k của G và hai nút kề nhau nếu chúng có đúng $k - 1$ đỉnh chung. Đặc biệt, $L_2(G)$ còn được gọi là đồ thị đường thẳng của G . Bỏ đề sau đây mô tả một mối quan hệ giữa $L_k(G)$ và đồ thị cấu hình lại TS_k của phần bù \overline{G} của nó. Hình 3.1 minh họa mối quan hệ này với $k = 2$.

Bổ đề 3.1. *Cho đồ thị G . Khi đó, $TS_k(\overline{G})$ là đồ thị con của $L_k(G)$. Hơn thế nữa, $L_k(G) \simeq TS_k(\overline{G})$ khi và chỉ khi G là K_{k+1} -free.*

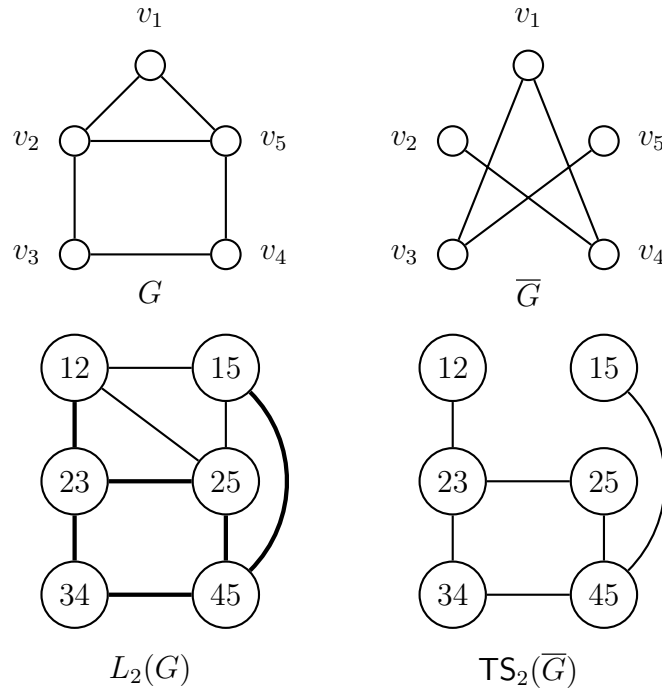
Chứng minh. Theo định nghĩa, với mọi $I = \{a_1, \dots, a_k\} \in V(TS_k(\overline{G}))$, chúng ta có $a_i a_j \notin E(\overline{G})$ và do đó $a_i a_j \in E(G)$ với $1 \leq i < j \leq k$, tức là $a_1 \dots a_k \in V(L_k(G))$. Ánh xạ $f : V(TS_k(\overline{G})) \rightarrow V(L_k(G))$ được định nghĩa bởi $f(\{a_1, \dots, a_k\}) = a_1 \dots a_k$. Hơn nữa, nếu $I = \{a_1, \dots, a_k\}$ và $J = \{a'_1, \dots, a'_k\}$ kề nhau trong $TS_k(\overline{G})$ thì $|I \cap J| = k - 1$, và do đó $a_1 \dots a_k$ và $a'_1 \dots a'_k$ kề nhau trong $L_k(G)$. Do đó, $TS_k(\overline{G})$ là đồ thị con của $L_k(G)$.

Ta còn phải chứng minh $TS_k(\overline{G}) \simeq_f L_k(G)$ nếu và chỉ nếu G là K_{k+1} -free.

(\Rightarrow) Giả sử ngược lại rằng $TS_k(\overline{G}) \simeq_f L_k(G)$ và G có $K_{k+1} = a_1 \dots a_k a_{k+1}$. Do đó, $I = \{a_1, \dots, a_{k-1}, a_k\}$ và $J = \{a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}\}$ là các đỉnh của $TS_k(\overline{G})$. Vì $a_1 \dots a_{k-1} a_k$ và $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}$ kề nhau trong $L_k(G)$, nên chúng ta có $IJ \in E(TS_k(\overline{G}))$. Theo sau đó $a_k a_{k+1} \in E(\overline{G})$, có nghĩa là $a_k a_{k+1} \notin E(G)$, điều này mâu thuẫn. Do đó, G là K_{k+1} -free.

(\Leftarrow) Giả sử G là K_{k+1} -free. Cần chứng minh rằng $IJ \in E(TS_k(\overline{G}))$ nếu và chỉ nếu $f(I)f(J) \in E(L_k(G))$. Vì $TS_k(\overline{G})$ là đồ thị con của $L_k(G)$, hướng ngược lại là rõ ràng. Ta chứng minh hướng xuôi. Không mất tính tổng quát, đặt $a_1 \dots a_{k-1}a_k$ và $a_1 \dots a_{k-1}a_{k+1}$ là hai đỉnh liền kề nhau trong $L_k(G)$. Vì G là K_{k+1} -free, $a_k a_{k+1} \notin E(G)$, có nghĩa là $a_k a_{k+1} \in E(\overline{G})$ và do đó $IJ \in E(TS_k(\overline{G}))$, trong đó $I = f^{-1}(a_1 \dots a_{k-1}a_k)$ và $J = f^{-1}(a_1 \dots a_{k-1}a_{k+1})$.

□



Hình 3.1: Đồ thị G , phần bù \overline{G} , đồ thị đường $L_2(G)$ và đồ thị $TS_2(\overline{G})$. Mỗi số có dạng ab bên trong một nút biểu thị một tập hợp con đỉnh $\{v_a, v_b\}$ tạo thành cả một nút trong $L_2(G)$ và một tập hợp độc lập của \overline{G} .

Trong Hình 3.1, chúng ta thấy rằng G chứa một tam giác và thực tế $L_2(G)$ không đẳng cấu với $TS_2(\overline{G})$. Nếu chúng ta phá vỡ tam giác bằng cách xóa cạnh v_1v_2 thì điều này tương ứng với việc xóa đỉnh 12 trong $L_2(G)$ và $TS_2(\overline{G})$ cùng với việc thêm cạnh từ 15 vào 25. Chúng ta bây giờ hãy xem $L_2(G) \simeq TS_2(\overline{G})$.

Trong phần còn lại của chương này, đối với một số đồ thị lớp \mathcal{G} , ta trả lời câu hỏi như sau: Có tồn tại đồ thị G sao cho $TS_k(G) \in \mathcal{G}$, với $k \geq 2$ không? Kết quả của chúng tôi được mô tả trong Bảng 3.1.

Bây giờ chúng tôi chứng minh một số quan sát hữu ích.

Bảng 3.1: Liệu G có tồn tại sao cho $TS_k(G) \in \mathcal{G}$ ($k \geq 2$) không?

\mathcal{G}	Có tồn tại G ?	Ref.
K_n	Có $ V(G) = n + k - 1$ $ E(G) = n(n - 1)/2$	Hq. 3.4
P_n	Có $ V(G) = (n + 1) + k - 2 = n + k - 1$ $ E(G) = n(n - 1)/2$	Hq. 3.5
C_n	Có $ V(G) = n + k - 2$ $ E(G) = n(n - 3)/2$	
$K_{m,n}$ ($m \leq n$)	Có, nếu $m = 1$ và $n \leq k$ hoặc $m = n = 2$ $ V(G) = n + k$ hoặc $ V(G) = k + 2$ $ E(G) = n(n + 1)/2$ hoặc $ E(G) = 2$	Mđ. 3.7
Liên thông $F = (K \cup S, E)_{K\text{-max}}$	Có, nếu $ N_F(v) \cap S \leq k - 1$ và $ N_F(w) = 1$ với mọi $v \in K$ và $w \in S$ $ V(G) = K + S + k - 1$ $ E(G) = \binom{ K }{2} + \binom{ S }{2} + \sum_{v \in K} N_F(v) \cap S +$ $+\sum_{\substack{v \in K \\ N_F(v) \cap S \neq 0}} (K - 1)$	Mđ. 3.9
Ngoài phẳng tối đa $K_n - e$	Có, nếu $n \leq 3$	Mđ. 3.10

Mệnh đề 3.2. Nếu H là đồ thị con cảm sinh của G , thì $TS_k(H)$ là đồ thị con cảm sinh của $TS_k(G)$. Điều ngược lại không đúng với mọi $k \geq 2$.

Chứng minh. Giả sử tồn tại $I, J \in V(TS_k(H))$ sao cho $IJ \in E(TS_k(G))$. Vì $IJ \in E(TS_k(G))$, tồn tại $u, v \in V(G)$ sao cho $I - J = \{u\}$, $J - I = \{v\}$, và $uv \in E(G)$. Vì $I, J \in V(TS_k(H))$, nên $u, v \in V(H)$. Vì H là đồ thị con cảm sinh của G và $uv \in E(G)$, ta phải có $uv \in E(H)$. Do đó, $IJ \in E(TS_k(H))$.

Bây giờ, nếu $H = C_{2k}$ và $G = K_{1,k+1}$, người ta có thể dễ dàng xác minh rằng $TS_k(H)$ là một đồ thị con cảm sinh của $TS_k(G)$ nhưng H rõ ràng không phải là đồ thị con cảm sinh của G . \square

Mệnh đề 3.3. Cho đồ thị H , đặt $G = TS_{\alpha(H)}(H)$. Khi đó, với mọi $k \geq \alpha(H)$, G là đồ thị cấu hình lại TS_k . Cụ thể, tồn tại một đồ thị H' có $|V(H)| + k - \alpha(H)$ đỉnh và $|E(H)|$ cạnh sao cho $G \simeq TS_k(H')$.

