

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN  
KHOA TOÁN - CƠ - TIN HỌC

Phan Minh Vũ

ĐỒ THỊ TÁI CẤU HÌNH CÁC TẬP KHÔNG DƯ THỪA  
VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

KHÓA LUẬN TỐT NGHIỆP HỆ ĐẠI HỌC CHÍNH QUY

Ngành: Toán - Tin ứng dụng

(Chương trình đào tạo chuẩn)

Cán bộ hướng dẫn: TS. Hoàng Anh Đức

Hà Nội - 2024

## LỜI CẢM ƠN

Trước khi trình bày nội dung chính của khóa luận, em xin đặc biệt bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Tiến sỹ Hoàng Anh Đức người đã tận tình hướng dẫn để em có thể hoàn thành khóa luận này.

Em cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến lãnh đạo, ban giám hiệu, các cán bộ cùng toàn thể thầy cô của Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học quốc gia Hà Nội, đặc biệt là các thầy cô bộ môn khoa Toán – Cơ – Tin học đã giúp đỡ, hỗ trợ tận tình cũng như truyền đạt kiến thức hữu ích trong quá trình em học tập, rèn luyện, bổ sung kiến thức tại trường và tạo điều kiện thuận lợi cho em có thể thực hiện khóa luận tốt nghiệp này.

Nhân dịp này em cũng xin được gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã luôn bên em, cổ vũ, động viên, giúp đỡ em trong suốt quá trình học tập và thực hiện khóa luận tốt nghiệp.

*Hà Nội, ngày 19 tháng 05 năm 2024*

Sinh viên

**Phan Minh Vũ**

# Mục lục

<b>Chương 1. Một số kiến thức và kiến thức liên quan</b> .....	<b>5</b>
<b>1.1. Kiến thức cơ bản trong đồ thị</b> .....	<b>5</b>
1.1.1. Tập thống trị (dominating sets) .....	5
1.1.2. Các lân cận mở và đóng (open and closed neighbourhoods) .....	5
1.1.3. Lân cận riêng tư (private neighbour) .....	6
1.1.4. Tập thống trị tối thiểu (minimum dominating set) .....	6
1.1.5. Lân cận riêng tư bên ngoài (external private neighbour) .....	6
1.1.6. Tính chất một số đồ thị trong nghiên cứu .....	6
<b>1.2. Các định nghĩa trong đồ thị <math>IR(G)</math></b> .....	<b>7</b>
1.2.1. Tập không dư thừa .....	7
1.2.2. Đồ thị tái cấu hình .....	9
1.2.3. Đồ thị $IR$ .....	9
<b>Chương 2. Một số tính chất của đồ thị <math>IR</math></b> .....	<b>11</b>
<b>2.1. Kết quả cơ bản</b> .....	<b>11</b>
<b>2.2. Đồ thị <math>IR</math> không liên thông</b> .....	<b>13</b>
<b>2.3. Đồ thị <math>IR</math> liên thông</b> .....	<b>15</b>
<b>2.4. Cây <math>IR</math> có đường kính 3 hoặc 4</b> .....	<b>19</b>
<b>Chương 3. Một số bài toán mở</b> .....	<b>38</b>

## LỜI MỞ ĐẦU

Trong Toán học và Tin học, lý thuyết đồ thị tập trung nghiên cứu về một đối tượng cơ bản là đồ thị - một đối tượng có tính ứng dụng rất cao trong thực tế. Mô hình đồ thị xuất hiện xung quanh ta, trong nhiều lĩnh vực của cuộc sống, như giao thông, cấu trúc website,... Một cách trừu tượng hóa, đồ thị là một tập các đối tượng được gọi là các đỉnh (hoặc nút) được nối với nhau bằng các cạnh (hoặc cung) và được biểu diễn theo nhiều cách khác nhau trong Toán học và Tin học. Cùng những ứng dụng thực tế là các bài toán cần được giải quyết sinh ra, ở đây chúng tôi sẽ trình bày bài toán về đồ thị tái cấu hình các tập không dư thừa.

Các vấn đề tái cấu hình xoay quanh việc xác định các điều kiện để chuyển đổi một giải pháp khả thi của một vấn đề cụ thể thành một giải pháp khả thi khác thông qua một chuỗi các giải pháp khả thi liên tiếp, sao cho mỗi hai giải pháp liên tiếp là kề nhau theo một mối quan hệ kề cụ thể. Các giải pháp này cùng với mối quan hệ kề tạo thành các đỉnh và cạnh của đồ thị tái cấu hình tương ứng. Các câu hỏi điển hình về đồ thị tái cấu hình liên quan đến cấu trúc của chúng (liên thông, Hamiltonicity, đường kính, đồng phẳng) có khả thi (đồ thị nào có thể được thực hiện như một loại cụ thể của đồ thị tái cấu hình) và tính chất thuật toán (tìm đường đi ngắn nhất giữa các giải pháp nhanh chóng).

Các phiên bản tái cấu hình của việc tô màu đồ thị và các vấn đề đồ thị khác, như các tập độc lập, đầy đủ (clique) và phủ đỉnh (vertex cover), được thực hiện nghiên cứu trong [1, 18, 6, 7, 23, 24].

Các vấn đề tái cấu hình thống trị (domination) liên quan đến các tập thống trị (dominating sets) của các kích thước khác nhau được xem xét lần đầu vào năm 2014 bởi Haas và Seyffarth [19] và sau đó được thực hiện nghiên cứu trong [21, 20, 2, 10]. Các vấn đề tái cấu hình thống trị chỉ liên quan đến các tập thống trị có kích thước tối thiểu đã được giới thiệu bởi Fricke, Hedetniemi, Hedetniemi và Hutson [13], và cũng được thực hiện nghiên cứu trong [1, 12, 3, 16, 22, 11, 17, 14, 4]. Ở nghiên cứu này chúng tôi nghiên cứu về đồ thị không dư thừa cực đại (gọi tắt là đồ thị IR) của một đồ thị  $G$  đã cho, các phương pháp mà các tập không dư thừa lớn nhất (được định nghĩa bên dưới) của  $G$  có thể được tái cấu hình liên tiếp thành các tập khác

nhau bằng cách hoán đổi một đỉnh cho một đỉnh lân cận trong mỗi bước.

Khóa luận tập trung làm rõ một số vấn đề sau: Trình bày ý tưởng về tính khả thi các phương pháp mà các tập không dư thừa IR của  $G$  có thể được tái cấu hình liên tiếp thành các tập khác nhau bằng cách hoán đổi một đỉnh duy nhất với một đỉnh kề trong mỗi bước. Các khái niệm và tính chất liên quan đến phương pháp, nội dung phương pháp và cuối cùng là các ví dụ cũng như kết quả nghiên cứu để minh họa cho các phương pháp tái cấu hình.

Bố cục của khóa luận bao gồm 3 chương:

- Chương 1 của khóa luận trình bày tóm tắt một số kết quả đã biết, các định lý và kết quả cơ bản liên quan đến khóa luận và các lý thuyết nền tảng của khóa luận.
- Chương 2 của khóa luận tập trung trình bày ý tưởng, các khái niệm và tính chất và nội dung cơ bản của Đồ thị IR với từng cấu trúc đồ thị.
- Chương 3 Trình bày các kết luận và bài toán mở và hướng nghiên cứu tiếp theo.

Do thời gian thực hiện khóa luận không nhiều, kiến thức còn hạn chế nên khi làm khóa luận không tránh khỏi những hạn chế và sai sót. Tác giả mong nhận được sự góp ý và những ý kiến phản biện của quý thầy cô và bạn đọc.

Xin chân thành cảm ơn!

*Hà Nội, ngày 19 tháng 05 năm 2024*

Sinh viên

**Phan Minh Vũ**

# Chương 1

## Một số kiến thức và kiến thức liên quan

### 1.1. Kiến thức cơ bản trong đồ thị

#### 1.1.1. Tập thống trị (dominating sets)

**Định nghĩa 1.1.1.** Một tập thống trị (dominating set)  $D$  của đồ thị  $G = (V, E)$  là tập con của  $V$  thỏa mãn với mọi  $v \in V \setminus D$  tồn tại  $u \in D$  sao cho  $u$  và  $v$  là liên kề.

#### 1.1.2. Các lân cận mở và đóng (open and closed neighbourhoods)

**Định nghĩa 1.1.2.** Cho đồ thị  $G = (V, E)$ , một tập  $D$  thống trị tập  $A \subseteq V(G)$  nếu  $A \subseteq N[D]$ , và thống trị đồ thị  $G$  nếu  $N[D] = V(G)$ . Các lân cận mở và đóng của một đỉnh  $v$  của  $G$  lần lượt là:  $N(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$  và  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ . Các lân cận mở và đóng của một tập đỉnh  $D \subseteq V$  lần lượt là:  $N(D) = \bigcup_{v \in D} N(v)$  và  $N[D] = N(D) \cup D$ .

### 1.1.3. Lân cận riêng tư (private neighbour)

**Định nghĩa 1.1.3.** Một  $D$ -lân cận riêng của  $v \in D$  là một đỉnh  $v'$  được thống trị bởi  $v$ , nhưng không được thống trị bởi bất kỳ đỉnh nào trong  $D - \{v\}$

$$PN(v, D) = N[v] - N[D - \{v\}] \quad (1.1.1)$$

### 1.1.4. Tập thống trị tối thiểu (minimum dominating set)

**Định nghĩa 1.1.4.** Một tập thống trị  $D$  là một tập thống trị tối thiểu nếu không có tập con nào của  $D$  là tập thống trị. Tức là  $D$  là thống trị tối thiểu nếu và chỉ nếu  $\forall v \in D, \exists D$ -lân cận riêng tư.

- $\gamma(G)$ : là kích thước tập thống trị nhỏ nhất.
- $\Gamma(G)$ : là kích thước tập thống trị tối thiểu lớn nhất (hay còn gọi là tập thống trị tối thiểu có số phần tử nhiều nhất).

### 1.1.5. Lân cận riêng tư bên ngoài (external private neighbour)

**Định nghĩa 1.1.5.** Nếu  $u \in PN(v, D)$  và  $u \neq v$  thì  $u \in V - D$ , trong trường hợp này  $u$  được gọi là một đỉnh ngoài  $D$ -lân cận riêng (external  $D$ -private neighbour) của  $v$ . Ta ký hiệu tập các  $D$ -lân cận riêng ngoài của  $v$  là  $EPN(v, D)$ .

### 1.1.6. Tính chất một số đồ thị trong nghiên cứu

Đồ thị đầy đủ hai phần  $K_{1,k}$ , với  $k \geq 1$ , được gọi là đồ thị sao. Giả sử  $K_{1,k}$  có các tập phân biệt  $\{u\}$  và  $\{v_1, \dots, v_k\}$ . Đồ thị nhện kép  $Sp(l_1, \dots, l_k)$ , với  $l_i \geq 1, k \geq 2$ , là một cây được thu được từ  $K_{1,k}$  bằng cách phân chia cạnh  $uv_i$   $l_i - 1$  lần.

Đồ thị sao kép  $S(k, n)$  là cây thu được bằng cách kết nối trung tâm của các sao  $K_{1,k}$  và  $K_{1,n}$ . Đồ thị nhện kép  $Sp(l_1, \dots, l_k)$  được thu được từ  $S(k, n)$  bằng cách phân chia các cạnh của đồ thị con  $K_{1,k}$  bởi  $l_i - 1$  lần, với  $i = 1, \dots, k$ , và các cạnh của đồ thị con  $K_{1,n}$  bởi  $m_i - 1$  lần, với  $i = 1, \dots, n$ .

## 1.2. Các định nghĩa trong đồ thị $IR(G)$

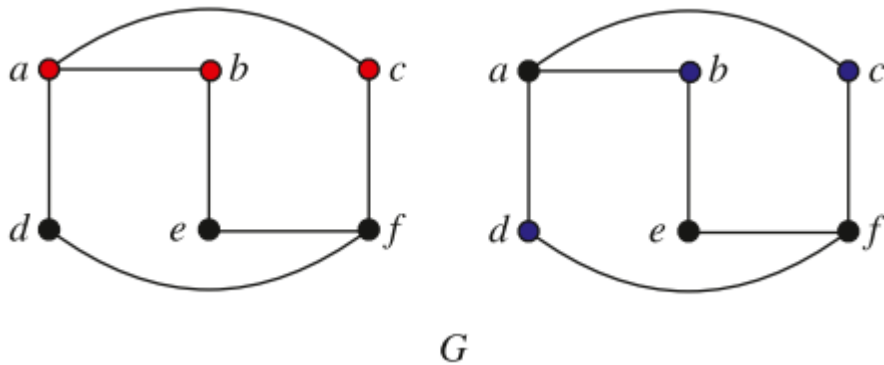
### 1.2.1. Tập không dư thừa

**Định nghĩa 1.2.1.** Tập các đỉnh  $D$  của đồ thị  $G = (V, E)$  được gọi là không dư thừa, nếu với mọi  $v \in D$ ,  $v$  là đỉnh cô lập trong đồ thị con được cảm sinh bởi  $D$  hoặc  $v$  kề với một đỉnh  $w \in V - D$  và  $w$  không kề với đỉnh nào khác trong  $D$ .

Khi này chúng ta cần chú ý:

- Cho  $D$  là tập không dư thừa của  $G$ , và với mỗi  $v \in D$ ,  $v \in PN(v, D)$  khi và chỉ khi  $v$  độc lập trong đồ thị con  $G[D]$  sinh ra bởi  $D$ .
- Một đỉnh cô lập của  $G[D]$  có thể hoặc không có một đỉnh ngoài  $D$ -lân cận riêng (*external  $D$ -private neighbour*), nhưng nếu  $v$  có bậc dương trong  $G[D]$  thì  $EPN(v, D) \neq \emptyset$ .

Ví dụ.



Hình 1.1: Đồ thị  $G$  và các tập không dư thừa  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{b, c, d\}$ .

- Mỗi đỉnh trong  $A$  có bậc dương trong đồ thị  $G[A]$ , ta có:  $PN(a, A) = EPN(a, A) = \{d\}$ ,  $PN(b, A) = EPN(b, A) = \{e\}$  và  $PN(c, A) = EPN(c, A) = \{f\}$ .
- Ngược lại,  $B$  là một tập độc lập đồ thị  $G[B]$ , ta có:  $PN(b, B) = \{b, e\}$  và  $EPN(b, B) = \{e\}$ ,  $PN(c, B) = \{c\}$ ,  $PN(d, B) = \{d\}$  và  $EPN(c, B) = EPN(d, B) = \emptyset$ .