Chứng minh. Gọi H' là đồ thị thu được bằng cách cộng tập X gồm $(k - \alpha(H))$ đỉnh mới vào H . Bất kỳ tập độc lập kích thước k nào trong H' đều là tập hợp của X và tập độc lập lớn nhất trong H . Khi đó, $G = TS_{\alpha(H)}(H) \simeq TS_k(H')$. \square

Một hệ quả trực tiếp của Mệnh đề 3.3 khi $H = K_n$ như sau.

Hệ quả 3.4. K_n là đồ thị cấu hình lại TS_k , với mọi số nguyên $k \geq 2$ và $n \geq 2$.

Một hệ quả trực tiếp của Bổ đề 3.1 và Mệnh đề 3.3 như sau.

Hệ quả 3.5.

(a) P_n là đồ thị cấu hình lại TS_k , với mọi số nguyên $k \geq 2$ và $n \geq 1$.

(b) C_n là đồ thị cấu hình lại TS_k , với mọi số nguyên $k \geq 2$ và $n \geq 3$.

Chứng minh.

(a) Vì P_n là K_3 -free nên từ Bổ đề 3.1 ta có

$$P_n \simeq L_2(P_{n+1}) \simeq TS_2(\overline{P_{n+1}}).$$

Giải quyết trường hợp $k = 2$. Với $k = 3$, có $\alpha(\overline{P_{n+1}}) = w(P_{n+1}) = 2$, do đó theo Mệnh đề 3.3 thì P_n là đồ thị cấu hình lại TS_k với mọi $k \geq 2$.

(b) Vì $C_3 \simeq K_3$, Hệ quả 3.4 giải quyết trường hợp $n = 3$. Với $n \geq 4$, vì C_n ($n \geq 4$) là K_3 -free, từ Bổ đề 3.1 ta có

$$C_n \simeq L_2(C_n) \simeq TS_2(\overline{C_n}).$$

Giải quyết trường hợp $k = 2$. Với $k = 3$, có $\alpha(\overline{C_n}) = w(C_n) = 2$, do đó theo Mệnh đề 3.3 thì C_n ($n \geq 4$) là đồ thị cấu hình lại TS_k cho mọi $k \geq 2$.

\square

Trong những điều kiện nhất định, có thể xây dựng đồ thị cấu hình lại TS_k mới từ một cái đã biết, như trong mệnh đề sau.

Mệnh đề 3.6. Cho I là một tập độc lập của đồ thị G cho trước. Đặt $k = |I| + 1$. Cho G' là đồ thị thu được từ G bằng cách thêm một đỉnh mới v_G và nối nó với mọi đỉnh trong $V(G) - I$. Khi đó, $TS_k(G')$ thu được từ $TS_k(G)$ bằng cách thêm một nút mới $I + v_G$ và tất cả các cạnh có thể liên thuộc với $I + v_G$.

Chứng minh. Theo định nghĩa, G là đồ thị con cảm sinh của G' , và do đó theo Mệnh đề 3.2, $TS_k(G)$ là đồ thị con cảm sinh của $TS_k(G')$. Chỉ cần chỉ ra rằng $I + v_G$ là nút duy nhất trong $V(TS_k(G')) - V(TS_k(G))$. Hãy quan sát điều đó đối với bất kỳ $J \in V(TS_k(G')) - V(TS_k(G))$, chúng ta phải có $v_G \in J$. Bây giờ, nếu $J \neq I + v_G$, phải có $w \in V(G) - I$ sao cho $w \in J$. Tuy nhiên, theo định nghĩa của G' , chúng ta có $wv_G \in E(G')$, mâu thuẫn với $\{w, v_G\} \subseteq J \in V(TS_k(G'))$. Do đó, $J = I + v_G$. \square

Mệnh đề 3.7. $K_{m,n}$ là đồ thị cấu hình lại TS_k với $k \geq 2$ và $n \geq m \geq 1$ khi và chỉ khi $m = 1$ và $n \leq k$ hoặc $m = n = 2$.

Chứng minh. (\Leftarrow) Hệ quả 3.5 giải quyết trường hợp $m = n = 2$, vì $K_{2,2} \simeq C_4$.

Hệ quả 3.5 vẫn còn để xét trường hợp $m = 1$ và $n \leq k$. Trong trường hợp này, ta cần chứng minh rằng có tồn tại đồ thị G sao cho $TS_k(G) \simeq K_{1,n}$. Đặt $I_1 = \{a_1, \dots, a_k\}$ là một tập độc lập có kích thước k , K_n là một cụm có các đỉnh là b_1, \dots, b_n . Xây dựng G bằng cách nối mỗi a_i với b_i , với $1 \leq i \leq n$.

Cần chứng minh rằng $TS_k(G) \simeq K_{1,n}$. Có $V(TS_k(G)) = I_1 \cup \bigcup_{i=1}^n J_i$, trong đó $J_i = I_1 - a_i + b_i$ với $1 \leq i \leq n$ suy ra $TS_k(G)$ có chính xác $n + 1$ đỉnh. Ngoài ra, từ cách xây dựng của G , tập I_1 liền kề với mọi J_i ($1 \leq i \leq n$) trong $TS_k(G)$, và với mọi $1 \leq i < j \leq n$, ta có luôn có $|J_j - J_i| = |J_i - J_j| = 2$, tức là $J_i J_j \notin E(TS_k(G))$. Do đó, $TS_k(G) \simeq K_{1,n}$.

(\Rightarrow) Đầu tiên ta chỉ ra rằng nếu $m = 1$ và $n \geq k + 1$, thì không tồn tại G sao cho $TS_k(G) \simeq K_{m,n}$, trong đó $k \geq 2$. Giả sử ngược lại rằng $n \geq k + 1$ và G tồn tại. Đặt $V(TS_k(G)) = \{I_1, J_1, \dots, J_n\}$ và giả sử không mất tính tổng quát rằng I_1 liền kề với J_i trong $TS_k(G)$ với $1 \leq i \leq n$. Vì $n \geq k + 1$, theo nguyên lý Dirichlet, phải có một đỉnh $u \in I_1$ sao cho việc trượt token ở u ít nhất sẽ mang lại kết quả hai tập độc lập có kích thước k khác nhau của G , chẳng hạn như J_1 và J_2 , cả hai đều liền kề I_1 . Khi đó, có thể viết $I_1 = I + x + u$, $J_1 = I + x + v$, và $J_2 = I + x + w$, với tập độc lập I kích thước $(k - 2)$ của G sao cho không có đỉnh phân biệt u, v, w, x nào thuộc I . Theo định nghĩa của J_1 và J_2 , cả v và w đều không thuộc I_1 . Bây giờ, đặt $J_3 = I + v + w$. Ta có thể xác minh rằng $J_3 \in V(TS_k(G))$ và do đó J_3 phải liền kề với I_1 trong $TS_k(G)$, tức là $|J_3 - I_1| = 1$. Tuy nhiên, chú ý rằng $\{v, w\} \subseteq J_3 - I_1$, là một mâu thuẫn.

Vẫn còn phải chứng minh rằng nếu $m \geq 2$ và $n > 2$, thì không tồn tại G nào sao cho $TS_k(G) \simeq K_{m,n}$. Một lần nữa, ta giả sử ngược lại rằng $m \geq 2$, $n > 2$, và G tồn tại. Giả sử $TS_k(G)$ có các tập hợp $X = \{I_1, \dots, I_m\}$ và $Y = \{J_1, \dots, J_n\}$, trong đó I_i ($1 \leq i \leq m$) và J_j ($1 \leq j \leq n$) là các tập độc lập kích thước k của G .

Xét chu trình $I_1J_1I_2J_2$ có độ dài 4, và giả sử ban đầu chúng ta trượt các token trong I_1 . Để hình thành một chu trình như vậy, nhiều nhất hai token trong I_1 có thể được di chuyển khỏi vị trí ban đầu của chúng, nếu không chúng ta cần thực hiện nhiều hơn bốn lần trượt các token để có được một chu kỳ. Hơn nữa, đối với tập độc lập kích thước $(k-2)I$ của G , các tập I_1, J_1, I_2, J_2 chỉ có thể ở một trong hai dạng sau (Xem Hình 3.2):

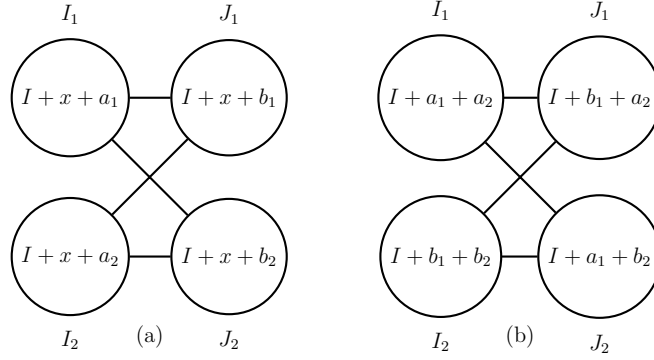
- (a) $I_i = I + x + a_i$ và $J_i = I + x + b_i$ ($1 \leq i \leq 2$). Một cách trực quan, điều này tương ứng với việc trượt một token trong I_1 dọc theo chu trình $a_1b_1a_2b_2$ của G .
- (b) $I_1 = I + a_1 + a_2$, $J_1 = I + b_1 + a_2$, $I_2 = I + b_1 + b_2$, và $J_2 = I + a_1 + b_2$. Theo trực giác, điều này tương ứng với việc trượt các token “trở lại trở đi” dọc theo các cạnh a_1b_1 và a_2b_2 của G .

Trong cả hai trường hợp, không có x, a_i và b_i nào thuộc I , với $1 \leq i \leq 2$. Nó còn chứng tỏ rằng cả hai trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn. Bây giờ, nếu (a) xảy ra, đặt $J = I + a_1 + a_2$. Ta có thể chứng minh rằng $J \in TS_k(G)$. Theo định nghĩa của J , nó không thể kề với I_1 trong $TS_k(G)$, nếu không thì $xa_2 \in E(G)$, mà mâu thuẫn với $I_2 = I + x + a_2 \in V(TS_k(G))$. Ngoài ra, J không thể liền kề với J_1 , vì $\{a_1, a_2\} \subseteq J - J_1$. Tuy nhiên, vì $TS_k(G) \simeq K_{m,n}$, nên theo đó J phải liền kề với I_1 hoặc J_1 , điều này mâu thuẫn.

Nếu trường hợp (b) xảy ra ta đặt $J \in TS_k(G)$ sao cho J liền kề với cả I_1 và I_2 và $J \notin \{J_1, J_2\}$. Vì $n > 2$, thì tồn tại tập J như vậy. Bây giờ, nếu $\{a_1, a_2\} \subseteq J$, ta cũng có $\{a_1, a_2\} \subseteq J - I_2 = J - (I + b_1 + b_2)$. (Cả a_1 và a_2 đều không thuộc I .) Điều này mâu thuẫn với sự liền kề của J và I_2 . Do đó, $\{a_1, a_2\} \not\subseteq J$, và tương tự, $\{b_1, b_2\}$ cũng vậy. Vì J liền kề với cả I_1 và I_2 , nên nó chứa ít nhất một phần tử của $\{a_1, a_2\}$ và $\{b_1, b_2\}$ tương ứng. Suy ra rằng $\{a_1, b_2\}$ hoặc $\{a_2, b_1\}$ đều thuộc J . Bây giờ, nếu $\{a_1, b_2\} \subseteq J$, thì suy ra $J = I + a_1 + x = I + b_2 + y$ với $x, y \in V(G)$ như vậy $xa_2, yb_1 \in E(G)$. Khi đó, suy ra $x = b_2$ và $y = a_1$, nghĩa là $J = I + a_1 + b_2 = J_1$, mâu thuẫn. Trường hợp $\{a_2, b_1\} \subseteq J$ có thể chỉ ra tương tự.

□

Bổ đề 3.8. Cho đồ thị G . Khi đó, nếu $TS_k(G)$ có K_n thì G cũng vậy, với số nguyên $k \geq 2$ và $n \geq 3$.



Hình 3.2: Hai dạng có thể có của chu kỳ 4 $I_1J_1I_2J_2$ trong chứng minh Mệnh đề 3.7. Ở đây I là tập độc lập kích thước $(k - 2)$ của đồ thị G

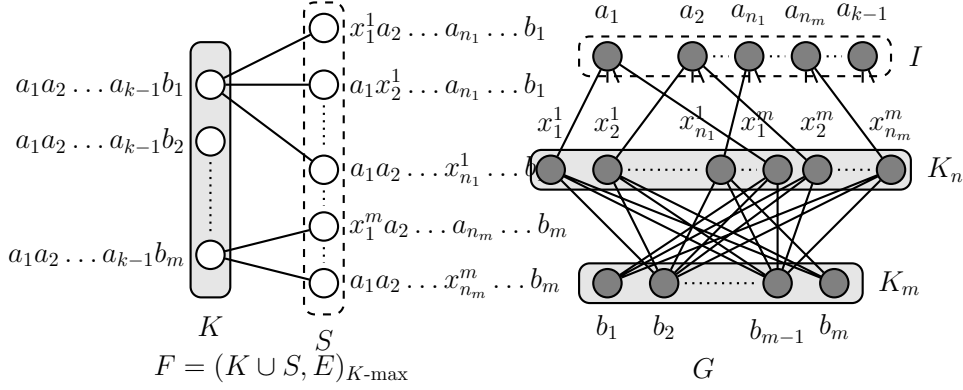
Chứng minh. Xét trường hợp $n = 3$, $k \geq 2$ và giả sử rằng $TS_k(G)$ có một tam giác được dán nhãn bởi các tập độc lập I_1, I_2, I_3 . Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $I_1 = \{a_1, \dots, a_{k-1}, w\}$ và $I_2 = \{a_1, \dots, a_{k-1}, x\}$, trong đó $wx \in E(G)$. Bây giờ, có hai khả năng xảy ra cho I_3 : hoặc (1) $I_3 = \{a_1, \dots, a_{k-1}, y\}$ trong đó $xy \in E(G)$ hoặc (2) $I_3 = \{a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \dots, a_{k-1}, x\}$ trong đó $a_iy \in E(G)$ với $i \in \{1, \dots, k-1\}$. Vì I_1 và I_3 kề nhau trong $TS_k(G)$ nên chỉ (1) có thể xảy ra. Do đó, ta phải có $yw \in E(G)$ và do đó w, x, y xác định một tam giác trong G . \square

Để kết thúc phần này, ta chứng minh rằng đồ thị phân chia liên thông là một đồ thị cấu hình lại TS_k khi và chỉ khi nó thỏa mãn một số điều kiện nhất định, được mô tả trong bổ đề sau.

Mệnh đề 3.9. *Có định $k \geq 2$. Đồ thị phân chia liên thông (connected split graph) $F = (K \cup S, E)_{K-\max}$ là một đồ thị cấu hình lại TS_k khi và chỉ khi $|N_F(v) \cap S| \leq k-1$ và $|N_F(w)| = 1$ cho mọi $v \in K$ và $w \in S$.*

Chứng minh.

(\Leftarrow) Đối với đồ thị phân chia liên thông $F = (K \cup S, E)_{K-\max}$, chúng ta giả sử rằng $|N_F(v) \cap S| \leq k-1$ và $|N_F(w)| = 1$ với mọi $v \in K$, $w \in S$. Thêm nữa, đặt $m = |K|$ và $n = |S|$. Giả sử rằng $K = \{v_1, \dots, v_m\}$ và chúng ta đặt $n_i = |N_F(v_i) \cap S| = |\{w_1^i, \dots, w_{n_i}^i\}|$ với $1 \leq i \leq m$. Quan sát thấy $n = \sum_{i=1}^m n_i$ và bởi giả định $n_i \leq k-1$ với mọi $1 \leq i \leq m$. Chúng ta xây dựng đồ thị G sao cho $TS_k(G) \simeq F$ như sau. (Hình 3.3)



Hình 3.3: Xây dựng đồ thị G sao cho $F \simeq TS_k(G)$, trong đó F là đồ thị phân tách liên thông thỏa mãn Mệnh đề 3.9. Các đỉnh của F được dán nhãn bằng các tập G ổn định kích thước k . Các đỉnh có hộp màu xám nhạt tạo thành một nhóm. Các đỉnh có hộp màu xám nhạt nét đứt tạo thành một tập ổn định

- Đặt $I = \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ là một tập độc lập. Đặt K_m là một đồ thị đầy đủ kích thước m , với $V(K_m) = \{b_1, \dots, b_m\}$. Đặt K_n là một đồ thị đầy đủ kích thước n , với $V(K_n) = \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=i}^{n_i} \{x_j^i\}$.
- Đồ thị G có $V(G) = I \cup V(K_n) \cup V(K_m)$. Các cạnh của G được xác định bằng cách nối mỗi $x_j^i \in V(K_n)$ với $a_j \in I$ (với $1 \leq j \leq n_i$) và mỗi đỉnh trong $V(K_m) - b_i$.

Đặt ánh xạ $f : V(F) \rightarrow V(TS_k(G))$ sao cho $f(v_i) = K^i = I + b_i$, nghĩa là mỗi đỉnh v_i trong F được ánh xạ thành một tập hợp đỉnh K^i trong G và $f(w_j^i) = K^i - a_j + x_j^i$ cho $1 \leq i \leq m$ và $1 \leq j \leq n_i$. Chứng minh rằng F và $TS_k(G)$ đẳng cấu, tức là $uv \in E(F)$ nếu và chỉ nếu $f(u)f(v) \in E(TS_k(G))$.

(\Rightarrow) Giả sử $uv \in E(F)$, tức là hoặc cả u và v đều thuộc K hoặc $u \in K$ và $v \in S$. Nếu $u = v_i \in K$ và $v = v_j \in K$, vì K_m là một đồ thị con đầy đủ của G , chúng ta có $f(u)f(v) = K^i K^j \in E(TS_k(G))$. Ngược lại, nếu $u = v_i \in K$ và $v = w_j^i \in S$, vì a_j là duy nhất trong $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ kề với x_j^i trong G , chúng ta có $f(u)f(v) = K^i(K^i - a_j + x_j^i) \in E(TS_k(G))$.

(\Leftarrow) Giả sử $f(u)f(v) \in E(TS_k(G))$, tức là hoặc cả $f(u)$ và $f(v)$ đều thuộc $\bigcup_{i=1}^m K^i$ hoặc $f(u) \in \bigcup_{i=1}^m K^i$ và $f(v) \in \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^{n_i} (K^i - a_j + x_j^i)$. Nếu $f(u) = K^i$ và $f(v) = K^j$, theo định nghĩa, chúng ta có $uv = v_i v_j \in E(F)$. Ngược lại, nếu $f(u) = K^i$ và $f(v) \in \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^{n_i} (K^i - a_j + x_j^i)$, vì $f(u)f(v) \in E(TS_k(G))$, chúng ta phải có $f(v) = K^i - a_j + x_j^i$ với $j \in \{1, \dots, n_i\}$, và do đó $uv = v_i w_j^i \in E(F)$.