**Định nghĩa 1.2.2.** Ta ký hiệu  $IR(G)$  là kích thước lớn nhất trong đồ thị  $G$ , hay còn gọi là tập không dư thừa cực đại trong đồ thị  $G$ . Một tập không dư thừa cực đại của  $G$  là một tập không dư thừa có kích thước là  $IR(G)$ .

Một đồ thị không dư thừa còn thỏa mãn tính chất tất cả các đồ thị không liên thông đều là đồ thị không dư thừa, nhưng vẫn có một số đồ thị liên thông ngoại lệ (ví dụ: sao  $K_{1,n}$  với  $n \geq 2$ ,  $P_4, P_5, C_5, C_6, C_7$ ).

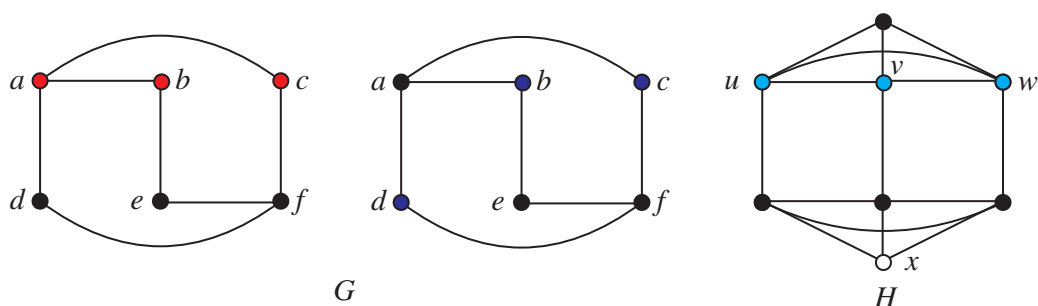
**Định nghĩa 1.2.3. Tập không dư thừa theo [8]**

Một tập  $D \subseteq V$  là tập không dư thừa nếu  $PN(v, D) \neq \emptyset$  đối với mỗi  $v \in D$ , và là không dư thừa cực đại nếu không có tập cha nào của  $D$  là không dư thừa. Số không dư thừa  $ir(G)$  là số phần tử ít nhất của một tập không dư thừa cực đại trong  $G$ , số phần tử nhiều nhất của một tập không dư thừa trong  $G$  là  $IR(G)$ . Tập  $ir$  của đồ thị  $G$  là tập không dư thừa có kích thước là  $ir(G)$ , tập  $IR$  của đồ thị  $G$  là tập không dư thừa có kích thước là  $IR(G)$ .

**Quan sát 1.** Nếu một tập là không dư thừa và thống trị, nó là tập không dư thừa cực đại và tập thống trị tối thiểu.

**Quan sát 2.** Một tập thống trị là tập thống trị tối thiểu nếu và chỉ nếu nó là tập không dư thừa.

**Quan sát 3.** Bất kỳ tập độc lập nào cũng đều là không dư thừa, và bất kỳ tập độc lập cực đại nào cũng là thống trị tối thiểu và không dư thừa cực đại.



Hình 1.2: Đồ thị  $G$  và các tập  $IR(G)$  là  $A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d\}$ , và một đồ thị  $H$  với tập  $IR(G)$  không là tập thống trị  $\{u, v, w\}$ .

Tuy nhiên, một tập không dư thừa cực đại không nhất thiết phải là tập thống trị; tập  $IR\{u, v, w\}$  của đồ thị  $H$  trong Hình 1.2 là một ví dụ về trường hợp này, việc thêm bất kỳ đỉnh nào để thống trị  $x$  sẽ mất đi lân cận riêng tư của các đỉnh khác.

### 1.2.2. Đồ thị tái cấu hình

Việc tái cấu hình liên quan đến các mối quan hệ giữa các giải pháp cho một vấn đề cụ thể, trong đó việc tái cấu hình từ một giải pháp sang một giải pháp khác là một chuỗi các bước sao cho mỗi bước tạo ra một giải pháp trung gian khả thi. Không gian giải pháp có thể được biểu diễn dưới dạng một đồ thị tái cấu hình, trong đó hai đỉnh đại diện cho các giải pháp là liền kề nếu giữa chúng có quan hệ cụ thể trực tiếp tới nhau. Các giải pháp và các mối quan hệ liền kề của chúng tạo thành tập đỉnh và tập cạnh của đồ thị tái cấu hình liên quan.

### 1.2.3. Đồ thị IR

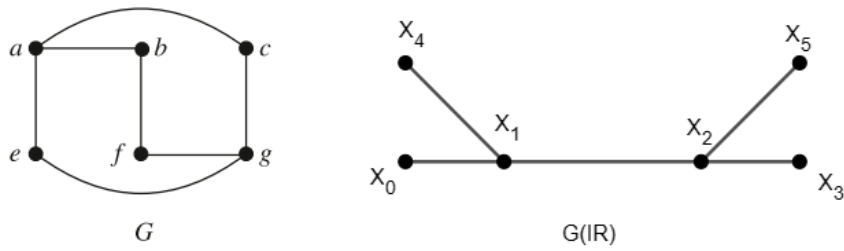
**Định nghĩa 1.2.4.** Đồ thị IR của  $G$ , ký hiệu  $G(IR)$ , là đồ thị có tập đỉnh bao gồm các tập  $IR(G)$ , tức là các tập không dư thừa của  $G$  có số phần tử lớn nhất, trong đó hai tập  $IR(G)$   $D$  và  $D'$  là kề nhau nếu và chỉ nếu tồn tại các đỉnh  $u \in D$  và  $v \in D'$  sao cho  $uv \in E(G)$  và  $D' = (D - \{u\}) \cup \{v\}$ . Chúng tôi viết ngắn gọn biểu thức  $D' = (D - \{u\}) \cup \{v\}$  thành  $D \overset{uv}{\rightsquigarrow} D'$ , và cũng viết  $D \sim_H D'$  để chỉ rằng  $D$  và  $D'$  kề nhau trong  $H = G(IR)$ . Khi  $D \overset{uv}{\rightsquigarrow} D'$ , chúng tôi nói rằng  $v$  được đổi chỗ vào và  $u$  được đổi chỗ ra khỏi tập  $IR(G)$ , hoặc đơn giản là  $u$  và  $v$  được đổi chỗ. Ký hiệu  $u \sim v$  ( $u \approx v$ , tương ứng) chỉ ra rằng  $u$  kề (không kề) với  $v$ ; đôi khi chúng tôi viết  $u \sim_G v$  để làm nổi bật rằng  $u$  kề với  $v$  trong đồ thị  $G$ .

#### Ví dụ.

Chúng ta cho trước đồ thị  $G = (V, E)$  như hình 1.2.3 và chỉ ra nó có các tập IR gồm:

- $X_0 = \{a, b, e\}$
- $X_1 = \{b, c, e\}$

- $X_2 = \{c, e, f\}$
- $X_3 = \{c, f, g\}$
- $X_4 = \{a, b, c\}$
- $X_5 = \{e, f, g\}$



Hình 1.3: Đồ thị  $G$  và đồ thị IR của  $G$ .

Ta xây dựng được đồ thị IR với các đỉnh là các tập IR như Hình 1.2.3, trong đó ta thấy:

- $X_0 \sim_{G(IR)} X_1$  qua cạnh  $ac$ .
- $X_1 \sim_{G(IR)} X_4$  qua cạnh  $ae$ .
- $X_1 \sim_{G(IR)} X_2$  qua cạnh  $bf$ .
- $X_2 \sim_{G(IR)} X_5$  qua cạnh  $cg$ .
- $X_2 \sim_{G(IR)} X_3$  qua cạnh  $eg$ .

# Chương 2

## Một số tính chất của đồ thị IR

### 2.1. Kết quả cơ bản

Chúng ta bắt đầu bằng việc nêu ra một số kết quả đơn giản về đồ thị IR. Ký hiệu hợp của các đồ thị  $G_1$  và  $G_2$  là  $G_1 + G_2$ , và tích Descartes của chúng là  $G_1 \times G_2$ . Nếu  $G_i \cong G$  với  $i = 1, \dots, n$ , thì hợp  $G_1 + \dots + G_n$  được ký hiệu là  $nG$  và tích Descartes  $G_1 \times \dots \times G_n$  được ký hiệu là  $G^n$ .

Rõ ràng,  $\text{IR}(G) = 1$  nếu và chỉ nếu  $G = K_n$ ,  $n \geq 1$ . Do đó,  $K_n$  có  $n$  tập IR, và bất kỳ hai tập nào trong chúng đều kề nhau trong  $K_n(\text{IR})$ , tức là  $K_n(\text{IR}) = K_n$ .

**Mệnh đề 2.1.1.** (i) Nếu  $H_1$  và  $H_2$  là đồ thị IR, thì  $H_1 \times H_2$  là một đồ thị IR.

(ii) Đối với mọi  $n \geq 1$ , hypercube  $Q_n$  là một đồ thị IR. Đặc biệt,  $C_4 \cong Q_2$  là một đồ thị IR.

#### Chứng minh:

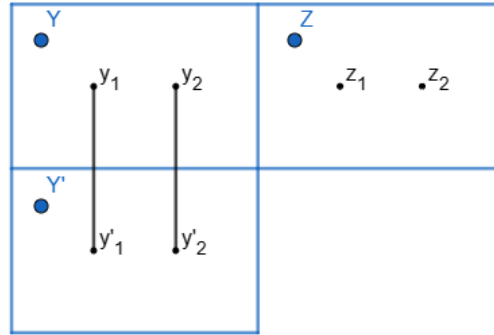
(i) Nếu  $H_1 = G_1(\text{IR})$  và  $H_2 = G_2(\text{IR})$ , thì  $H_1 \times H_2 = (G_1 + G_2)(\text{IR})$ .

(ii) Cho  $G = nK_2$ . Khi đó,  $G(\text{IR}) = (K_2)^n \cong Q_n$ .

Kết quả tiếp theo là có ý nghĩa độc lập và cũng được sử dụng suốt bài báo để tìm thêm các tập IR bằng cách sử dụng lân cận riêng tư bên ngoài trong một tập IR đã cho. Đối với một tập không dư thừa  $X$ , chúng ta chia  $X$  thành các tập con  $Y$  và  $Z$  (một trong hai tập có thể là rỗng), trong đó mỗi đỉnh trong  $Z$  cô lập trong  $G[X]$  và mỗi đỉnh trong  $Y$  có ít nhất một lân cận riêng tư bên ngoài. (Phân chia này không

nhất thiết phải là duy nhất. Các đỉnh cô lập của  $G[X]$  có lân cận riêng tư bên ngoài có thể được phân bố một cách tùy ý vào  $Y$  hoặc  $Z$ .) Đối với mỗi  $y \in Y$ , chúng ta đặt  $y' \in EPN(y, X)$  và định nghĩa  $Y' = \{y' : y \in Y\}$ . Đặt  $X' = (X - Y) \cup \{Y'\}$ ; lưu ý rằng  $|X| = |X'|$ . Chúng tôi gọi  $X'$  là tập flip-set của  $X$ , hoặc để chính xác hơn, là tập flip-set của  $X$  sử dụng  $Y'$ .

**Ví dụ.**



Hình 2.1: Mô tả các quan hệ từng tập thành phần trong tập không dư thừa  $X = Y \cup Z$  và  $X' = Y' \cup Z$

Ta có thể thấy:

- Với mỗi đỉnh trong tập  $Y \in X$  sẽ có một lân cận riêng tư bên ngoài trong tập  $Y' \in X'$ , ở đây là:  $EPN(y_1, X) = y'_1$  và  $EPN(y_2, X) = y'_2$ , tương tự với  $Y'$ .
- Với mỗi đỉnh trong  $Z$  đều là đỉnh cô lập trong đồ thị  $G[X]$  và  $G[X']$ , ở đây là:  $z_1, z_2$  là cô lập.

**Mệnh đề 2.1.2.** Nếu  $X$  là một tập IR của  $G$ , thì bất kỳ tập flip-set  $X'$  nào của  $X$  cũng là một tập IR.

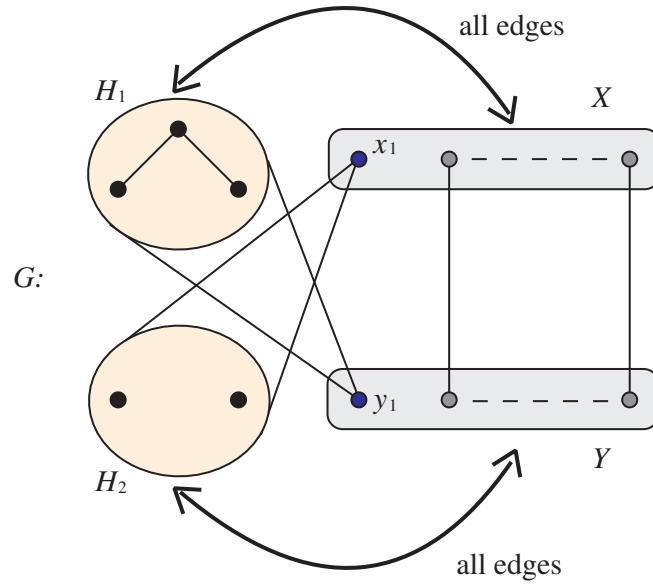
**Chứng minh:** Xét bất kỳ  $x \in X'$ . Chúng tôi sẽ chỉ ra rằng  $x$  có một lân cận riêng tư đối với  $X'$ .

- Đối với  $x \in Z$  ta chứng minh tính cô lập của  $x$ : Với các ký hiệu như kết quả bên trên,  $x \in Z = X - Y = X' - Y'$ . Theo định nghĩa của  $Z$ ,  $x$  cô lập trong  $G[X]$ . Vì mỗi đỉnh trong  $Y'$  có một lân cận riêng tư bên ngoài trong  $X$  của một đỉnh

$y \in Y$  nào đó, không có đỉnh nào trong  $Y'$  kề  $x$ . Do đó,  $x$  được cô lập trong  $G[X']$ , tức là  $x \in \text{PN}(x, X')$ .