(\Rightarrow) Giả sử rằng hoặc (1) tồn tại $w \in S$ sao cho $|N_F(w)| \geq 2$ hoặc (2) $|N_F(w)| = 1$ cho mọi $w \in S$ và tồn tại $v \in K$ sao cho $|N_F(v) \cap S| \geq k$. Chúng ta chứng minh rằng F không phải là một đồ thị cấu hình lại TS_k . Giả sử ngược lại rằng tồn tại một đồ thị G sao cho $F \simeq_f TS_k(G)$. Vì F là liên thông, $TS_k(G)$ cũng liên thông. Từ Bổ đề 3.8, chúng ta phải có $f(v_i) = I + b_i$ ($1 \leq i \leq m$) trong đó $\bigcup_{i=1}^m \{b_i\}$ tạo thành một đồ thị con đầy đủ K_m của G và $I = \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ là một tập độc lập của $G - N_G[V(K_m)]$.

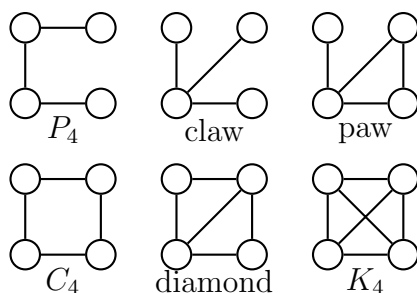
Nếu (1) đúng, vì $|K| = \omega(F)$, tồn tại $i \in \{1, \dots, m\}$ sao cho $v_i w \notin E(F)$, nếu không $K + w$ sẽ tạo thành một cụm trong F với kích thước $\omega(F) + 1$, điều này là mâu thuẫn. Bổ đề 3.8 cũng tức là $f(w) = I + x$ với $x \in V(G) - V(K_m) - I$. Vì $v_i w \notin E(F)$, chúng ta cũng có $f(v_i)f(w) = (I + b_i)(I + x) \notin E(TS_k(G))$, điều này tức là $b_i x \notin E(G)$. Sau đó, ta có thể chứng minh rằng $J = (I - a_1) + b_i + x \in V(TS_k(G))$. Lưu ý rằng $b_i \notin f(v_j) = I + b_j$ cho $j \neq i$ và $1 \leq j \leq m$. Vì $b_i x \notin E(G)$, chúng ta có $x \neq b_j$. Ngoài ra, vì $x \notin I$, chúng ta cũng phải có $x \notin f(v_j)$. Vì $TS_k(G)$ liên thông, J phải kề với $f(v_j)$ ($1 \leq j \leq m$), điều này là một mâu thuẫn vì $\{b_i, x\} \subseteq J - f(v_j)$ với $j \neq i$ (tức là J không kề với bất kỳ $f(v_j)$ nào với $j \neq i$) và $a_1 x \notin E(G)$ (tức là J không kề với $f(v_i) = I + b_i$).

Nếu (2) đúng, giả sử rằng $v = v_i$ cho một số $i \in \{1, \dots, m\}$. Như trước đó, ta có thể chứng minh rằng nếu $f(w) = I + x$ với $w \in N_F(v) \cap S$, phải tồn tại mâu thuẫn. Do đó, đối với mọi $w \in N_F(v) \cap S$, chúng ta phải có $f(w) = (I - a_j) + x + b_i$ với $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Vì $|N_F(v) \cap S| \geq k$, bằng nguyên lý Dirichlet, tồn tại $j \in \{1, \dots, k-1\}$ sao cho $f(v) = f(v_i) = I + b_i$ có hai hàng xóm không kề nhau $J_1 = (I - a_j) + x_1 + b_i$ và $J_2 = (I - a_j) + x_2 + b_i$. Một lần nữa cả hai x_1 và x_2 đều không thuộc I , và vì không có một trong số chúng kề với b_i , chúng cũng không thuộc $\{b_1, \dots, b_m\}$. Điều này tức là $\{x_1, x_2\} \cap f(v_i) = \emptyset$ với $1 \leq i \leq m$. Ta có thể xác minh rằng $J = (I - a_j) + x_1 + x_2 \in V(TS_k(G))$ và nó không kề với bất kỳ $f(v_i)$ nào ($1 \leq i \leq m$) vì $\{x_1, x_2\} \subseteq J - f(v_i)$. Điều này mâu thuẫn với tính liên thông của $TS_k(G)$. \square

Chúng ta kết thúc phần này với một kết quả chung áp dụng cho tất cả các đồ thị. $K_{1,3}$ còn được gọi là *claw* và việc thêm một cạnh vào giữa hai đỉnh bậc 1 bất kỳ của nó sẽ tạo thành *paw*. $K_4 - e$ còn được gọi là *diamond*. (Xem Hình 3.4) Một đồ thị *outerplanar* là một loại đồ thị có thể vẽ trên mặt phẳng sao cho tất cả các đỉnh đều nằm trên một vòng tròn được gọi là "vòng ngoài". Cụ thể, một đồ thị được gọi là *outerplanar* nếu có thể biểu diễn trên mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau ngoài việc chúng có thể cắt qua các đỉnh của đồ thị. Đồ thị ngoài phẳng cực đại là đồ thị ngoài phẳng đồ thị trong đó việc thêm một cạnh sẽ phá vỡ tính phẳng.

Mệnh đề 3.10.

- (a) Cho G là đồ thị có các thành phần G_1, G_2, \dots, G_p với $p \geq 1$. Giả sử tất cả $G_i (1 \leq i \leq p)$ là đồ thị cấu hình lại TS_k cho một số nguyên cố định $k \geq 2$. Khi đó G cũng vậy.
- (b) Diamond graph $K_4 - e$ là đồ thị nhỏ nhất duy nhất không phải là đồ thị cấu hình lại TS_k đồ thị cho mọi $k \geq 2$.
- (c) Các đồ thị tổng quát với $n \geq 4$ đỉnh của diamond không phải là đồ thị cấu hình lại TS_k cho bất kỳ $k \geq 2$: Đồ thị ngoài phẳng tối đa và $K_n - e$.
- (d) Tồn tại một đồ thị cấu hình lại TS_k không liên thông G sao cho một trong các thành phần liên thông của nó không phải là đồ thị cấu hình lại TS_k cho bất kỳ $k \geq 2$ nào.



Hình 3.4: Các đồ thị liên thông bốn đỉnh.

Chứng minh.

- (a) Giả sử $H_i (1 \leq i \leq p)$ sao cho $G_i = TS_k(H_i)$. Gọi H là đồ thị thu được bởi nối mỗi đỉnh của H_i với tất cả các đỉnh của H_j , với mọi $1 \leq i < j \leq p$. Từ cách xây dựng ở trên, bất kỳ tập độc lập kích thước k nào của H cũng phải là một tập độc lập của H_i , với $i \in \{1, \dots, p\}$. Kết quả là, $TS_k(H)$ là tập hợp của $TS_k(H_i)$ với mọi i , tức là $G = TS_k(H)$.
- (b) Các đồ thị có tối đa ba đỉnh là hợp của các đường đi và chu trình, và vì bất kỳ đường đi hoặc chu trình nào cũng là đồ thị cấu hình lại TS_k cho $k \geq 2$ (Hệ quả 3.5, nó dẫn đến (a) cũng vậy. Nếu một đồ thị có bốn đỉnh không liên thông, mỗi thành phần của nó có nhiều nhất ba đỉnh, và chúng ta xong.

Vì vậy, chỉ cần xét sáu đồ thị liên thông có bốn đỉnh được mô tả trong hình 3.4. Trong các đồ thị này, P_4 , C_4 và K_4 luôn có đồ thị cấu hình lại TS_k cho $k \geq 2$

và $K_{1,3}$ là đồ thị cấu hình lại TS_k cho $k \geq 3$. Giả sử H là đồ thị *kite* thu được từ một *diamond* bằng cách gắn một *leaf* vào một đỉnh bậc 2 của nó. Có thể xác minh rằng $TS_2(H)$ thực sự là một *paw*, và vì $\alpha(H) = 2$, theo Mệnh đề 3.3 thì $TS_k(H + (k-2)K_1)$ cũng là một *paw*, tức là, *paw* luôn là đồ thị cấu hình lại TS_k cho $k \geq 2$.

Vẫn còn phải chứng minh rằng *diamond* không phải là đồ thị cấu hình lại TS_k với mọi $k \geq 2$. Giả sử ngược lại rằng tồn tại đồ thị Q sao cho $K_4 - e = TS_k(Q)$. Theo Bổ đề 3.8, các đỉnh của $K_4 - e$ phải thuộc $I_1 = I + a$, $I_2 = I + b$, $I_3 = I + c$, $I_4 = I + d$, trong đó I là tập độc lập kích thước $(k-1)$ của Q và $\{a, b, c, d\} \subseteq V(Q) - I$ tạo ra một *diamond* trong đó, chẳng hạn a và c không liền kề. Tuy nhiên, với mọi $x \in I$, lưu ý rằng $J = (I - x) + a + c$ là một tập độc lập kích thước k của Q , và do đó nó phải là một đỉnh của $K_4 - e$, mâu thuẫn vì $J \notin \{I_1, \dots, I_4\}$.

- (c) Ta lập luận tương tự như trong chứng minh cho *diamond*.
- (d) Lấy $G = TS_k(\textit{diamond} + (k-1)K_1)$. Không khó để xác minh rằng *diamond* là thành phần của G và từ (b) nó không phải là đồ thị cấu hình lại TS_k cho bất kỳ $k \geq 2$.

□

Chương 4

Các thuộc tính của đồ thị cấu hình lại

Trong phần này chúng ta nghiên cứu các thuộc tính đồ thị khác nhau để xem liệu chúng có được kế thừa bởi đồ thị cấu hình lại TS , và ngược lại. Ta ký hiệu $\mathcal{P}(G) \Rightarrow \mathcal{P}(TS(G))$ có nghĩa là: nếu giả sử tính chất \mathcal{P} đúng cho G (trong một số trường hợp nhất định, tính chất đó luôn luôn đúng, nhưng trong một số trường hợp khác, nó có thể đúng hoặc không), điều đó có đúng không (và theo đó điều kiện) mà \mathcal{P} cũng đúng cho $TS(G)$? Ngược lại, $\mathcal{P}(TS(G)) \Rightarrow \mathcal{P}(G)$ có nghĩa là nếu \mathcal{P} đúng với $TS(G)$ thì khi nào nó đúng với G ? Đối với mọi k cố định, chúng ta xác định tương tự $\mathcal{P}(G) \Rightarrow \mathcal{P}(TS_k(G))$ và $\mathcal{P}(TS_k(G)) \Rightarrow \mathcal{P}(G)$. Vì $G \simeq TS_1(G)$, trường hợp $k = 1$ là không đáng quan tâm nên chúng ta chỉ xét $k \geq 2$.

Ví dụ, giả sử G là P_n và \mathcal{P} là “liên thông”. Những gì chúng ta muốn biết là: nếu P_n là liên thông (rõ ràng là đúng), nó có đúng không (và dưới điều kiện) mà $TS(P_n)$ cũng là liên thông? Câu hỏi này không quan trọng đối với $TS(P_n)$, bởi vì theo định nghĩa, nó chứa tất cả các tập ổn định của G dưới dạng các đỉnh, ví dụ: nối một tập hợp có kích thước k ổn định và một tập hợp có kích thước $k + 1$ ổn định theo một cạnh. Điều này có nghĩa là $TS(P_n)$ không liên thông. Ngay cả đối với $TS_k(P_n)$ với một số k cố định, câu hỏi này không khó hơn nhiều, vì người ta có thể xác minh rằng bất kỳ hai bộ P_n ổn định kích thước k nào cũng có thể liên thông bằng một đường trong $TS_k(P_n)$ (chỉ cần đẩy các token về một điểm cuối của đường), có nghĩa là đồ thị được liên thông rõ ràng. Những câu hỏi này thách thức nhiều hơn đối với các đồ thị G và tính chất \mathcal{P} khác nhau. Kết quả của chúng ta là được tóm tắt trong Bảng 4.1.

Bảng 4.1: Một số thuộc tính của các đồ thị (cấu hình lại). Ở đây $n = |V(G)|$. Có bốn trường hợp: (a) $\mathcal{P}(G) \Rightarrow \mathcal{P}(TS(G))$, (b) $\mathcal{P}(TS(G)) \Rightarrow \mathcal{P}(G)$, (c) $\mathcal{P}(G) \Rightarrow \mathcal{P}(TS_k(G))$, and (d) $\mathcal{P}(TS_k(G)) \Rightarrow \mathcal{P}(G)$.

\mathcal{P}	G	(a)	(b)	(c)	(d)	Ref.
s-partite	tổng quát	có			không	Mđ. 4.1
phẳng	P_n	có, nếu $n \leq 8$		có, nếu $k = 2, n \geq 3$ hoặc $k \geq 3, n \leq 8$		Mđ. 4.2
	tree	có, nếu $n \leq 7$				Mđ. 4.3
	C_n	có, nếu $n \leq 6$				Mđ. 4.4
	liên thông					
Eulerian	C_n	không	có	có, nếu $1 \leq k < n/2$		Mđ. 4.6
	tổng quát	không	có	không	không	MĐ. 4.7
chu vi vô hạn	P_n	có, nếu $n \leq 4$		có, nếu $n \leq 2k$		Mđ. 4.8
chu vi hữu hạn	C_n	có		có, nếu $1 \leq k < n/2$		Mđ. 4.9
có K_s	tổng quát	có		không	có	Mđ. 4.10

4.1. s-Partitedness

Cách tô màu s thích hợp của đồ thị G là ánh xạ $f : V(G) \rightarrow \{0, \dots, s-1\}$ sao cho $f(u) \neq f(v)$ nếu $uv \in E(G)$, trong đó $u, v \in V(G)$ và s là số nguyên dương. Nếu G có tô màu s thích hợp, gọi nó là đồ thị s -partite.

KH: $\chi(G)$ - sắc số, là số s nhỏ nhất sao cho G có tô màu s phù hợp.

Mệnh đề 4.1.

(a) G là s -partite khi và chỉ khi $TS(G)$ là s -partite. Nói cách khác, $\chi(G) = \chi(TS(G))$.

(b) Với mỗi $s \geq 2$, có thể xây dựng đồ thị G sao cho $\chi(TS_k(G)) < \chi(G) = s$, với mọi $2 \leq k \leq \alpha(G)$.

Chứng minh.

(a) Phải chứng minh rằng nếu G là s -partite thì $TS(G)$ cũng vậy. Vì G là s -partite nên có tồn tại một cách tô màu đồ thị G bằng s màu

$$f : V(G) \rightarrow \{0, \dots, s-1\}$$

các đỉnh của G . Với mỗi tập độc lập I của G , cho $g(I) = (\sum_{v \in I} f(v)) \pmod s$. Vì G là s -partite nên mỗi TS -bước chỉ trượt từ lớp màu này sang lớp màu khác và

do đó nếu I và J kề nhau trong $TS(G)$, $g(I) \neq g(J)$. Kết quả, g là cách tô màu s của $TS(G)$, có nghĩa là $TS(G)$ là s -partite.

Để thấy rằng $\chi(G) = \chi(TS(G))$, lưu ý rằng vì $G \simeq TS_1(G)$ là đồ thị con của $TS(G)$, ta có $\chi(G) \leq \chi(TS(G))$. Mặt khác, nếu G có tô màu $\chi(G)$, $TS(G)$ cũng vậy, tức là $\chi(TS(G)) \leq \chi(G)$.

- (b) Cố định $s \geq 2$. Cho G' là đồ thị bất kỳ có $\chi(G') = s$ và xây dựng G từ G' bằng cách thêm một đỉnh x bổ sung liền kề với tất cả các đỉnh trong $V(G')$. Ta có $\alpha(G) = \alpha(G')$ và vì x cần được tô bởi màu mới nên $\chi(G) = \chi(G') + 1$. Với mỗi $2 \leq k \leq \alpha(G)$ các tập độc lập kích thước k trong G và G' là giống hệt nhau và quan hệ liền kề theo TS cũng vậy, do đó $TS_k(G) \simeq TS_k(G')$. Vì $TS_k(G')$ là đồ thị con của $TS(G')$ nên ta có thể sử dụng phần (a) để có được:

$$\chi(TS_k(G)) = \chi(TS_k(G')) \leq \chi(TS(G')) = \chi(G') = \chi(G) - 1.$$

□

4.2. Phẳng - Planarity

Đồ thị được gọi là phẳng nếu có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó chỉ gặp nhau tại các đầu mút của chúng. Định lý nổi tiếng của Kuratowski nói rằng một đồ thị G là phẳng nếu và chỉ nếu nó không chứa bất kỳ đồ thị con nào đồng phôi với đồ thị hoàn chỉnh K_5 hoặc $K_{3,3}$ làm đồ thị con.

Mệnh đề 4.2.

- (a) $TS_2(P_n)$ phẳng với mọi $n \geq 3$.
- (b) $TS_3(P_n)$ là phẳng với mọi $n \leq 8$ và không phẳng đối với các trường hợp khác.
- (c) $TS(P_n)$ là phẳng với $n \leq 8$ và không phẳng đối với các trường hợp khác.