- Tiếp theo giả sử  $x \in Y'$  ta chứng minh mỗi đỉnh trong  $x$  đều có một lân cận riêng tư bên ngoài: Khi đó,  $x = y'$  với một số  $y \in Y$ , nghĩa là  $y'$  có một lân cận riêng tư bên ngoài trong  $X$  của một đỉnh  $y \in V(G) - X'$ . Chúng ta sẽ chỉ ra rằng  $y$  là một lân cận riêng tư bên ngoài của  $y'$  trong  $X'$ . Bây giờ  $y$  không kề với tất cả các đỉnh trong  $Z$  vì những đỉnh này là cô lập trong  $G[X]$ , và  $y$  không kề với tất cả các đỉnh trong  $Y' - \{y\}$ , vì mỗi  $v' \in Y' - \{y\}$  có một ngoài lân cận riêng tư trong  $X$  với một đỉnh  $v \in Y - \{y\}$ . Do đó,  $y \in \text{EPN}(y', X')$ , tức là  $y \in \text{EPN}(x, X')$ . Như vậy,  $X'$  là một tập không dư thừa. Vì  $|X'| = |X|$ ,  $X'$  là một tập IR của  $G$ .

## 2.2. Đồ thị IR không liên thông



Hình 2.2: Đồ thị  $G$  trong chứng minh phần 2.2.1

Ta biết qua nghiên cứu ở đồ thị [9] thì mọi đồ thị đều là  $\gamma$ -graph. Để chỉ ra cụ thể một đồ thị  $H$  với  $V(H) = v_1, \dots, v_n$  là một đồ thị  $\gamma$ , ta sẽ xây dựng một đồ thị cha  $G$  của  $H$  với  $\gamma(G) = 2$ . Trong đó một số đỉnh  $u \in V(G) - V(H)$  thuộc tất cả các

tập  $\gamma$ , tức là  $\{u, v_1\}, \dots, \{u, v_n\}$ .

Cho  $H$  là một đồ thị không liên thông tùy ý, sao cho  $H_1$  là thành phần chứa các đỉnh liên thông trong  $H$ , và  $H_2$  là thành phần chứa các đỉnh độc lập trong  $H$ . Ta sẽ xây dựng một đồ thị cha  $G$  cho đồ thị  $H$  sao cho tập IR có hai tập  $R_i$  và  $S_j$ . Mỗi  $R_i$  có dạng  $\{u_i\} \cup X$  trong đó  $u_i \in V(H_1)$  và  $X \subseteq V(G) - V(H)$ . Mỗi  $S_j$  có dạng  $\{v_j\} \cup Y$  trong đó  $v_j \in V(H_2)$  và  $Y \subseteq V(G) - V(H) - X$ . Khi này ta có các cạnh giữa  $u_i$  của  $H_1$  xác định các cạnh trong các đỉnh  $R_i$  của  $G(IR)$ , tương tự các cạnh giữa các đỉnh  $v_j$  của  $H_2$  xác định các cạnh trong các đỉnh  $S_j$  của  $G(IR)$ . Điều này chỉ ra rằng  $G(IR) \cong H$ .

**Định lý 2.2.1.** Mọi đồ thị không liên thông đều là một đồ thị IR của mọi đồ thị  $G$ .

*Chứng minh.* Cho đồ thị  $H$  là đồ thị không liên thông bậc  $n$ ,  $H_1$  là thành phần liên thông trong  $H$ , và  $H_2$  là kết hợp của các thành phần còn lại trong  $H$ . Gọi  $V(H_1) = \{u_1, \dots, u_{n_1}\}$  và  $V(H_2) = \{v_1, \dots, v_{n_2}\}$ .

Đối với mọi  $N \geq n = n_1 + n_2$ , xét hai tập phân biệt  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  và  $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$ . Ta tạo đồ thị  $G$  của  $H$ , sao cho  $G[X] \cong G[Y] \cong K_N$ , mỗi đỉnh trong  $X \cup \{y_1\}$  đều kề với mọi đỉnh trong  $H_1$ , mỗi đỉnh trong  $Y \cup \{x_1\}$  đều kề với mọi đỉnh trong  $H_2$ , và  $x_i \sim y_i$  với  $i = 2, \dots, N$ .

Xem hình 2.2. Gọi  $V_1 = X \cup V(H_1)$  và  $V_2 = Y \cup V(H_2)$ .

Đối với mọi  $i \in \{1, \dots, n_1\}$ ,  $R_i = \{u_i\} \cup X$  là một tập không dư thừa trên  $G$ , vì  $y_1 \in \text{EPN}(u_i, R_i)$ ,  $v_1 \in \text{EPN}(x_1, R_i)$  và  $y_j \in \text{EPN}(x_j, R_i)$  với  $j \in \{2, \dots, N\}$ . Tương tự, đối với mọi  $i \in \{1, \dots, n_2\}$ ,  $S_i = \{v_i\} \cup Y$  là không dư thừa. Dễ dàng thấy  $|R_i| = |S_i| = N + 1$ .

Chúng ta sẽ chỉ ra rằng  $\text{IR}(G) = N + 1$  và các tập  $R_i$  và  $S_i$  là duy nhất các tập IR của  $G$ :

Cho  $D$  là bất kỳ tập không dư thừa cực đại nào đó trong  $G$ . Đầu tiên giả sử  $D \cap V(H) = \emptyset$ . Nếu thêm vào đó,  $D \cap X = \emptyset$  hoặc  $D \cap Y = \emptyset$  thì  $|D| \leq N$ , và nếu  $x_i, y_j \in D$  cho một số  $i, j$ , thì  $\{x_i, y_j\}$  thống trị  $G$ , do đó là tập không dư thừa lớn nhất, vì vậy  $D = \{x_i, y_j\}$  and  $|D| = 2 \leq N$ .

Bây giờ giả sử  $D$  chứa ít nhất hai đỉnh  $u_i$  của  $H_1$ . (Kết quả tương tự nếu  $D$  chứa

ít nhất hai đỉnh của  $H_2$ ). Nếu  $D$  chứa ít nhất một đỉnh trong  $X \cup \{y_1\}$ , thì các  $u_i$  không phải là cô lập trong  $G[D]$  và không có lân cận riêng tư nào trong  $V_1 \cup \{y_1\}$ , và chúng không có lân cận nào trong  $V_2 - \{y_1\}$ . Do đó  $\text{PN}(u_i, D) = \emptyset$ , mâu thuẫn. Do đó  $D \cap (X \cup \{y_1\}) = \emptyset$  và  $\text{PN}(u_i, D) \subseteq V(H_1)$ . Kết quả là  $I_1 = D \cap V(H_1)$  là một tập không dư thừa của  $H_1$ . Nếu  $y_j \in D$  cho  $j \geq 2$ , thì  $\text{PN}(y_j, D) \subseteq V_2 - \{y_1\} \subseteq N[y_j]$ . Do đó  $D \cap V_2 = \{y_j\}$  và  $|D| \leq \text{IR}(H_1) + 1 \leq N$ . Ngược lại, nếu  $D \cap Y = \emptyset$  và  $I_2$  là bất kỳ tập không dư thừa nào của  $H_2$ , thì  $I_1 \cup I_2$  là tập không dư thừa cực đại trong  $G$ . Trong trường hợp này  $|D| \leq \text{IR}(H_1) + \text{IR}(H_2) \leq n \leq N$ .

Cuối cùng, giả sử  $D$  chỉ chứa một đỉnh  $u_i$  của  $H_1$ . Vì  $u_i$  thống trị  $X \cup \{y_1\}$ , các lân cận riêng tư của tất cả các đỉnh khác trong  $D$  thuộc  $V(H_1) \cup V_2 - \{y_1\}$ . Nếu  $x_j \in D$  cho một số  $j$ , thì  $\text{PN}(u_i, D) = \{y_1\}$ , do đó  $D \cap V_2 = \emptyset$  và  $|D| \leq N + 1$ . Hơn nữa, nếu  $|D| = N + 1$ , thì  $D = R_i$ . Do đó chúng ta có thể giả định rằng  $D \cap V_1 = \{u_i\}$ . Nếu  $y_1 \in D$ , thì  $\{u_i, y_1\}$  thống trị trên  $G$ , do đó  $D = \{u_i, y_1\}$ . Nếu  $y_j \in D$  cho  $j \geq 2$ , thì  $\{u_i, y_j\}$  thống trị trên  $G - V(H_1)$ . Dưới giả định được đề cập ở trên rằng  $D \cap V(H_1) = \{u_i\}$ , ta có được rằng  $\{u_i\}$  là tập không dư thừa cực đại trong  $H_1$ . Do đó  $D = \{u_i, y_j\}$ . Nếu  $D \cap Y = \emptyset$ , thì  $D = \{u_i\} \cup I$ , nơi  $I$  là một tập không dư thừa của  $H_2$ . Trong tất cả các trường hợp,  $|D| \leq \text{IR}(H_1) + \text{IR}(H_2) \leq n \leq N$ .

Kết quả là  $R_i = \{u_i\} \cup X$ ,  $i \in \{1, \dots, n_1\}$ , và  $S_i = \{v_i\} \cup Y$ ,  $i \in \{1, \dots, n_2\}$ , là duy nhất các tập IR của  $G$ . Gọi  $H^* = G(\text{IR})$  với  $V(H^*) = \{R_i : i \in \{1, \dots, n_1\}\} \cup \{S_i : i \in \{1, \dots, n_2\}\}$ . Lưu ý rằng  $R_i \sim_{H^*} R_j$  nếu và chỉ nếu  $u_i \sim_G u_j$  nếu và chỉ nếu  $u_i \sim_{H_1} u_j$ , và  $S_i \sim_{H^*} S_j$  nếu và chỉ nếu  $v_i \sim_G v_j$  nếu và chỉ nếu  $v_i \sim_{H_2} v_j$ . Do đó  $H^*[\{R_1, \dots, R_{n_1}\}] \cong H_1$  và  $H^*[\{S_1, \dots, S_{n_2}\}] \cong H_2$ . Vì  $|R_i - S_j| > 1$  cho mọi  $i$  và  $j$  không có  $R_i$  nào kề trong  $H^*$  đối với bất kỳ  $S_j$  nào; do đó  $H \cong H^*$ .  $\square$

### 2.3. Đồ thị IR liên thông

Trong bổ đề đầu tiên, chúng tôi sử dụng Mệnh đề 2.1.2 để khám phá thêm vai trò của các lân cận riêng tư bên ngoài và các tập flip-sets trong việc xây dựng các đồ thị IR. Kết hợp bổ đề 2.3.1 và 2.3.2 dẫn đến kết quả rằng không phải tất cả các đồ thị



liên thông đều là đồ thị IR.

**Bổ đề 2.3.1.** *Nếu  $G$  có một tập IR  $X$  trong đó ít nhất hai đỉnh có lân cận riêng tư bên ngoài và đồ thị IR  $H$  của  $G$  là liên thông, thì  $H$  có một chu trình 4 đỉnh bao gồm tập  $X$ , hoặc  $\text{diam}(H) \geq 3$  và  $d_H(X, X') \geq 3$  cho bất kỳ flip-set  $X'$  của  $X$ .*

*Chứng minh.* Gọi  $X = \{x_1, \dots, x_r\}$  là một tập IR của  $G$  sao cho, đối với một số  $k \geq 2$ ,  $x_1, \dots, x_k$  đều có lân cận riêng tư bên ngoài, trong khi  $x_{k+1}, \dots, x_r$  cô lập trong  $G[X]$  (và có thể có hoặc không có lân cận riêng tư bên ngoài). Đối với  $i = 1, \dots, k$ , chọn  $x'_i \in \text{EPN}(x_i, X)$  và cho  $X' = (X - \{x_1, \dots, x_k\}) \cup \{x'_1, \dots, x'_k\}$ . Theo Mệnh đề 2.1.2,  $X'$  là một tập IR( $G$ ).

Đầu tiên giả sử rằng  $k = 2$  và cho  $X_i = (X - \{x_i\}) \cup \{x'_i\}$ ,  $i = 1, 2$ . Vì  $x'_i \in \text{EPN}(x_i, X)$  và  $x_1x_2$  là cạnh duy nhất có thể của  $G[X]$ , mỗi  $X_i$  đều là độc lập và do đó là một tập IR( $G$ ). Hơn nữa,  $(X \stackrel{x_1x'_1}{\sim}_H X_1 \stackrel{x_2x'_2}{\sim}_H X' \stackrel{x'_1x_1}{\sim}_H X_2 \stackrel{x'_2x_2}{\sim}_H X)$ , nghĩa là  $H$  có một chu trình 4 đỉnh  $C$ . Vì  $|X - X'| = |X_1 - X_2| = 2$ ,  $X \approx X'$  và  $X_1 \approx X_2$ , do đó  $C$  là một chu trình 4 đỉnh bao gồm  $X$ .

Bây giờ giả sử  $k \geq 3$ . Khi đó  $|X - X'| = k \geq 3$ , và vì  $H$  liên thông, ít nhất ba lần đổi chỗ cần thiết để cấu hình lại  $X$  thành  $X'$ . Do đó  $d_H(X, X') \geq 3$  và do đó  $\text{diam}(H) \geq 3$ , như đã khẳng định.  $\square$

Chúng tôi đưa ra ba hệ quả trực tiếp của Bổ đề 2.3.1.

**Hệ quả 2.3.1.** *Nếu  $G$  có một tập IR không độc lập và đồ thị IR  $H$  của  $G$  là liên thông, thì  $H$  có một chu trình 4 đỉnh hoặc  $\text{diam}(H) \geq 3$ .*

*Vì các tập IR  $X, X_1, X_2, X'$  trong phần đầu của chứng minh của Bổ đề 2.3.1 tạo ra một  $C_4$ , nên chúng tôi có kết quả sau.*

**Hệ quả 2.3.2.** *Nếu đồ thị IR  $H$  của  $G$  là liên thông và  $G$  có một tập IR  $X$  sao cho*

- (i)  $G[X]$  có đúng một cạnh, hoặc
- (ii)  $X$  là độc lập nhưng ít nhất hai đỉnh có lân cận riêng tư bên ngoài  $X$ , thì  $X$  nằm trên một chu trình 4 đỉnh của  $H$ .

Trong phần thứ hai của chứng minh của Bổ đề 2.3.1, nếu một số tập IR  $X$  của  $G$  chứa  $k$  đỉnh có bậc dương trong  $G[X]$ , thì  $d_H(X, X') \geq k$ . Kết quả tiếp theo là:

**Hệ quả 2.3.3.** Nếu đồ thị IR  $H$  của  $G$  là liên thông và  $G$  có một tập IR  $X$  chứa  $k \geq 3$  đỉnh có bậc dương trong  $G[X]$ , hoặc có lân cận riêng tư bên ngoài  $X$ , thì  $\text{diam}(H) \geq k$ .

Chúng tôi tiếp tục xem xét các đồ thị mà các tập IR của chúng là độc lập và đồ thị IR của chúng là liên thông. Bổ đề 2.3.2 minh họa rằng các đồ thị IR của những đồ thị này là một chu trình.

**Bổ đề 2.3.2.** Cho  $G$  là một đồ thị thỏa mãn tất cả các tập IR của nó đều là độc lập. Nếu đồ thị IR  $H$  của  $G$  là liên thông và có thứ ít nhất ba đỉnh, thì  $H$  chứa một tam giác hoặc một chu trình  $C_4$ .

*Chứng minh.* Chứng minh  $H$  chứa một tam giác: Nếu  $\text{IR}(G) = 1$ , thì  $G = K_n$  cho một số  $n$ , vì vậy  $H = K_n$ . Khi đó  $n \geq 3$  và  $H$  có một tam giác. Do đó chúng ta giả sử rằng  $\text{IR}(G) \geq 2$ . Gọi  $X_0 = \{x_1, \dots, x_r\}$  là tập IR( $G$ ) bất kỳ và không mất tính tổng quát,  $X_1 = \{b, x_2, \dots, x_r\}$ , trong đó  $b \sim x_1$ , là một tập IR( $G$ ) sao cho  $X_0 \sim_H X_1$ . Gọi  $X_2$  là bất kỳ tập IR( $G$ ) khác. Nếu  $X_2 = \{c, x_2, \dots, x_r\}$ , thì  $b \sim c$ , nếu không  $(X_0 - \{x_1\}) \cup \{b, c\}$  là một tập độc lập (do đó là một tập IR) có số phần tử lớn hơn  $X_0$ , điều này là không thể. Tương tự,  $x_1 \sim c$ . Khi đó  $X_0 \stackrel{x_1b}{\sim}_H X_1 \stackrel{bc}{\sim}_H X_2 \stackrel{cx_1}{\sim}_H X_0$  và  $H$  có một tam giác.

Chứng minh  $H$  chứa một chu trình  $C_4$ : Tương tự trên, mà không mất tính tổng quát, ta giả sử  $X_2 = \{b, c, x_3, \dots, x_r\}$ , trong đó  $c \sim x_2$ . Vì  $X_1$  là độc lập, nên  $b \not\sim x_2, \dots, x_r$ , và vì  $X_2$  là độc lập, nên  $c \not\sim b, x_3, \dots, x_r$ . Đặt  $X_3 = \{x_1, c, x_3, \dots, x_r\}$ . Nếu  $c \sim x_1$ , thì  $G[X_3]$  chỉ có cạnh  $x_1c$ . Vì  $b \in \text{EPN}(x_1, X_3)$  và  $x_2 \in \text{EPN}(c, X_3)$ ,  $X_3$  nên  $X_3$  là một tập IR( $G$ ) chứa một cạnh, điều này không đúng. Do đó  $c \not\sim x_1$ , vì vậy  $X_3$  là một tập IR( $G$ ) độc lập và  $(X_0 \stackrel{x_1b}{\sim}_H X_1 \stackrel{x_2c}{\sim}_H X_2 \stackrel{bx_1}{\sim}_H X_3 \stackrel{cx_2}{\sim}_H X_0)$  tạo thành một chu trình 4 chu trình trong  $H$ .  $\square$

Chúng tôi sử dụng Hệ quả 2.3.1 và Bổ đề 2.3.2 để chứng minh kết quả tiếp theo của chúng tôi, cho thấy rằng không phải tất cả các đồ thị liên thông đều là đồ thị IR.

**Mệnh đề 2.3.1.** Nếu  $H$  là một đồ thị IR có đường kính 2, thì  $H$  có một chu trình  $C_4$ .

*Chứng minh.* Giả sử bằng phản chứng rằng  $H$  là một đồ thị không chứa chu trình  $C_4$  với  $\text{diam}(H) = 2$ , và  $H = G(\text{IR})$  đối với đồ thị  $G$  nào đó. Theo Hệ quả 2.3.1, mỗi tập IR của  $G$  là độc lập. Vì  $H$  là liên thông nhưng không phải đồ thị đầy đủ,  $\text{IR}(G) \geq 2$  và  $G$  có ít nhất ba tập IR. Giả sử  $G$  có  $k$  tập IR. Hãy chọn  $X_0 = \{x_1, \dots, x_r\}$  là bất kỳ tập IR của  $G$  và không mất tính tổng quát,  $X_1 = \{b, x_2, \dots, x_r\}$ , trong đó  $b \sim x_1$ , là một tập IR của  $G$  sao cho  $X_0 \sim_H X_1$ . Như đã cho thấy trong đoạn văn thứ hai của chứng minh của Bổ đề 2.3.2, nếu  $G$  có một tập IR (độc lập)  $\{y, c, x_3, \dots, x_r\}$ , trong đó  $y \in \{x_1, b\}$ , thì  $H$  chứa một chu trình  $C_4$ . Do đó, tất cả các tập IR của  $G$  đều là các tập độc lập dạng  $Y_i = \{y_i, x_2, \dots, x_r\}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , như được thể hiện trong đoạn văn đầu tiên của chứng minh của Bổ đề 2.3.2,  $G[\{y_1, \dots, y_k\}]$  là một đồ thị đầy đủ. Khi đó  $Y_i \sim_H Y_j$  cho tất cả  $1 \leq i < j \leq k$ , điều này muốn nói rằng  $H \cong G[\{y_1, \dots, y_k\}]$  cũng là đầy đủ. Điều này mâu thuẫn với  $\text{diam}(H) = 2$ .

Do Mệnh đề 2.3.1, các cây có đường kính 2 tức là các sao  $K_{1,n}$  không phải là đồ thị IR. Chúng tôi tổng quát hóa kết quả này để bao gồm tất cả các đồ thị không đầy đủ có các đỉnh toàn cục.  $\square$

**Mệnh đề 2.3.2.** *Nếu  $H$  là một đồ thị không đầy đủ có một đỉnh toàn cục, thì  $H$  không phải là một đồ thị IR.*

*Chứng minh.* Vì  $H$  không đầy đủ và có một đỉnh toàn cục  $\text{diam}(H) = 2$ . Giả sử phản chứng rằng  $H = G(\text{IR})$  cho một số đồ thị  $G$ . Hãy chọn  $u$  là một đỉnh toàn cục của  $H$  và  $X = \{x_1, \dots, x_r\}$  là tập IR của  $G$  tương ứng với  $u$  ( $X$  là tập IR của  $G$  kề với tất cả các tập IR khác). Vì  $\text{diam}(G) = 2$ , Hệ quả 2.3.3 cho thấy rằng  $G[X]$  chứa không quá một cạnh. Vì  $X$  không nằm trên một chu trình  $C_4$  trong  $H$ , Hệ quả 2.3.2(i) cho thấy rằng  $X$  là độc lập.

Vì  $H$  không đầy đủ, tồn tại các tập IR của  $G$   $Y_1, Y_2, Y_3$  khác nhau so với  $X$ , lại có  $Y_1 \sim_H Y_2 \sim_H Y_3$  nhưng  $Y_1 \not\sim_H Y_3$ . Hơn nữa,  $X \sim_H Y_i$  cho  $i = 1, 2, 3$ . Mà không mất tổng quát, giả sử rằng  $Y_2 = \{b, x_2, \dots, x_r\}$ , trong đó  $x_1 \sim b$ .

- Chúng tôi chỉ ra rằng  $Y_1 = \{a, x_2, \dots, x_r\}$ , trong đó  $x_1 \sim a$  và  $a \sim b$ .

Vì  $Y_1 \sim_H Y_2$ ,  $|Y_1 - Y_2| = 1$ . Giả sử rằng  $x_1 \in Y_1$  và  $b \notin Y_1$ ; giả sử  $Y_1 = \{x_1, y_2, x_3, \dots, x_r\}$ , trong đó  $y_2 \neq b$  và  $x_2 \sim y_2$ . Khi đó  $|Y_1 - Y_2| = |\{x_1, y_2\}| = 2$ , điều này là một mâu thuẫn.

Giả sử  $\{x_1, b\} \subseteq Y_1$ . Chúng ta có thể giả sử mà không mất tổng quát rằng  $Y_1 = \{x_1, b, x_3, \dots, x_r\}$ , trong đó  $x_2 \sim b$ . Khi đó  $Y_1$  và  $Y_2$  khác nhau chỉ trong việc  $x_1 \in Y_1 - Y_2$  và  $x_2 \in Y_2 - Y_1$ . Vì  $Y_1 \sim Y_2$ , chúng ta suy ra rằng  $x_1 \sim x_2$ . Tuy nhiên, điều này là một mâu thuẫn vì  $X$  là độc lập.

Do đó  $Y_1 = \{a, x_2, \dots, x_r\}$ , trong đó  $x_1 \sim a$  và  $a \sim b$ . Tương tự,  $Y_3 = \{c, x_2, \dots, x_r\}$ , trong đó  $c \neq a$ ,  $x_1 \sim c$  và  $c \sim b$ . Vì hiệu đối xứng  $Y_1 \Delta Y_3 = \{a, c\}$  và  $Y_1 \approx Y_3$ , chúng ta suy ra rằng  $a \approx c$ . Vì  $|Y_1 \cup \{c\}| > \text{IR}(G)$ , chúng ta biết rằng  $G[Y_1 \cup \{c\}]$  chứa một cạnh. Vì  $ac \notin E(G)$  và  $X$  là độc lập, chúng ta có thể giả sử mà không mất tổng quát rằng  $ax_2$  là một cạnh của  $G[Y_1]$ . (Cùng một lý luận được áp dụng nếu  $c$  kề với một đỉnh trong  $\{x_2, \dots, x_r\}$ ). Nhưng  $Y_1$  là một tập  $\text{IR}(G)$  và  $\text{diam}(H) = 2$ , do đó theo Hệ quả 2.3.3,  $ax_2$  là cạnh duy nhất của  $G[Y_1]$ .

Chọn  $d \in \text{EPN}(x_2, Y_1)$ . Vì  $X$  là độc lập và  $d \sim x_2$ , chúng ta biết rằng  $d \neq x_1$ . Vì  $ax_2$  là cạnh duy nhất của  $G[Y_1]$  và  $d \in \text{EPN}(x_2, Y_1)$ , tập  $Z = (Y_1 - \{x_2\}) \cup \{d\} = \{a, d, x_3, \dots, x_r\}$  là độc lập, do đó là một tập  $\text{IR}(G)$ . Tuy nhiên,  $|X - Z| = 2$ , nghĩa là  $d_H(X, Z) \geq 2$ , điều này mâu thuẫn với sự thật rằng  $X$  tương ứng với đỉnh toàn cục  $u$  của  $H$ . Vậy  $H$  không phải là đồ thị  $\text{IR}$  nếu  $H$  là đồ thị không đầy đủ và có một đỉnh toàn cục.  $\square$

## 2.4. Cây $\text{IR}$ có đường kính 3 hoặc 4

Chúng tôi tiếp tục tiến hành tìm các đồ thị có thể thực hiện được dưới dạng đồ thị  $\text{IR}$  bằng cách xem xét các cây  $\text{IR}$  (cây mà là các đồ thị  $\text{IR}$ ). Vì tất cả các đồ thị đầy đủ đều là đồ thị  $\text{IR}$ ,  $K_1$  và  $K_2$  là các cây  $\text{IR}$ . Chúng tôi sẽ chứng minh (xem Định lý 2.4.2) rằng cây  $\text{IR}$  không đầy đủ nhỏ nhất là đồ thị sao kép  $S(2, 2)$  có bậc là 6. Chúng ta biết từ các Mệnh đề 2.3.1 và 2.3.2 rằng các cây có đường kính là 2 (nghĩa là các đồ thị sao) không phải là đồ thị  $\text{IR}$ . Bây giờ chúng tôi tập trung vào các cây có đường kính là 3 và 4. Bổ đề 2.4.1 là một kết quả quan trọng khác khám phá vai trò của các lân cận riêng tư và các tập flip-set hữu ích trong cả hai trường hợp này. Bằng cách này, nó cung cấp thông tin về cấu trúc của các đồ thị  $\text{IR}$  của các đồ thị có các loại tập  $\text{IR}$  cụ thể.

**Bổ đề 2.4.1.** *Hãy cho  $H$  là một đồ thị IR liên thông của một đồ thị  $G$ . Giả sử  $X$  là một tập  $\text{IR}(G)$  sao cho chính xác ba đỉnh  $x_1, x_2, x_3$  có bậc dương trong  $G[X]$ . Đối với  $i = 1, 2, 3$  chọn  $x'_i \in \text{EPN}(x_i, X)$  và cho  $X'$  là flip-set của  $X$  sử dụng  $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ . Nếu  $d_H(X, X') = 3$  thì  $H$  chứa một chu trình 4 đỉnh cảm sinh, hoặc một đồ thị sao kép  $S(2, 2)$  cảm sinh mà trong đó  $X$  và  $X'$  là đối cực (đối cực: là khoảng cách lớn nhất giữa 2 lá).*

*Chứng minh.* Chúng ta có thể chứng minh sự xuất hiện của đồ thị sao kép  $S(2, 2)$  cảm sinh:

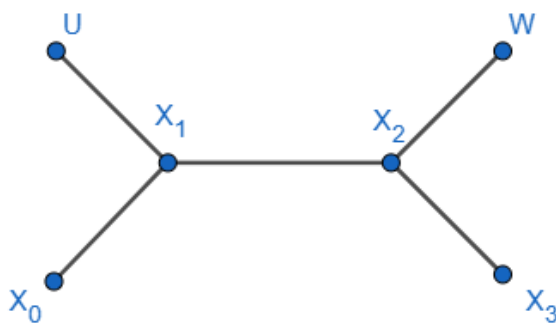
Giả sử  $d_H(X, X') = 3$  và  $H$  không chứa  $C_4$  được cảm sinh. Chúng ta chọn  $P : (X = X_0, X_1, X_2, X_3 = X')$  là một đường đi ngắn nhất  $X-X'$  trong  $H$ . Vì  $|X - X'| = d_H(X, X') = 3$ , chúng ta có thể giả sử mà không mất tính tổng quát rằng  $X_1 = \{x'_1, x_2, \dots, x_r\}$ ,  $X_2 = \{x'_1, x'_2, x_3, \dots, x_r\}$  và  $X_3 = \{x'_1, x'_2, x'_3, x_4, \dots, x_r\}$ . Vì  $x'_1 \approx x_2, x_3, \dots, x_r$  theo tính chất lân cận riêng tư của  $x_1$ , cạnh duy nhất có thể có trong  $G[X_1]$  là  $x_2x_3$ . Bằng Hệ quả 2.3.2(i) và giả thiết của chúng ta rằng  $H$  không chứa một  $C_4$  được cảm sinh, chúng ta có thể giả sử  $x_2 \approx x_3$ . Vì  $x_1, x_2, x_3$  có bậc dương trong  $G[X]$ ,  $x_1 \sim x_2, x_3$ . Tương tự, cạnh duy nhất có thể có trong  $G[X_2]$  là  $x'_1x'_2$ , và một lần nữa chúng ta có thể giả sử rằng  $x'_1 \approx x'_2$ . Áp dụng Hệ quả 2.3.2(i) cho  $X_3$ , chúng ta có (a)  $x'_1 \approx x'_3 \approx x'_2$  hoặc (b)  $x'_1 \sim x'_3 \sim x'_2$ .