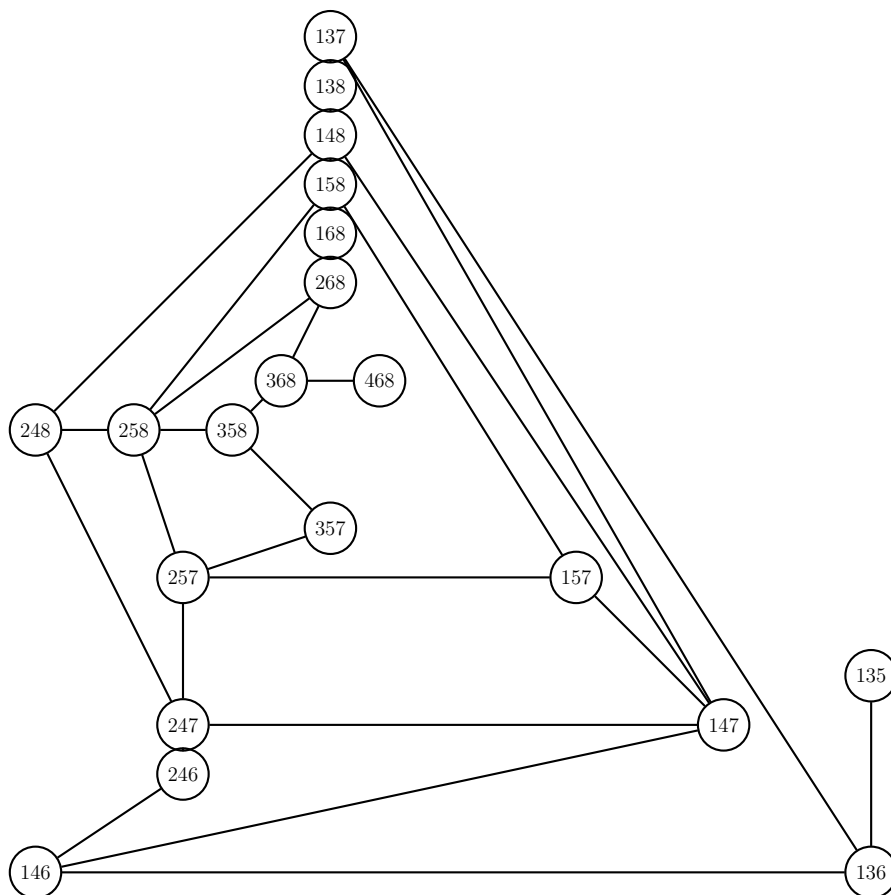
Chứng minh.

- (a) Giả sử rằng $P_n = v_1 \dots v_n$ ($n \geq 3$). Với mỗi nút, ta có $\{v_i, v_j\} \in V(TS_2(P_n))$ ($1 \leq i, j \leq n$ và $|i - j| \geq 2$), các lân cận của nó tạo thành một tập con khác rỗng của $\{\{v_{i-1}, v_j\}, \{v_{i+1}, v_j\}, \{v_i, v_{j-1}\}, \{v_i, v_{j+1}\}\}$. Vì vậy, $TS_2(P_n)$ có thể được nhúng vào thành một đồ thị lưới phẳng $n \times n$, có nghĩa là nó cũng là đồ thị phẳng.

(b) Trong Hình 4.1 là hình vẽ phẳng của $TS_3(P_8)$. Trong hình 4.2 là hình của $K_{3,3}$ có trong $TS_3(P_9)$.

(c) $TS_1(P_8) \simeq P_8$ và có thể dễ dàng chứng minh rằng $TS_4(P_8) \simeq P_5$. Từ (a), $TS_2(P_8)$ là phẳng. Từ (b), $TS_3(P_8)$ là phẳng còn $TS_3(P_9)$ thì không.

□

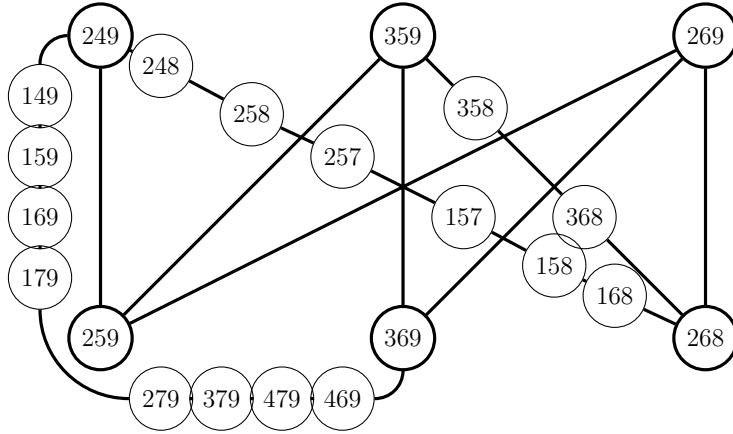


Hình 4.1: Bản vẽ phẳng của $TS_3(P_8)$. Mỗi số có dạng abc bên trong một nút biểu diễn một tập độc lập $\{v_a, v_b, v_c\}$ của $P_8 = v_1 \dots v_8$.

Mệnh đề 4.3. $TS(T)$ là phẳng với mọi cây T có tối đa bảy đỉnh và không phẳng đối với các cây khác.

Chứng minh. Một thuật toán tìm kiếm trên máy tính cho thấy:

- Tất cả 11 cây T có 7 đỉnh đều thỏa mãn $TS(T)$ là phẳng.
- Trong số 23 cây T có 8 đỉnh, có 7 cây thỏa mãn $TS(T)$ là không phẳng.



Hình 4.2: Một phân cụm của $K_{3,3}$ được chứa trong $TS_3(P_9)$. Mỗi số có dạng abc bên trong một nút biểu thị một tập $\{v_a, v_b, v_c\}$ độc lập của $P_9 = v_1 \dots v_9$.

□

Mệnh đề 4.4.

- (a) $TS(C_n)$ là phẳng với $n \leq 6$ và không phẳng đối với các trường hợp khác.
- (b) Xét về số đỉnh, C_7 là đồ thị G nhỏ nhất duy nhất của mà $TS(G)$ là không phẳng.
- (c) Xét về số cạnh, kể cả C_7 , có 8 đồ thị nhỏ nhất G mà $TS(G)$ là không phẳng.

Chứng minh. Một thuật toán tìm kiếm trên máy tính cho thấy rằng

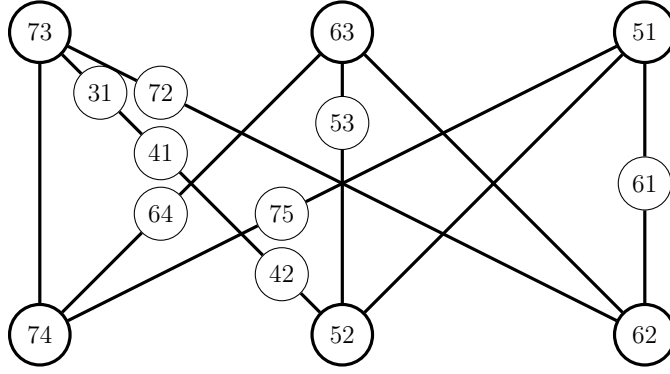
- (a) Đối với mỗi một đồ thị trong số 99 đồ thị phẳng liên thông G có sáu đỉnh, $TS(G)$ là đồ thị phẳng.
- (b) Có bảy cây T tám đỉnh có $TS(T)$ không phẳng. (Mệnh đề 4.3)
- (c) $TS_2(C_7)$ không phẳng. (Hình 4.3)

□

Hệ quả 4.5.

- (a) Nếu $girth(G) \geq 7$ thì đồ thị $TS(G)$ không phẳng.
- (b) Tồn tại đồ thị G có $girth$ là 3 và $TS(G)$ không phẳng.

Chứng minh.



Hình 4.3: Một phân tách của $K_{3,3}$ được chứa trong $TS_2(C_7)$. Mỗi số có dạng ab bên trong một nút biểu thị một tập $\{v_a, v_b\}$ độc lập của $C_7 = v_1 \dots v_7 v_1$.

- (a) Cho C là một chu trình trong G có chiều dài chu vi $(G) \geq 7$. Lưu ý rằng C không chứa bất kỳ dây cung nào; ngược lại, chúng ta có thể tìm được một chu trình nhỏ hơn C , mà mâu thuẫn với giả định. Bây giờ, xét đồ thị con \mathcal{H} của $TS(G)$ cảm sinh chỉ bởi các tập hợp độc lập trong C . Theo Mệnh đề 4.4, \mathcal{H} là không phẳng, và $TS(G)$ cũng vậy.
- (b) Lấy G là đồ thị thu được bằng cách nối mọi đỉnh của P_n với một đỉnh nào đó v không ở P_n . Đồ thị con của $TS(G)$ sinh ra bởi các tập độc lập trong P_n là không phẳng khi $n \geq 9$ (Mệnh đề 4.2).

□

4.3. Eulerianity

Đồ thị G là đồ thị Euler nếu nó có chu trình Euler, một chu trình đi qua tất cả các cạnh của G đúng một lần. Đồ thị G là Euler khi và chỉ khi nó liên thông và mọi đỉnh đều có bậc chẵn.

Mệnh đề 4.6. *Đồ thị $TS_k(C_n)$ là Euler, với $1 \leq k < n/2$.*

Chứng minh. Giả sử $C_n = w_1 w_2 \dots w_n$. Không khó để nhận thấy $TS_k(G)$ là liên thông, vì bất kỳ tập độc lập kích thước k nào, trong đó $1 \leq k < n/2$, đều có thể được cấu hình lại thành tập độc lập chính tắc $\{w_1, w_3, \dots, w_{2k+1}\}$.

Giả sử I là tập độc lập bất kỳ của C_n có kích thước k . Cần chứng minh rằng $\deg_{TS(C_n)}(I)$ là số chẵn. Thấy chỉ các đường đi có độ dài lẻ tối đa $P = v_1 v_2 \dots v_{2i+1}$ trong C_n thỏa mãn $\{v_1, v_3, \dots, v_{2i+1}\} \subseteq I$ ảnh hưởng đến $\deg_{TS(C_n)}(I)$, và mỗi đường đi như vậy đóng góp hoặc 0 hoặc 2 đến $\deg_{TS(C_n)}(I)$. Do đó $\deg_{TS(C_n)}(I)$ là số chẵn. □

Mệnh đề 4.7.

- (a) Với mọi đồ thị Euler G có $n \geq 4$ đỉnh, mọi thành phần của $TS_2(G)$ là Euler.
- (b) Tồn tại một đồ thị Euler G mà $TS_k(G)$ không là Euler, với mọi $k \in \{3, \dots, \alpha(G)\}$.
- (c) Với mọi đồ thị G , nếu $TS(G)$ là Euler thì G cũng vậy. Hơn nữa, với mọi $k \geq 2$, người ta có thể xây dựng đồ thị G sao cho G không phải là Euler mà $TS_k(G)$ là Euler.

Chứng minh.

- (a) Chỉ cần chứng minh rằng mọi nút của $TS_2(G)$ đều có bậc chẵn. Lấy bất kỳ tập độc lập $I = \{v_1, v_2\}$. Chúng ta có

$$\deg_{TS_2(G)}(I) = \deg_G(v_1) + \deg_G(v_2) - 2|N_G(v_1) \cap N_G(v_2)|,$$

luôn chẵn vì vậy G là Euler.

- (b) Với $k \geq 3$, lấy G là đồ thị chứa đúng hai chu trình: C_3 và $C_{2l+1} = v_1 v_2 \dots v_{2l+1}$. Lưu ý rằng $\alpha(G) = l + 1$. Giả sử các đỉnh của C_{2l+1} theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ, $V(C_3) \cap V(C_{2l+1}) = \{v_1\}$. Với $3 \leq k \leq l+1$, gọi $I = \{w, v_{2l+1}, v_2, v_4, \dots, v_{2(k-2)}\}$, trong đó $w \in V(C_3) - v_1$. Trong những trường hợp này, đều có $\deg_{TS_k(G)}(I) = 3$, và do đó $TS_k(G)$ không phải là Euler.
- (c) Rõ ràng, nếu $TS(G)$ là Euler thì nó phải liên thông, và do đó chúng ta có $TS(G) \simeq TS_1(G) \simeq G$, tức là G cũng là Euler. Với $k = 2$, gọi G là đồ thị thu được bằng cách nối K_4 với một đỉnh duy nhất. Vì G có đỉnh bậc 1, nó không phải là Euler. Người ta có thể chứng minh rằng $TS_2(G) \simeq C_3$ và do đó nó là Euler. Với $k \geq 3$, gọi G là đồ thị thu được bằng cách nối một đỉnh C_3 với một điểm cuối của P_3 và với $k - 2$ đỉnh mới. Lại có, vì G có đỉnh bậc 1 nên nó là không phải Euler. Người ta có thể chứng minh rằng $TS_k(G) \simeq C_4$ và do đó nó là Euler.

□

4.4. Chu vi - Girth

Nhắc lại rằng $\text{girth}(G)$ là kích thước nhỏ nhất của một chu trình trong G và là ∞ nếu G không có chu trình.

Mệnh đề 4.8. Với mọi $n \geq 2k + 1$, $\text{girth}(TS_k(P_n))$ là 4 và ∞ ngược lại. Do đó, $\text{girth}(TS(P_n))$ là 4 với mọi $n \geq 5$ và ∞ trong trường hợp ngược lại.

Chứng minh. Từ Mệnh đề 4.1, vì $TS(P_n)$ là đồ thị lưỡng cực nên nó không chứa C_3 nào, và do đó $TS_k(P_n)$ cũng vậy. Đặt $P_{2k+1} = v_1 v_2 \dots v_{2k+1}$. Có thể dễ dàng thấy rằng $TS_k(P_{2k+1})$ có C_4 chứa tập độc lập kích thước k $I = \{v_1, v_4, v_7, v_{10}, \dots, v_{2k+1}\}$. Với $n \geq 2k + 1$, vì P_{2k+1} là đồ thị con cảm sinh của P_n , Mệnh đề 3.2 tức là $TS_k(P_{2k+1})$ cũng là đồ thị con cảm sinh của $TS_k(P_n)$, và do đó $TS_k(P_n)$ cũng chứa C_4 . Do đó, $\text{girth}(TS_k(P_n))$ là 4 cho mọi $n \geq 2k + 1$. Cần chứng minh rằng khi $n \leq 2k$ thì đồ thị $TS_k(P_n)$ không có chu trình. Để thấy điều này, hãy lưu ý rằng chúng ta cũng có $k \leq \alpha(P_n) = \lceil n/2 \rceil$. Do đó, $k = n/2$ hoặc $k = (n + 1)/2$ và trong cả hai trường hợp người ta có thể chứng minh rằng $TS_k(P_n)$ không có chu trình. Do đó, vì $TS_2(P_n)$ là đồ thị con cảm sinh của $TS(P_n)$ nên chúng ta có $\text{girth}(TS(P_n))$ là 4 với mọi $n \geq 5 = 2 \times 2 + 1$ và ∞ ngược lại. \square

Mệnh đề 4.9. Với $1 \leq k < n/2$, $\text{girth}(TS_k(C_n)) = n$. Nếu $k = n/2$ chúng ta có $\text{girth}(TS_k(C_n)) = \infty$. Do đó, $\text{girth}(TS(C_n)) = n$.

Chứng minh. Giả sử rằng $I = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ là một tập độc lập của C_n , trong đó $1 \leq k < n/2$ và $\{v_i\}_{i=1, \dots, k}$ được sắp xếp theo hướng ngược chiều kim đồng hồ. Vì không có token nào có thể vượt lên trên bất kỳ token nào khác nên bất kỳ chu kỳ \mathcal{C} nào trong $TS(C_n)$ chứa I phải được hình thành bằng cách di chuyển các token theo hướng ngược chiều kim đồng hồ sao cho cuối cùng, token ban đầu được đặt trên v_i được đặt trên v_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, k - 1$) và token ban đầu được đặt trên v_k là được đặt trên v_1 . Người ta có thể đạt được kế hoạch này với chính xác n trượt token, với điều kiện là $1 \leq k < n/2$. Nếu $k = n/2$ thì đồ thị $TS_k(C_n)$ chứa đúng hai đỉnh cô lập. Khi đó, chu vi của nó là ∞ . Do đó, vì $TS_k(C_n)$ là một đồ thị con của $TS(C_n)$ với $1 \leq k \leq n/2$ thì $\text{girth}(TS(C_n)) = n$. \square

4.5. Cụm có kích thước nhất định

Mệnh đề 4.10.

(a) G có K_s khi và chỉ khi $TS(G)$ có K_s ($s \geq 3$).

(b) Tồn tại một đồ thị phân tách G sao cho G có K_s và $TS_k(G)$ ($k \geq 2$) không có.

Chứng minh.

(a) (\Rightarrow) Vì $G \simeq TS_1(G)$ mà $TS_1(G)$ là đồ thị con của $TS(G)$.

(\Leftarrow) Dựa vào Bổ đề 3.8.

(b) Xét một đồ thị phân tách $G = (K \cup S, E)_{K-max}$, trong đó $|K| = s$ và tồn tại $v \in K$ với $\cup_{w \in S} N_G(w) = \{v\}$ tức là tập lân cận của mỗi đỉnh trong S đều bao gồm đỉnh v . Điều này đảm bảo rằng khi ta xóa v , các đỉnh trong S không còn có cạnh kề với nhau nữa. Giả sử ngược lại rằng $TS_k(G) (k \geq 2)$ có K_s . Từ đó, theo Bổ đề 3.8, sẽ tồn tại một token t di chuyển qua tất cả các đỉnh trong K . Tuy nhiên, vì $k \geq 2$, luôn có ít nhất một token $t' \neq t$ trong S , do đó t không thể bao giờ di chuyển đến v . Điều này mâu thuẫn với việc G có K_s . Do đó, $TS_k(G) (k \geq 2)$ không có K_s .

□

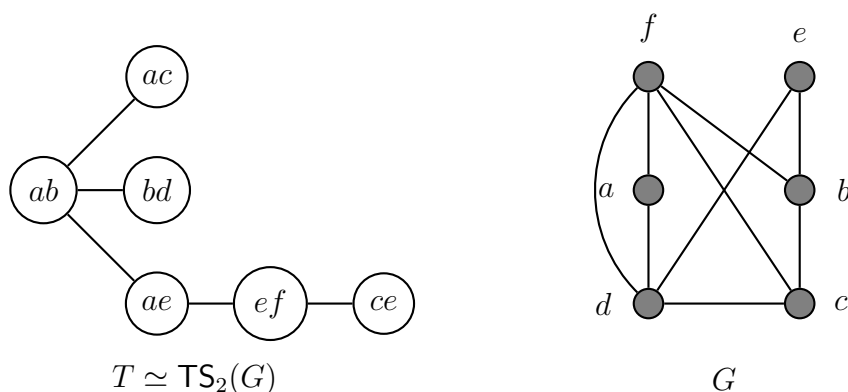
KẾT LUẬN

Trong khóa luận này, trọng tâm chính của chúng tôi là phân loại và tính chất của đồ thị cấu hình lại của các tập độc lập theo TS.

Trong Chương 3, chúng tôi đã trình bày các điều kiện cần và đủ để đồ thị G là một đồ thị cấu hình lại TS_k ($k \geq 2$), trong đó G thuộc các lớp đồ thị giới hạn nhất định, cụ thể là đồ thị hoàn chỉnh, đường đi, chu trình, đồ thị lưỡng cực hoàn chỉnh, đồ thị phân chia liên thông, đồ thị ngoài phẳng cực đại và đồ thị hoàn chỉnh trừ một cạnh. Ngay cả khi $k = 2$ thì vẫn chưa biết điều kiện cần và đủ để một rừng là một đồ thị cấu hình lại TS_k . Chúng tôi nhận xét rằng “là một đồ thị cấu hình lại TS_k ” không có tính kế thừa, ngay cả đối với cây. Ví dụ $K_{1,3}$ thì không là một đồ thị cấu hình lại TS_2 (Mệnh đề 3.7) nhưng nếu chúng ta thay thế một cạnh bằng P_4 thì đó là (Hình 4.4). Mệnh đề 3.8 cung cấp một cái nhìn sâu sắc hữu ích: cho một rừng F , nếu tồn tại G sao cho $F \simeq TS_2(G)$, đồ thị G phải là P_5 -free (ví dụ: xem đồ thị G trong Hình 4.4).