Giả sử (a) đúng và xem xét  $R = \{x_1, x_2, x'_3, x_4, \dots, x_r\}$ . Vì  $x'_3 \in \text{EPN}(x_3, X)$ ,  $x_1x_2$  là cạnh duy nhất của  $G[R]$ . Tuy nhiên,  $x'_i \in \text{EPN}(x_i, R)$  cho  $i = 1, 2$ , vì vậy  $R$  là một tập  $\text{IR}(G)$ . Theo Hệ quả 2.3.2(i),  $H$  có một chu trình 4 đỉnh, điều này không đúng. Do đó giả sử (b) đúng và xem xét tập  $W = \{x'_2, x'_3, x_3, x_4, \dots, x_r\}$ .

- \* Vì  $x_1 \sim x_3$  trong khi  $x_1$  không kề với  $x'_2, x'_3, x_4, \dots, x_r$ ,  $x_1 \in \text{EPN}(x_3, W)$ .
- \* Vì  $x'_1 \sim x'_3$  trong khi  $x'_1$  không kề với  $x'_2, x_3, \dots, x_r$ ,  $x'_1 \in \text{EPN}(x'_3, W)$ .
- \* Vì  $x_2 \sim x'_2$  trong khi  $x_2$  không kề với  $x'_3, x_3, \dots, x_r$ ,  $x_2 \in \text{EPN}(x'_2, W)$ .
- \* Vì  $x_i$  là cô lập trong  $G[W]$  với mọi  $i \geq 4$ ,  $x_i \in \text{PN}(x_i, W)$ .

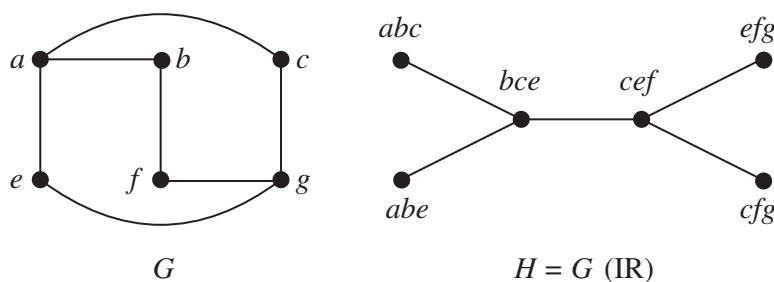
Do đó,  $W$  là một tập  $\text{IR}(G)$ . Vì  $x'_3 \sim x'_1$ ,  $W \sim_H X_2$ . Theo Mệnh đề 2.1.2, flip-set  $U = \{x_1, x'_1, x_2, x_4, \dots, x_r\}$  của  $W$  cũng là một tập  $\text{IR}(G)$ . Vì  $x_1 \sim x_3$ , nên  $U \sim_H X_1$ .

Vì  $U$  và  $W$  không kề nhau và không kề với các tập IR( $G$ )  $X, X_2, X_3$  và  $X, X_1, X_3$ , tương ứng, nên  $H$  chứa đồ thị sao kép  $S(2, 2)$  như một đồ thị con được cảm sinh. Vì  $P$  là một đường đi ngắn nhất  $X-X'$ ,  $X$  và  $X'$  là các lá đối diện của đồ thị sao kép này. □



Hình 2.3: Đồ thị IR  $H = S(2, 2)$  của  $G$

Chúng tôi tiếp tục nghiên cứu của mình về các cây có thể thực hiện được dưới dạng các cây IR và xác định cây IR nhỏ nhất với đường kính là 3. Như đã nêu trong phần giới thiệu, một tính chất thường được nghiên cứu của đồ thị tái cấu hình là đường kính của nó. Cụ thể, một đường kính nhỏ của một đồ thị IR cho thấy rằng việc chuyển đổi từ một tập IR sang tập IR khác trong đồ thị nguồn tương đối dễ dàng.



Hình 2.4: Đồ thị  $G$  và đồ thị IR  $H = S(2, 2)$  của  $G$

**Mệnh đề 2.4.1.** Sao kép  $S(2, 2)$  là cây IR nhỏ nhất duy nhất với đường kính là 3.

*Chứng minh.* Giả sử  $T$  với  $\text{diam}(T) = 3$  là một cây IR của đồ thị  $G$ . Theo Hệ quả 2.3.2 và 2.3.3, Tất cả tập IR của  $G$  là độc lập hoặc cảm sinh một đồ thị 3 đỉnh có bậc dương. Nếu tất cả các tập IR là độc lập thì đồ thị IR của  $G$  có một chu trình

theo Bổ đề 2.3.2. Mặt khác, nếu  $G$  có một tập IR  $X$  chứa ba đỉnh  $x_1, x_2, x_3$  có bậc dương trong  $G[X]$ , thì Bổ đề 2.4.1 chỉ ra rằng  $T$  có  $S(2, 2)$  làm đồ thị cảm sinh. Đồ thị  $G$  trong Hình 2.4 làm một ví dụ về một đồ thị cho  $G(\text{IR}) \cong S(2, 2)$ . (Xác minh điều này liên quan đến việc tìm kiếm toàn diện nhưng đơn giản về các tập IR( $G$ ) và sự kề nhau của chúng.)  $\square$

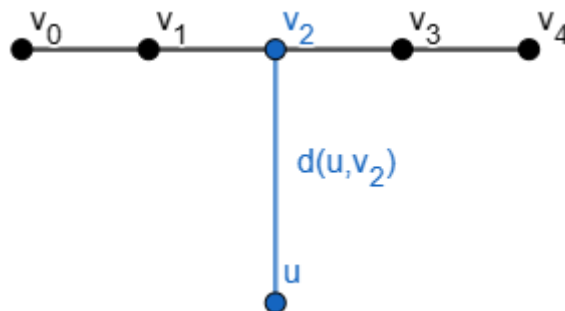
Cho phần còn lại của bài báo, chúng tôi xem xét các cây có đường kính là 4. Mục tiêu của chúng tôi là chứng minh rằng đồ thị nhện kép  $Sp(1, 1; 1, 2)$  là cây IR nhỏ nhất duy nhất với đường kính là 4. Trường hợp này dường như khó khăn hơn so với các chủ đề trước đó và đòi hỏi một vấn đề kỹ thuật. Trước tiên, chúng tôi phát biểu một quan sát đơn giản để tham khảo.

**Quan sát 4.** Nếu  $P : (v_0, \dots, v_4)$  là một đường đi trong một cây  $T$  và  $u$  là một đỉnh sao cho  $d(u, v_2) \geq 3$  hoặc  $d(u, v_1) \geq 4$ , thì  $\text{diam}(T) \geq 5$ .

*Chứng minh.* Với những ký hiệu cho trước như trên, chúng tôi thực hiện chứng minh  $\text{diam}(T) \geq 5$  cho từng trường hợp đề cập tới ở quan sát:

1. Trường hợp

a. Đường đi từ  $u$  đến  $v_2$  không đi qua đỉnh nào trên  $P$ :  $d(u, v_2) \geq 3$ :



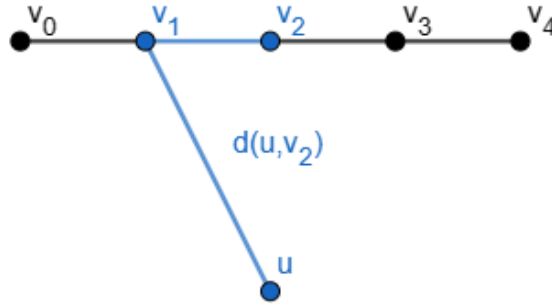
- \* Khoảng cách từ  $u$  đến  $v_2$  ít nhất 3 cạnh.
- \* Đường đi từ  $v_2$  đến  $v_0$  hoặc  $v_4$  là 2 cạnh (vì  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$  là đường đi liên tiếp).
- \* Do đó, nếu xét khoảng cách từ  $u$  đến  $v_0$  qua  $v_2$ , ta có:
 
$$d(u, v_0) = d(u, v_2) + d(v_2, v_0) \geq 3 + 2 = 5$$

\* Tương tự, nếu xét khoảng cách từ  $u$  đến  $v_4$  qua  $v_2$ , ta có:

$$d(u, v_4) = d(u, v_2) + d(v_2, v_4) \geq 3 + 2 = 5$$

\* Vậy nên  $\text{diam}(T) \geq 5$

b. Đường đi từ  $u$  đến  $v_2$  có đi qua  $v_1$  (ta có kết quả tương tự với đi qua  $v_3$ ):



\* Khoảng cách từ  $u$  đến  $v_2$  ít nhất 3 cạnh và có đi qua  $v_1$ , tức là  $d(u, v_1) \geq 2$ , và vì  $d(v_1, v_2) = 1$ , ta có:

$$d(u, v_2) = d(u, v_1) + d(v_1, v_2) \geq 3$$

\* Nếu  $d(u, v_1) = 2$ , ta có  $d(u, v_2) = 2 + 1 = 3$ .

\* Xét khoảng cách từ  $v_2$  đến  $v_0$  đây là một mâu thuẫn (do tính chất không có chu trình của cây và tính chất khoảng cách của đường kính ( $\text{diam}$ )), vậy ta xét đi đến  $v_4$ :

$$d(v_2, v_4) = 2$$

\* Vậy khoảng cách từ  $u$  đến  $v_4$  có độ dài:

$$d(u, v_4) = d(u, v_2) + d(v_2, v_4) = 3 + 2 = 5$$

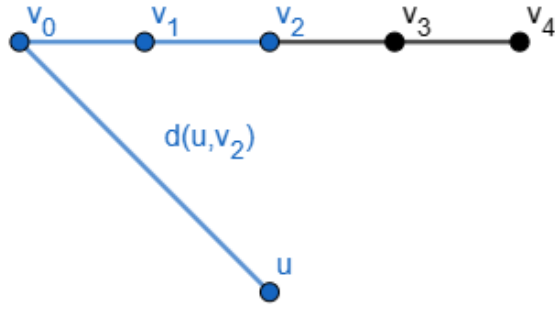
\* Vậy  $\text{diam}(T) \geq 5$ .

c. Đường đi từ  $u$  đến  $v_2$  có đi qua  $v_0$  (ta có kết quả tương tự với đi qua  $v_4$ ):

\* Khoảng cách từ  $u$  đến  $v_2$  ít nhất 3 cạnh và có đi qua  $v_0$ , tức là  $d(u, v_0) \geq 1$ , và vì  $d(v_0, v_2) = 2$ , ta có:

$$d(u, v_2) = d(u, v_0) + d(v_0, v_2) \geq 3$$





\* Nếu  $d(u, v_0) = 1$ , ta có  $d(u, v_2) = 1 + 2 = 3$ .

\* Xét khoảng cách từ  $v_2$  đến  $v_4$ :

$$d(v_2, v_4) = 2$$

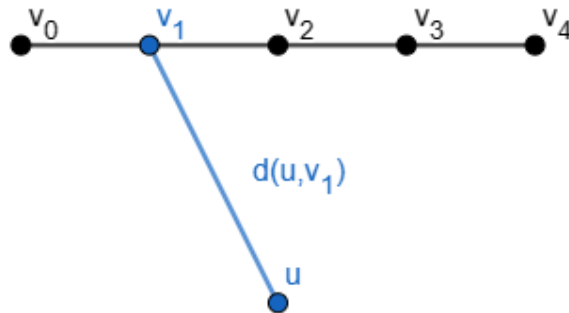
\* Vậy khoảng cách từ  $u$  đến  $v_4$  có độ dài:

$$d(u, v_4) = d(u, v_2) + d(v_2, v_4) = 3 + 2 = 5$$

\* Vậy  $\text{diam}(T) \geq 5$ .

2. Trường hợp  $d(u, v_1) \geq 4$ :

a. Đường đi từ  $u$  đến  $v_1$  không đi qua đỉnh nào trên  $P$ :



\* Khoảng cách từ  $u$  đến  $v_1$  ít nhất 4 cạnh.

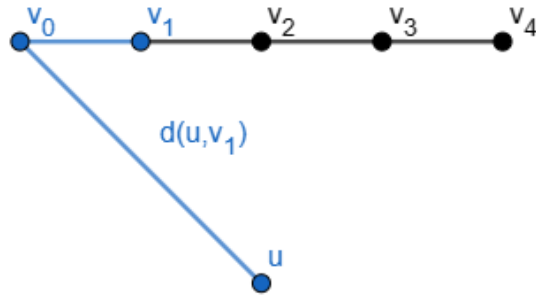
\* Khoảng cách từ  $v_1$  đến  $v_4$  là 3 cạnh (vì  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4$  là đường đi liên tiếp).

\* Do đó, nếu xét khoảng cách từ  $u$  đến  $v_4$  qua  $v_1$ , ta có:

$$d(u, v_4) = d(u, v_1) + d(v_1, v_4) \geq 4 + 3 = 7$$

\* Vì  $d(u, v_4) \geq 7$ , hiển nhiên  $\text{diam}(T) \geq 5$

b. Đường đi từ  $u$  đến  $v_1$  có đi qua  $v_0$ :



\* Khoảng cách từ  $u$  đến  $v_1$  ít nhất là 4 cạnh và có đi qua  $v_0$ , tức là  $d(u, v_0) \geq 3$ , và vì  $d(v_0, v_1) = 1$ , ta có:

$$d(u, v_1) = d(u, v_0) + d(v_0, v_1) \geq 4$$

\* Nếu khoảng cách  $d(u, v_0) = 3$ , ta có  $d(u, v_1) = d(u, v_0) + d(v_0, v_1) = 4$

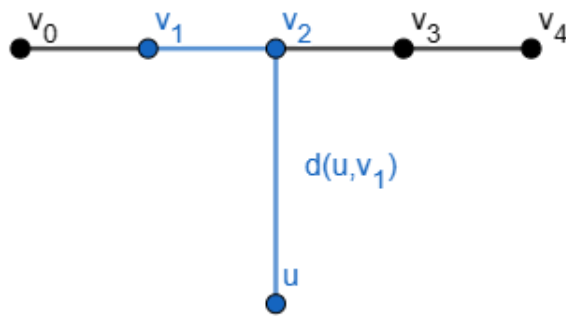
\* Khoảng cách từ  $v_1$  đến  $v_4$  là 3 cạnh.