Trong Chương 4, chúng tôi đã chuyển trọng tâm sang một số thuộc tính của đồ thị, cụ thể là tính s -partite, tính phẳng, Euler, chu vi và kích thước của cụm, đồng thời cung cấp các ví dụ và chứng minh chỉ ra rằng đối với một số đồ thị G cho trước, một số đồ thị $TS(G)$ và $TS_k(G)$ chắc chắn (không) kế thừa một số tính chất từ G và ngược lại. Về đặc điểm cấu trúc của $TS(G)$ và $TS_k(G)$ vẫn chưa được nghiên cứu một cách có hệ thống, một số lượng lớn các câu hỏi theo hướng này có thể thu được bằng cách mở rộng kết quả của chúng tôi hoặc đơn giản là chỉ định một lớp đồ thị hoặc một thuộc tính chưa được xem xét.

Phụ lục A: Khả năng liên thông và đường kính của $TS_k(G)$ cho các lớp đồ thị cụ thể.



Hình 4.4: Việc thay thế một cạnh của $K_{1,3}$ bằng P_4 sẽ tạo ra một cây T cũng là một đồ thị cấu hình lại TS_2 . Mỗi nút ab trong T thể hiện cho một tập hợp ổn định có kích thước 2 của G .

Đối với đồ thị G nhất định, Bảng 4.2 bao gồm một số thuộc tính của khả năng kết nối và đường kính của $TS_k(G)$ có thể được suy ra từ các kết quả đã biết.

1. Kaminski và cộng sự. [12], cho thấy khả năng cấu hình lại đường dẫn ngắn nhất trong các đồ thị chung với tập độc lập cấu hình lại theo bất kỳ TS , TJ hoặc nào khi đồ thị đầu vào là một đồ thị hoàn hảo. Kết hợp việc giảm bớt chúng từ việc cấu hình lại đường đi sao cho thỏa mãn điều kiện nào đó.

Người ta có thể xây dựng một đồ thị G hoàn hảo trong đó $TS_k(G)$ không liên thông. Chẳng hạn, lấy G là $K_{1,n}$. Khi đó, với $n \geq k + 1$, $TS_k(G)$ là không liên

Bảng 4.2: Khả năng liên thông và đường kính $TS_k(G)$ ($2 \leq k \leq \alpha(G)$). Ở đây $n = |V(G)|$.

G (đơn, liên thông)		$TS_k(G) (1 \leq k \leq \alpha(G))$		Ref.
		luôn liên thông?	đường kính	
1	hoàn hảo	không	$O(2^n)$	[11,12]
2	even-hole-free	có, nếu $k = \alpha(G)$	$O(n)$, nếu $k = \alpha(G)$	
3	P_4 -free	không	$O(n^2)$	
4	claw-free	có	$O(\text{poly}(n))$	[5]
5	tree	không	$O(n^2)$	[8]
6	đường đi	có		
7	hoán vị lưỡng cực	có	$O(n^2)$	[10]
8	interval	không	$O(kn^2)$	[4, 6]

thông. Điều này cũng áp dụng cho các lớp đồ thị khác như đồ thị P_4 -free, cây, đồ thị hoán vị lưỡng cực và đồ thị khoảng.

2. Họ cũng chỉ ra rằng $TJ_k(G)$ liên thông và đường kính của nó là $O(n)$ khi G là đồ thị liên thông even-hole-free. Nhận thấy rằng khi $k = \alpha(G)$, ta có $TJ_k(G) \simeq TS_k(G)$.
3. Kamiński và cộng sự. [12] đã thiết kế một thuật toán thời gian tuyến tính để quyết định liệu có là đường đi giữa $I, J \in TS_k(G)$, và nếu có, tạo ra đường đi ngắn nhất, trong đó G là P_4 -free. Người ta có thể xác minh rằng thuật toán của họ thực sự tạo ra một đường đi trong $TS_k(G)$ của độ dài $O(n^2)$.
4. Bonsma và cộng sự [5] chứng tỏ rằng khi G là đồ thị liên thông claw-free thì $TS_k(G)$ là luôn liên thông và họ cung cấp thuật toán thời gian đa thức để xuất ra đường đi giữa cặp $I, J \in TS_k(G)$ bất kỳ.
- 5-6. Demaine và cộng sự [8] đã thiết kế một thuật toán thời gian tuyến tính để quyết định xem liệu tồn tại một đường đi giữa $I, J \in TS_k(G)$, và nếu có, xuất ra một đường đi có độ dài $O(n^2)$, với điều kiện G là một cây. Họ cũng đưa ra một ví dụ về một trường hợp (G, I, J) trong đó G là một đường đi và độ dài của đường đi ngắn nhất giữa $I, J \in TS_k(G)$ là $\Omega(n^2)$.
7. Fox-Epstein và cộng sự [10] đã thiết kế một thuật toán thời gian khối để quyết định xem liệu tồn tại một đường đi giữa $I, J \in TS_k(G)$, và nếu có, xuất ra một

đường đi có độ dài $O(n^2)$, với điều kiện G là đồ thị hoán vị lưỡng cực.

8. Bonamy và Bousquet [4] đã thiết kế thuật toán thời gian đa thức để quyết định liệu $TS_k(G)$ được kết nối khi G là đồ thị khoảng. Tuy nhiên, họ đã không cung cấp bất kỳ ước tính nào về đường kính của nó. Được thúc đẩy bởi câu hỏi này, Briański et al [6] gần đây cho thấy đường kính của $TS_k(G)$ là $O(kn^2)$.

Tài liệu tham khảo

- [1] Alavi, Behzad, Erdos, Lick, *Double vertex graphs*, Journal of Combinatorics, Information and System Sciences, **16**(1) (1991), 37-50.
- [2] Avis, D., Hoang, D.A., *A note on acyclic token sliding reconfiguration graphs of independent sets*, arXiv:2301.00317, (2023).
- [3] Bern, M.W., Eppstein, *Mesh generation and optimal triangulation*, In: Du, D.Z., Hwang, F.K.M.(eds.) Computing in Euclidean Geometry, no. 1 in Lecture Notes Series on Computing, (1992), 23-90.
- [4] Bonamy, M., Bousquet, N., *Token sliding on chordal graphs*, Proceedings of WG 2017, LNCS, **10520**(1) (2017), 127-139.
- [5] Bonsma, P.S., Kamiński, M., Wrochna, M., *Reconfiguring independent sets in claw-free graphs*, Proceedings of SWAT 2014, LNCS, **8503**(1) (2014), 86-97.
- [6] Brianiński, M., Felsner, S., Hodor, J., Micek, P., *Reconfiguring independent sets on interval graphs*, In: Bonchi, F., Puglisi, S.J. (eds.) Proceedings of MFCS 2021, LIPIcs, **202**(1) (2021), 23:1-23:14.
- [7] Collins, K.L., Trenk, A.N., *Split graphs*. Topics in Algorithmic Graph Theory, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, (2021), 189-206.
- [8] Demaine, E.D., Demaine, M.L., Fox-Epstein, E., Hoang, D.A., Ito, T., Ono, H., Otachi, Y., Uehara, R., Yamada, T. ,*Linear-time algorithm for sliding tokens on trees*, Theoretical Computer Science, **600**(1) (2015), 132-142.
- [9] Diestel, R., *Graph theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, Berlin, **173**(5) (2017).
- [10] Fox-Epstein, E., Hoang, D.A., Otachi, Y., Uehara, R., *Sliding token on bipartite permutation graphs*, Proceedings of ISAAC 2015, LNCS, **9472**(1) (2015), 237-247.

- [11] Kamiński, M., Medvedev, P., Milanič, M., *Shortest paths between shortest paths*, Theoretical Computer Science, **412**(39) (2011), 5205-5210.
- [12] Kamiński, M., Medvedev, P., Milanič, M., *Complexity of independent set reconfigurability problems*, Theoretical Computer Science. **439**(1) (2012), 9-15.
- [13] Lawson, C.L., *Software for C1 surface interpolation*, Mathematical Software, (1977), 161-194.
- [14] Monroy, R.F., Flores-Peñaloza, D., Huemer, C., Hurtado, F., Urrutia, J., Wood, D.R., *Token graphs*. Graphs and Combinatorics, **28**(3) (2012), 365-380.
- [15] Mynhardt, C., Nasserar, S., *Reconfiguration of colourings and dominating sets in graphs*, Combinatorics, Graph Theory and Computing, (2019), 171-191.
- [16] Nishimura, N., *Introduction to reconfiguration*, Algorithms, **11**(4) (2018), 52.
- [17] Preparata, F.P., Shamos, M.I., *Computational Geometry: An Introduction*, Springer, Berlin, (1985).
- [18] Van den Heuvel, J., *The complexity of change*, Surveys in Combinatorics, London Mathematical Society Lecture Note Series, **409**(1) (2013), 127-160.