\* Vậy xét khoảng cách từ  $u$  đến  $v_4$ :

$$d(u, v_4) = d(u, v_1) + d(v_1, v_4) = 4 + 3 = 7$$

\* Do đó,  $\text{diam}(T) \geq 7$ .

c. Đường đi từ  $u$  đến  $v_1$  có đi qua  $v_2$ :



\* Khoảng cách từ  $u$  đến  $v_1$  ít nhất là 4 cạnh và có đi qua  $v_2$ , tức là  $d(u, v_2) \geq 3$ , và vì  $d(v_2, v_1) = 1$ , ta có:

$$d(u, v_1) = d(u, v_2) + d(v_2, v_1) \geq 4$$

- \* Nếu khoảng cách  $d(u, v_2) = 3$ , ta có  $d(u, v_1) = d(u, v_2) + d(v_2, v_1) = 4$
- \* Xét khoảng cách từ  $v_1$  đến  $v_4$  đây là một mâu thuẫn (do tính chất không có chu trình của cây và tính chất khoảng cách của đường kính (diam)), vậy ta xét đi đến  $v_0$ :

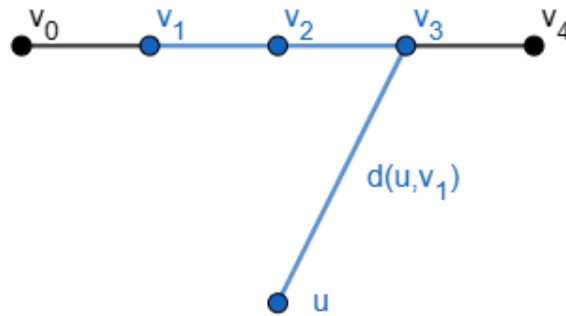
$$d(v_1, v_0) = 1$$

- \* Vậy xét khoảng cách từ  $u$  đến  $v_0$ :

$$d(u, v_4) = d(u, v_1) + d(v_1, v_0) = 4 + 1 = 5$$

- \* Do đó,  $\text{diam}(T) \geq 5$ .

d. Đường đi từ  $u$  đến  $v_1$  có đi qua  $v_3$ :



- \* Khoảng cách từ  $u$  đến  $v_1$  ít nhất là 4 cạnh và có đi qua  $v_3$ , tức là  $d(u, v_3) \geq 2$ , và vì  $d(v_3, v_1) = 2$ , ta có:

$$d(u, v_1) = d(u, v_3) + d(v_3, v_1) \geq 4$$

- \* Nếu khoảng cách  $d(u, v_3) = 2$ , ta có  $d(u, v_1) = d(u, v_3) + d(v_3, v_1) = 4$
- \* Xét khoảng cách từ  $v_1$  đến  $v_4$  đây là một mâu thuẫn (do tính chất không có chu trình của cây và tính chất khoảng cách của đường kính (diam)), vậy ta xét đi đến  $v_0$ :

$$d(v_1, v_0) = 1$$

- \* Vậy xét khoảng cách từ  $u$  đến  $v_0$ :

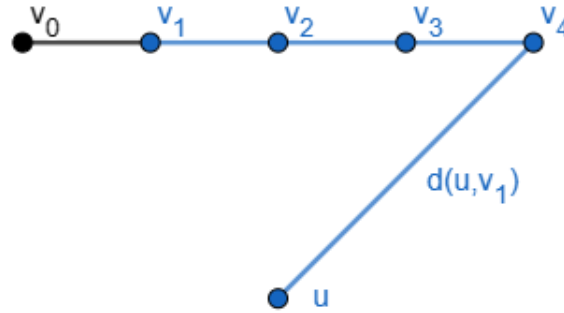
$$d(u, v_4) = d(u, v_1) + d(v_1, v_0) = 4 + 1 = 5$$

\* Do đó,  $\text{diam}(T) \geq 5$ .

e. Đường đi từ  $u$  đến  $v_1$  có đi qua  $v_4$ :

\* Khoảng cách từ  $u$  đến  $v_1$  ít nhất là 4 cạnh và có đi qua  $v_4$ , tức là  $d(u, v_4) \geq 1$ , và vì  $d(v_3, v_1) = 3$ , ta có:

$$d(u, v_1) = d(u, v_4) + d(v_4, v_1) \geq 4$$



\* Khoảng cách từ  $v_1$  đến  $v_0$  là 1 cạnh.

\* Vậy, xét khoảng cách từ  $u$  đến  $v_0$ :

$$d(u, v_0) = d(u, v_1) + d(v_1, v_0) = 4 + 1 = 5$$

\* Do đó,  $\text{diam}(T) \geq 5$ .

Trong cả hai trường hợp trên, đường kính (diam) của cây  $T$  đều ít nhất là 5. Vậy nên, ta có  $\text{diam}(T) \geq 5$ .  $\square$

Bổ đề 2.4.1 liên quan đến một tập  $\text{IR}(G)$   $X$  sao cho chính xác ba đỉnh  $x_1, x_2, x_3 \in X$  có bậc dương trong  $G[X]$  và sao cho khoảng cách trong  $G(\text{IR})$ , giữa  $X$  và flip-set của nó  $X'$  là 3. Bây giờ chúng tôi xem xét cùng tình huống nhưng  $d_{G(\text{IR})}(X, X') = 4$ ; sự thay đổi nhỏ này dường như dẫn đến một tình huống phức tạp hơn nhiều. Bổ đề 2.4.2 cho phép chúng tôi mô tả cây  $\text{IR}$  nhỏ nhất duy nhất với đường kính là 4.

**Bổ đề 2.4.2.** Cho  $H$  là một đồ thị  $\text{IR}$  của  $G$ . Giả sử  $X$  là một tập  $\text{IR}(G)$  sao cho chính xác ba đỉnh  $x_1, x_2, x_3$  có bậc dương trong  $G[X]$ . Với  $i = 1, 2, 3$ , cho  $x'_i \in \text{EPN}(x_i, X)$  và  $X'$  là flip-set của  $X$  sử dụng  $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ . Giả sử  $d_H(X, X') = 4$  và  $P : (X = X_0, \dots, X_4 = X')$  là một đường đi ngắn nhất  $X - X'$ . Khi đó:

- (i) Nếu  $x'_j \in X_i$  cho một số  $i$ , thì  $x'_j \in X_\ell$  cho tất cả  $\ell = i, \dots, 4$ ;
- (ii) Tồn tại chính xác một đỉnh  $a \in \bigcup_{i=1}^3 X_i$  sao cho  $a \notin X \cup \{x'_1, x'_2, x'_3\}$ ;
- (iii) Đối với đỉnh  $a$  này nếu  $X_i \stackrel{x_j a}{\sim} X_{i+1}$  cho một số  $i$  và  $j$ , thì  $X_\ell \stackrel{ax'_j}{\sim} X_{\ell+1}$  cho một số  $\ell \geq i + 1$ , và  $G[\{x_j, a, x'_j\}] = K_3$ ;
- (iv)  $\{x_4, \dots, x_r\}$  là con của  $X_i$  cho mỗi  $i = 0, \dots, 4$ ;
- (v) Nếu  $H$  là một cây sao cho  $|V(H)| \leq 7$  và  $\text{diam}(H) = 4$ , thì tối đa một  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , có một lân cận riêng tư bên ngoài  $X$  là  $y_i \neq x'_i$ ; nếu  $y_i$  tồn tại, thì  $y_i = a$ ,  $a \sim x'_i$  và flip-set  $(X' - \{x'_i\}) \cup \{a\}$  của  $X$  là  $X_3$ .

*Chứng minh.* Ta có giả sử  $d_H(X, X') = 4$  nên để đạt được  $X'$  từ  $X$  ta cần chính xác bốn lần hoán đổi, và trong ba lần  $x'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  này được hoán đổi vào, trong khi một số đỉnh  $a \notin \{x'_1, x'_2, x'_3\}$  được hoán đổi vào trong lần hoán đổi khác (nhưng không phải lần cuối cùng, điều này được thấy rõ ràng). Do đó, nếu  $x'_i$  đã được hoán đổi vào  $X_j$  cho một số  $j \geq 1$ , thì  $x'_i$  không bao giờ được hoán đổi ra ngoài, nếu không nó sẽ phải được hoán đổi vào lại, đòi hỏi quá nhiều lần hoán đổi. Nếu một số  $x_j$ ,  $j > 3$ , được hoán đổi cho một đỉnh  $v$ , thì  $v \notin \{x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3\}$  (vì  $x_j$  là cô lập trong  $G[X]$  và do tính chất của lân cận riêng tư, không kề với tất cả các đỉnh này), vậy  $x_j$  phải được hoán đổi vào lại, kết quả là quá nhiều lần hoán đổi. Điều này chứng minh (i), (ii) và (iv).

Giả sử đỉnh  $x_j$  được hoán đổi ra cho  $a$ . Để tránh có quá nhiều lần hoán đổi, sau này đỉnh  $a$  sẽ được hoán đổi ra cho một số  $x'_i$ . Nếu  $i \neq j$ , thì  $x_\ell$  sẽ được hoán đổi ra cho  $x'_j$  với  $\ell \neq j$ . Nhưng vì  $x'_j \in \text{EPN}(x_j, X)$ ,  $x_\ell \approx x'_j$ , mâu thuẫn. Do đó,  $i = j$  và  $x_j \sim_G a \sim_G x'_j \sim_G x_j$ . Điều này chứng (iii).

(v) Giả sử  $H$  là một cây sao cho  $|V(H)| \leq 7$  và  $\text{diam}(H) = 4$ , Giả sử cho một số  $i = 1, 2, 3$ ,  $x_i$  có một lân cận riêng tư bên ngoài  $X$ . Với  $y_i \neq x'_i$  đặt  $Y_i$  là flip-set của  $X$  sử dụng  $y_i$  thay vì  $x'_i$  tức là  $Y_i = \{y_i, x'_j, x'_k, x_4, \dots, x_r\}$ ,  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ . Theo Mệnh đề 2.1.2,  $Y_i$  là một tập  $\text{IR}(G)$ .

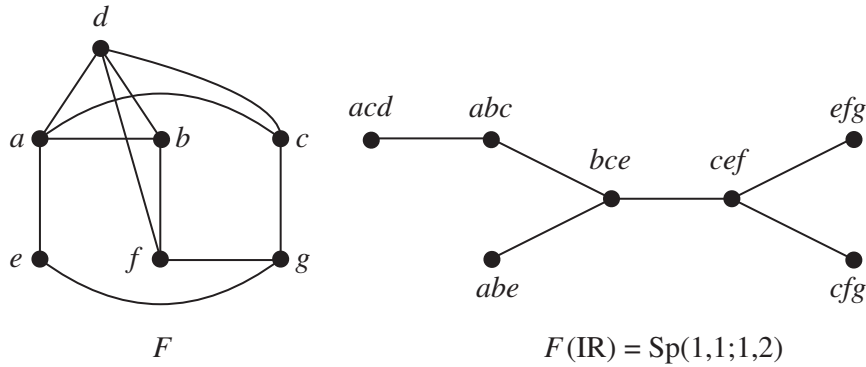
- Giả sử  $y_i \approx x'_i$ . Theo điều kiện thứ hai trong (iii)  $y_i \neq a$ , và vì  $y_i \notin X \cup \{x'_1, x'_2, x'_3\}$ ,  $Y_i \notin \{X_0, \dots, X_4\}$ . Khi đó  $\{x_j, y_i, x'_i, x_4, \dots, x_r\}$  và  $\{x_k, y_i, x'_i, x_4, \dots, x_r\}$

là các tập độc lập IR( $G$ ) khác nhau so với  $Y_i, X_0, \dots, X_4$  và  $T$  có bậc ít nhất là tám, mâu thuẫn. Do đó  $y_i \sim x'_i$ , vậy  $Y_i \sim_H X_4$ .

- Nếu  $Y_i \neq X_3$ , thì  $d_H(X, Y_i) = 5$  (nếu  $Y_i$  không kề với  $X_0, \dots, X_3$ ) hoặc  $H$  có một chu trình (mặt khác), điều này không thể. Do đó  $Y_i = X_3$ .
- Vì  $y_i \notin X \cup \{x'_1, x'_2, x'_3\}$ , (ii) chỉ ra rằng  $y_i = a$ .
- Chúng tôi vẫn cần chứng minh rằng không có  $x_j$ , với  $j \neq i$  có một lân cận riêng tư bên ngoài  $X$ . Giả sử  $y_j \in \text{EPN}(x_j, X) - \{x'_j\}$ ,  $j \neq i$ . Như đã chỉ ra ở trên  $y_j = a$ . Bây giờ chúng tôi có  $a \in \text{EPN}(x_i, X) \cap \text{EPN}(x_j, X)$ , mâu thuẫn.

□

Liên quan đến khả thi của cây như các cây IR, chúng ta tiếp tục xem xét các cây có đường kính là 4 và chứng minh rằng  $\text{Sp}(1, 1; 1, 2)$  là cây IR nhỏ nhất duy nhất với đường kính là 4. Dựa trên cơ sở có hai trường hợp chính, phụ thuộc vào việc đồ thị nguồn  $G$  có một tập IR  $X$  sao cho  $G[X]$  có bốn đỉnh không cô lập hoặc không có.



Hình 2.5: Đồ thị  $F$  và đồ thị nhện kép  $\text{Sp}(1, 1; 1, 2)$

**Định lý 2.4.1.** Nhện kép  $\text{Sp}(1, 1; 1, 2)$  là cây IR nhỏ nhất duy nhất với đường kính 4.

*Chứng minh.* Như minh họa trong Hình 2.5 đồ thị nhện kép  $\text{Sp}(1, 1; 1, 2)$  là một cây IR có đường kính 4 và bậc 7. (Một lần nữa, việc xác minh điều này liên quan đến

việc tìm kiếm toàn diện nhưng đơn giản cho các tập  $\text{IR}(G)$ . Đồ thị  $F$  thu được từ đồ thị  $G$  trong Hình 2.4 bằng cách thêm một đỉnh  $d$  mới, nối nó với  $a, b, c$  và  $f$ ).

Cho  $T$  là một cây có  $\text{diam}(T) = 4$  và  $|V(T)| \leq 7$ , và giả sử  $T$  là đồ thị IR của đồ thị  $G$ . Chúng tôi chỉ ra rằng  $T$  chứa  $S(2, 2)$ . Vì  $\text{diam}(T) = 4$  và  $\text{diam}(S(2, 2)) = 3$ ,  $T$  có bậc ít nhất là 7, và khả năng duy nhất là  $T \cong Sp(1, 1; 1, 2)$ .

Cho  $P : (X_0, \dots, X_4)$  là một đường kính trong  $T$ . Theo Hệ quả 2.3.3, các tập IR của  $G$  tạo ra các đồ thị có nhiều nhất bốn đỉnh có bậc dương. Cho  $X = \{x_1, \dots, x_r\}$  là một tập  $\text{IR}(G)$  tạo ra một đồ thị con có số đỉnh lớn nhất có bậc dương. Giả sử  $x_1, \dots, x_k$ ,  $k \leq 4$ , có bậc dương trong  $G[X]$ . Cho  $x'_i \in \text{EPN}(x_i, X)$  và  $X' = (X - \{x_1, \dots, x_k\}) \cup \{x'_1, \dots, x'_k\}$ ; Lưu ý rằng  $|X - X'| = k$ . Theo Mệnh đề 2.1.2,  $X'$  là một tập  $\text{IR}(G)$ . Theo Hệ quả 2.3.2(i) và Bổ đề 2.3.2,  $k \in \{3, 4\}$ . Chúng tôi xem xét hai trường hợp riêng biệt.

**Trường hợp 1:**  $k = 4$ . Khi đó  $d_T(X, X') = 4$ , do đó không mất tính tổng quát,

$$X_0 = X, X_1 = \{x'_1, x_2, \dots, x_r\}, X_2 = \{x'_1, x'_2, x_3, \dots, x_r\}, X_3 = \{x'_1, x'_2, x'_3, x_4, \dots, x_r\} \text{ và } X_4 = X'.$$

Vì  $x'_1 \in \text{EPN}(x_1, X)$ ,  $x'_1$  không liền kề với tất cả  $x_2, \dots, x_r$ , do đó  $x_2, x_3, x_4$  là các đỉnh duy nhất có thể có bậc dương tính bằng  $G[X_1]$ . Theo Hệ quả 2.3.2, tất cả hoặc không đỉnh bất kỳ nào có bậc dương. Chúng ta xem xét hai trường hợp phụ riêng biệt.

**Trường hợp 1.1:** Giả sử  $x_2, x_3, x_4$  đều có bậc dương trong  $G[X_1]$ . Cho  $x''_i \in \text{EPN}(x_i, X_1)$ ,  $i = 2, 3, 4$ , và để  $X''$  là flip-set của  $X_1$  dùng  $\{x''_2, x''_3, x''_4\}$ . Khi đó  $d_T(X_1, X'') \geq 3$ . Nếu  $d_T(X_1, X'') \geq 4$ , thì  $\text{diam}(T) > 4$  bởi Quan sát 4, đây là một mâu thuẫn. Do đó  $d_T(X_1, X'') = 3$ . Theo Bổ đề 2.4.1,  $T$  chứa  $S(2, 2)$ . Vì  $\text{diam}(T) = 4$  và  $T$  có bậc 7, trong khi  $S(2, 2)$  có đường kính 3 và bậc 6,  $T \cong Sp(1, 1; 1, 2)$ .

**Trường hợp 1.2:**  $\{x_2, x_3, x_4\}$  là độc lập. Vì  $\{v \in X : \deg_{G[X]}(v) > 0\} = \{x_1, \dots, x_4\}$ , chúng ta suy ra rằng  $x_1$  liền kề với mỗi  $x_2, x_3$  và  $x_4$ . Hơn nữa, vì  $x'_1 \in \text{EPN}(x_1, X)$ , tập  $X_1$  là độc lập. Một lần nữa theo tính chất của lân cận riêng tư, cạnh duy nhất có thể có trong  $G[X_2]$  là  $x'_1 x'_2$ . Nhưng theo Hệ quả 2.3.2(i) áp dụng cho  $X_2$ ,  $x'_1 \approx x'_2$ , do đó  $X_2$  độc lập. Theo Hệ quả 2.3.2(ii) áp dụng cho  $X_1$ , nhiều nhất một đỉnh trong  $X_1$  có một lân cận riêng bên ngoài. Vì  $x'_2 \in \text{EPN}(x_2, X)$  và  $x'_1 \approx x'_2$ ,  $x'_2 \in \text{EPN}(x_2, X_1)$ . Do đó  $x_2$  là đỉnh duy nhất trong  $X_1$  với các lân cận riêng tư bên ngoài. Nhưng

với  $i = 3, 4$ ,  $x'_i \in \text{EPN}(x_i, X)$ . Chúng ta suy ra rằng  $x'_1 \sim x'_3, x'_4$  để đảm bảo rằng  $\text{EPN}(x_3, X_1) = \emptyset = \text{EPN}(x_4, X_1)$ . Theo Hệ quả 2.3.2(i) áp dụng cho  $X_3$ , trong đó  $x_4$  bị cô lập (theo tính chất lân cận riêng tư và vì  $x_5, \dots, x_r$  được cô lập trong  $G[X]$ ),  $x'_2 \sim x'_3$ .

Lưu ý rằng  $x_i \in \text{EPN}(x'_i, X_3)$  cho  $i = 2, 3$ , nhưng  $x_1 \sim x_4$ , do đó  $x_1 \notin \text{EPN}(x'_1, X_3)$ . Cho  $u \in \text{EPN}(x'_1, X_3)$  ( $u$  tồn tại vì  $x'_1$  không bị cô lập trong  $G[X_3]$ ) và cho  $B$  là flip-set của  $X_3$  sử dụng  $\{u, x_2, x_3\}$ . Khi đó  $B = \{u, x_2, \dots, x_r\}$  là một tập  $\text{IR}(G)$ , theo Mệnh đề 2.1.2. Vì  $u \sim x'_1$ ,  $B \sim_T X_1$ . Vì  $T$  là cây và  $B \neq X_2$ ,  $d_T(B, X_3) = 3$ . Theo Bổ đề 2.4.1,  $T$  chứa  $S(2, 2)$ , và như trong Trường hợp 1.1,  $T \cong \text{Sp}(1, 1; 1, 2)$ .

**Trường hợp 2:**  $k = 3$ , nghĩa là  $x_1, x_2, x_3$  là các đỉnh duy nhất trong  $X$  có bậc dương trong  $G[X]$ , và  $|X - X'| = 3$ . Do đó  $3 \leq d_T(X, X') \leq 4$ . Nếu  $d_T(X, X') = 3$ , thì Bổ đề 2.4.1 chỉ ra rằng  $T$  chứa  $S(2, 2)$  và chúng ta đã hoàn thành. Do đó chúng ta giả sử rằng  $d_T(X, X') = 4$  và  $P : (X = X_0, \dots, X_4 = X')$  là một đường đi ngắn nhất  $X - X'$ . Chúng ta cũng có thể giả định mà không mất tính tổng quát (nếu không ta có thể đơn giản chỉ cần đổi tên) rằng  $x'_1$  được hoán đổi vào tập không dư thừa trước  $x'_2$ , và  $x'_2$  được hoán đổi vào trước  $x'_3$ . Theo Bổ đề 2.4.2(ii),  $\bigcup_{i=0}^4 X_i$  chứa đúng một đỉnh  $a \notin X \cup \{x'_1, x'_2, x'_3\}$ . Để có được  $X'$  từ  $X$  đòi hỏi chính xác bốn bước, và, như thể hiện trong Bổ đề 2.4.2, trong ba bước hoán đổi  $x'_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $a$  cũng được hoán đổi vào (nhưng rõ ràng không phải là bước cuối cùng). Chúng tôi xem xét các khả năng cho bước mà  $a$  được hoán đổi.

**Trường hợp 2.1:** Đỉnh  $a$  được hoán đổi trước. Sau đó, bước 1 là  $X_0 \stackrel{x_1^a}{\sim} X_1$ ,  $X_0 \stackrel{x_2^a}{\sim} X_1$  hoặc  $X_0 \stackrel{x_3^a}{\sim} X_1$ .

Giả sử bước 1 là  $X_0 \stackrel{x_1^a}{\sim} X_1$ .

Theo giả định của chúng tôi ở trên về thứ tự hoán đổi  $x'_i$  bước 2 là  $X_1 \stackrel{ax'_1}{\sim} X_2$ . Theo Bổ đề 2.4.2(iii),  $G[\{x_1, a, x'_1\}] = K_3$ , chỉ ra rằng  $X_0 \sim_T X_1 \sim_T X_2 \sim_T X_0$  và  $T$  có chu trình, điều này không đúng.

Giả sử bước 1 là  $X_0 \stackrel{x_2^a}{\sim} X_1$ .

Khi đó bước 2 là  $X_1 \stackrel{x_1x'_1}{\sim} X_2$  và bước 3 là  $X_2 \stackrel{ax'_2}{\sim} X_3$ . Do đó

$$X_1 = \{x_1, a, x_3, \dots, x_r\}, X_2 = \{x'_1, a, x_3, \dots, x_r\}, X_3 = \{x'_1, x'_2, x_3, \dots, x_r\}, X_4 = \{x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x_r\}.$$

Đầu tiên chúng ta chỉ ra rằng



(a)  $a \notin \text{EPN}(x_2, X)$ , do đó  $a$  không bị cô lập trong  $G[X_1]$  và

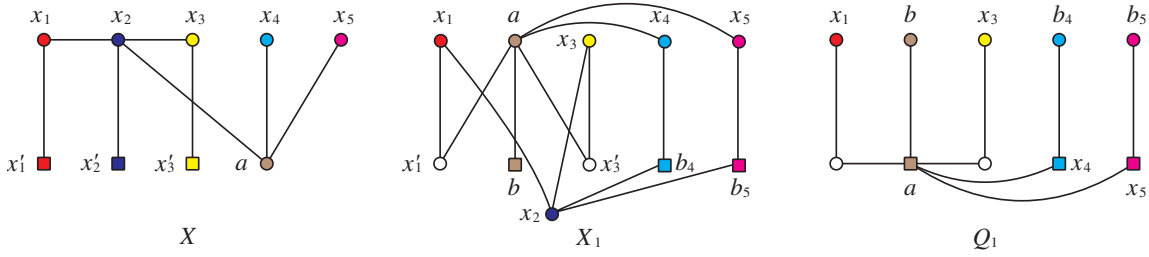
(b)  $a$  kề với  $x_1$  hoặc  $x_3$ , nhưng không kề với  $x_4, \dots, x_r$ .

Sau đó chúng ta suy ra rằng

(c)  $T$  chứa  $S(2, 2)$ .

(a) Nếu  $a \in \text{EPN}(x_2, X)$ , thì flip-set của  $X$  sử dụng  $a$  thay vì  $x'_2$ , tức là  $\{x'_1, a, x'_3, \dots, x_r\}$ , bằng  $X_3$  bởi Bổ đề 2.4.2(v). Tuy nhiên,  $a \notin X_3$  và chúng ta có một mâu thuẫn. Do đó (a) đúng. Điều này chỉ ra rằng  $a$  không bị cô lập trong  $G[X_1]$ .

(b) Giả sử  $a$  liền kề với một trong các  $x_4, \dots, x_r$ , ví dụ như  $x_4$ . Điều này có nghĩa là  $a$  và  $x_4$  có các lân cận riêng tư bên ngoài  $X_1$ . Khi đó  $x_1 \approx x_3$ , nếu không  $G[X_1]$  có bốn đỉnh có bậc dương, điều này không đúng vì  $k = 3$ .



Hình 2.6: Trường hợp 2.1(b): Các tập IR  $X$ ,  $X_1$  và  $Q_1$  khi  $a$  kề  $x_2$ ,  $x_4$  và  $x_5$

- Giả sử đầu tiên rằng  $a \approx x_1, x_3$  khi đó  $x_1$  và  $x_3$  là cô lập trong  $G[X_1]$ . Theo hệ quả 2.3.2(i),  $ax_4$  không phải là cạnh duy nhất của  $G[X_1]$ . Giả sử  $a \sim_G x_5$ . (Xem Hình 2.6). Khi đó  $a, x_4, x_5$  có bậc dương trong  $G[X_1]$ . Cho  $b, b_4, b_5$  lần lượt là lân cận riêng tư bên ngoài của  $X_1$  đối với  $a, x_4, x_5$ , và để  $Q_1$  là flip-set của  $X_1$  sử dụng  $\{b, b_4, b_5\}$ . Khi đó  $Q_1 = \{x_1, x_3, b, b_4, b_5, \dots, x_r\}$  là một tập IR( $G$ ) (Mệnh đề 2.1.2). Nhưng  $\{x_1, b_4, b_5\} \subseteq Q_1 - X_2$ , do đó  $d_T(Q_1, X_2) \geq 3$  và  $\text{diam}(T) \geq 5$ , theo Quan sát 4. Do đó  $a \approx x_5, \dots, x_r$ . Do đó, khả năng duy nhất là  $a \sim x_1$  hoặc  $a \sim x_3$  (không phải cả hai, vì  $k = 3$ ).

- Giả sử  $a \sim x_1$  khi đó  $x_3$  được cô lập trong  $G[X_1]$ . Trong  $G[X_2]$ ,  $x'_1 \approx x_3, \dots, x_r$  và  $a \approx x_3, x_5, \dots, x_r$ . Sử dụng Hệ quả 2.3.2(i) và thực tế là  $a \sim x_4$ , ta thấy rằng  $a \sim x'_1$ . Điều này có nghĩa là  $x'_1 \notin \text{EPN}(x_1, X_1)$ . Cho  $c_1, c, c_4$  là  $X_1$  lân cận riêng tư bên ngoài của  $x_1, a, x_4$ , tương ứng và để  $Q_2$  là flip-set của  $X_1$  sử dụng  $\{c_1, c, c_4\}$ . Khi đó

$Q_2 = \{c_1, c, x_3, c_4, x_5, \dots, x_r\}$ . Vì  $c_1 \neq x'_1$ ,  $\{c_1, c, c_4\} \subseteq Q_2 - X_2$ , do đó  $d_T(Q_2, X_2) \geq 3$  và  $\text{diam}(T) \geq 5$ , theo Quan sát 4.

- Giả sử  $a \sim x_3$  khi đó  $x_1$  được cô lập trong  $G[X_1]$ . Cho  $d, d_3, d_4$  là lân cận riêng tư bên ngoài  $X_1$  của  $a, x_3, x_4$ , tương ứng và để  $Q_3$  là flip-set của  $X_1$  sử dụng  $\{d, d_3, d_4\}$ . Khi đó  $Q_3 = \{x_1, d, d_3, d_4, x_5, \dots, x_r\}$ , và một mâu thuẫn như trên xảy ra. Bây giờ chúng ta đã chứng minh rằng  $a$  không kề với  $x_4, \dots, x_r$ . Vì  $a$  không bị cô lập trong  $G[X_1]$ , điều này suy ra (b).

(c) Hệ quả 2.3.2(i) và (b), cùng với các giả định của Trường hợp 2, đảm bảo rằng  $x_1, x_3$  và  $a$  có bậc dương trong  $G[X_1]$ . Cho  $y_1, y_2, y_3$  là lân cận riêng tư bên ngoài của  $X_1$  đối với  $x_1, a, x_3$ , tương ứng, và cho  $Q_4 = \{y_1, y_2, y_3, x_4, \dots, x_r\}$  là flip-set kết quả của  $X_1$ . Vì  $\text{diam}(T) = 4$  và  $|Q_4 - X_1| = 3$ , chúng ta suy ra rằng  $3 \leq d_T(X_1, Q_4) \leq 4$ . Nhưng nếu  $d_T(X_1, Q_4) = 4$ , thì theo Quan sát 4,  $\text{diam}(T) \geq 5$ . Do đó  $d_T(X_1, Q_4) = 3$ . Áp dụng Bổ đề 2.4.1 cho  $X_1$ , chúng ta suy ra rằng  $T$  chứa  $S(2, 2)$ .

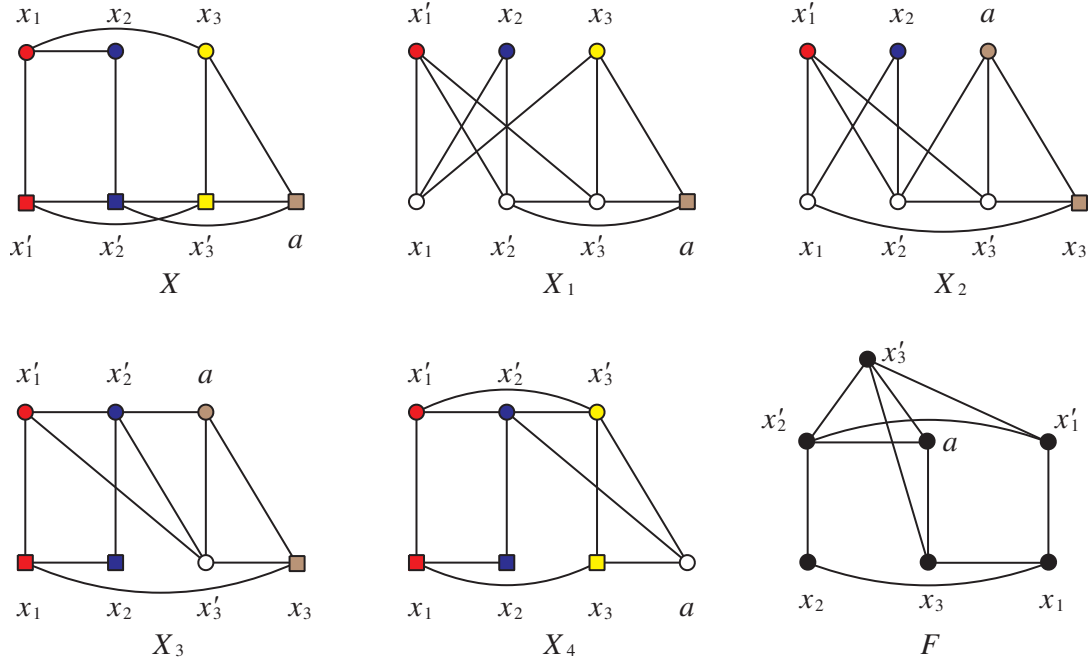
Giả sử bước 1 là  $X_0 \stackrel{x_3a}{\sim} X_1$ . Khi đó

$$X_1 = \{x_1, x_2, a, x_4, \dots, x_r\}, X_2 = \{x'_1, x_2, a, x_4, \dots, x_r\} \text{ và } X_3 = \{x'_1, x'_2, a, x_4, \dots, x_r\}.$$

- Giả sử  $a \in \text{EPN}(x_3, X)$ . Chúng tôi chỉ ra rằng

(d)  $x'_1, x'_2, a$  có bậc dương trong  $X_3$ , và có lân cận riêng tư  $X_3$  là  $x_1, x_2, x_3$  tương ứng.

Vì  $a \in \text{EPN}(x_3, X)$ ,  $a$  được cô lập trong  $G[X_1]$ . Theo Hệ quả 2.3.2(i),  $x_1 \asymp x_2$ , nghĩa là  $X_1$  độc lập. Bây giờ cạnh duy nhất có thể có trong  $G[X_2]$  là  $ax'_1$ , và một lần nữa chúng ta suy ra rằng  $X_2$  là độc lập. Nếu  $a \asymp x'_2$ , thì  $Q_5 = \{x_1, x'_2, a, x_4, \dots, x_r\}$  là một tập  $\text{IR}(G)$  độc lập khác với  $X_2$  sao cho  $X_1 \stackrel{x_2x'_2}{\sim} Q_5 \stackrel{x_1x'_1}{\sim} X_3$ , tạo thành chu trình  $(X_1, Q_5, X_3, X_2, X_1)$ . Do đó  $a \sim x'_2$ . Áp dụng Hệ quả 2.3.2(i) cho  $X_3$  (và áp dụng các tính chất lân cận riêng của  $x'_1$  và  $x'_2$ ), chúng ta có  $x'_1 \sim x'_2$ . Do đó  $x'_1, x'_2, a$  có bậc dương trong  $X_3$ , và có lân cận riêng tư  $X_3$  là  $x_1, x_2, x_3$  tương ứng, như được khẳng định trong (d). Do đó, flip-set của  $X_3$  sử dụng  $x_1, x_2, x_3$  is  $X$ . Vì  $d_T(X, X_3) = 3$ , Bổ đề 2.4.1 chỉ ra rằng  $T$  chứa  $S(2, 2)$ . • Do đó, giả sử rằng  $a \notin \text{EPN}(x_3, X)$ . Tương tự như (b) ta có được  $a$  kề với  $x_1$  hoặc  $x_2$ , nhưng không kề với  $x_4, \dots, x_r$ , và như trong (c) chúng ta lại thu được rằng  $T$  chứa  $S(2, 2)$ .



Hình 2.7: Các tập IR  $X$  và  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , trong Trường hợp 2.2 khi bước 2 là  $X_1 \stackrel{x_3^a}{\approx} X_2$ , với các lân cận chung và riêng, và đồ thị  $F$

**Trường hợp 2.2** Đỉnh  $a$  được hoán đổi vào tập IR trong bước thứ hai. Khi đó  $X_1 = \{x'_1, x_2, \dots, x_r\}$ . Vì  $x_2, x_3 \approx x'_1$ , Hệ quả 2.3.2(i) áp dụng cho  $X_1$  chỉ ra rằng  $x_2 \approx x_3$ . Vì  $x_1, x_2, x_3$  có bậc dương trong  $G[X]$ ,  $x_1 \sim x_2, x_3$ .

Giả sử bước 2 là  $X_1 \stackrel{x_2^a}{\approx} X_2$ .  $X_2 = \{x'_1, a, \dots, x_r\}$  và  $X_3 = \{x'_1, x'_2, \dots, x_r\}$ . Bây giờ  $X_1 \stackrel{x_2 x'_2}{\approx} X_3$ , một mâu thuẫn.

Giả sử bước 2 là  $X_1 \stackrel{x_3^a}{\approx} X_2$ .

Khi đó

$$X_2 = \{x'_1, x_2, a, x_4, \dots, x_r\}, X_3 = \{x'_1, x'_2, a, x_4, \dots, x_r\} \text{ and } X_4 = \{x'_1, x'_2, x'_3, x_4, \dots, x_r\};$$

Ngoài ra,  $G[\{x_3, x'_3, a\}] = K_3$ . Chúng ta chỉ ra rằng

(e)  $G[\{x'_1, x'_2, x'_3\}] \cong K_3$ ,

(f)  $X_2$  độc lập và

(g)  $a \in \text{EPN}(x_3, X)$ ,

và suy ra rằng  $G[\{a, x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3\}] \cong F$ , đồ thị trong Hình 2.5, có đồ thị

IR là  $\text{Sp}(1, 1; 1, 2)$ . Các tập hợp  $X, X_i, i = 1, \dots, 4$  và đồ thị  $F$  được minh họa trong Hình 2.7.

(e) Nếu  $\{x'_1, x'_2, x_3\}$  là độc lập, thì  $\{x'_1, x'_2, x_3, \dots, x_r\} \neq X_3$  là một tập IR( $G$ ) liền kề với  $X_3$  và  $X_4$ , tạo ra một chu trình. Do đó  $x'_1 \sim x'_2$ . Nếu  $x'_2 \approx x'_3$ , thì  $\{x_1, x'_2, x'_3, x_4, \dots, x_r\} \neq X_3$  là một tập IR( $G$ ) liền kề với  $X_4$ , cũng tạo ra mâu thuẫn. Do đó  $x'_2 \sim x'_3$ . Tương tự, nếu  $x'_1 \approx x'_3$ , thì  $\{x'_1, x_2, x'_3, x_4, \dots, x_r\} \neq X_3$  là một tập IR( $G$ ) liền kề với  $X_4$ , do đó  $x'_1 \sim x'_3$ . Do đó  $G[\{x'_1, x'_2, x'_3\}] \cong K_3$  và (e) đúng.

(f) Áp dụng Hệ quả 2.3.2(i) cho  $X_2$ , ta thấy rằng  $x'_1 \sim a \sim x_2$  hoặc  $x'_1 \approx a \approx x_2$ . Trong trường hợp trước, giả sử  $u_1, u_2, u_3$  là lân cận riêng tư bên ngoài của  $X_2$  đối với  $x'_1, x_2, a$  và  $Q_6$  là flip-set kết quả của  $X_2$ . Khi đó  $d_T(Q_6, X_2) \geq 3$ , mâu thuẫn với Quan sát 4. Do đó  $x'_1 \approx a \approx x_2$ , nghĩa là  $\{x'_1, x_2, a\}$  là độc lập.

Giả sử  $a$  kề với một đỉnh trong  $\{x_4, \dots, x_r\}$ ; Giả sử  $a \sim x_4$ . Vì  $x'_1 \sim x'_2$ , sau đó chúng ta thấy rằng  $x'_1, x'_2, a, x_4$  đều có bậc dương trong  $G[X_3]$ , điều này không đúng (vì  $k = 4$  đã được xem xét trong Trường hợp 1). Do đó  $\{a, x_4, \dots, x_r\}$  là độc lập, và vì cả  $x'_1$  và  $x_2$  đều không kề với bất kỳ đỉnh nào trong  $\{a, x_4, \dots, x_r\}$ ,  $X_2$  là độc lập, tức là (f) đúng. Lưu ý rằng  $x'_1 \sim x'_2$  nhưng  $x'_1 \approx a$ , và áp dụng Hệ quả 2.3.2(i) cho  $X_3$ , theo sau  $x'_2 \sim a$ .

(g) Giả sử  $a \notin \text{EPN}(x_3, X)$ . Vì  $X_2$  là độc lập, khả năng là  $a \sim x_1$ . Lưu ý rằng  $x_2 \in \text{EPN}(x'_2, X_3)$  và  $x_3 \in \text{EPN}(a, X_3)$ , nhưng  $\text{EPN}(x'_1, X_3) \cap (X \cup \{x'_1, x'_2, x'_3, a\}) = \emptyset$ . Vì  $x'_1$  không bị cô lập trong  $G[X_3]$  (từ (e), nó kề với  $x'_2$ ),  $\text{EPN}(x'_1, X_3) \neq \emptyset$ . Cho  $b \in \text{EPN}(x'_1, X_3)$ ,  $b \in V(G) - (\{a, x'_1, x'_2, x'_3\} \cup X)$ . Khi đó flip-set  $Q_7 = \{b, x_2, \dots, x_r\}$  của  $X_3$  sử dụng  $\{b, x_2, x_3\}$  là một tập IR( $G$ ). Bây giờ  $Q_7 \stackrel{bx_1}{\sim} X_1$  và để tránh tam giác  $(X_0, X_1, Q_7, X_0)$ ,  $b \approx x_1$ . Tuy nhiên, bây giờ  $Q_8 = \{x_1, x'_2, b, x_4, \dots, x_r\}$  là một tập IR( $G$ ) độc lập sao cho  $d_T(X_2, Q_8) \geq 3$ , một mâu thuẫn như trước đây. Điều này chứng minh (g). Bây giờ  $G[\{a, x_1, x_2, x_3, x'_1, x'_2, x'_3\}] \cong F$ , đồ thị trong Hình 2.5, dưới dạng cấu

$$a \rightarrow b, \quad x_1 \rightarrow g, \quad x_2 \rightarrow e, \quad x_3 \rightarrow f, \quad x'_1 \rightarrow c, \quad x'_2 \rightarrow a, \quad x'_3 \rightarrow d,$$

như thể hiện trong Hình 2.7. Do đó  $T$  chứa  $\text{Sp}(1, 1; 1, 2)$ . Vì  $|V(T)| \leq 7$ ,  $T \cong \text{Sp}(1, 1; 1, 2)$ .

**Trường hợp 2.3** Đỉnh  $a$  được hoán đổi thứ ba. Khi đó  $X_1 = \{x'_1, x_2, \dots, x_r\}$ ,  $X_2 = \{x'_1, x'_2, x_3, \dots, x_r\}$  và  $X_3 = \{x'_1, x'_2, a, \dots, x_r\}$ . Nhưng sau đó  $X_2 \sim_T X_4$ , một mâu thuẫn.

Điều này kết luận các chứng minh của Trường hợp 2 và định lý. □

Các kết quả trên đưa đến kết luận sau đây về khả năng thực hiện của đồ thị dưới dạng đồ thị IR

**Định lý 2.4.2.** (i) *Đồ thị đầy đủ là đồ thị IR duy nhất có các đỉnh toàn cục.*

(ii) *Các chu trình  $C_5, C_6, C_7$  và các đường đi  $P_3, P_4, P_5$  không phải là đồ thị IR.*

(iii) *Các đồ thị IR liên thông duy nhất có bậc 4 là  $K_4$  và  $C_4$ .*

(iv) *Sao kép  $S(2, 2)$  là một cây IR không đầy đủ nhỏ nhất.*

*Chứng minh.* Khẳng định (i) là Mệnh đề 2.3.2. Xem xét các chu trình, một đồ thị IR có đường kính 2 có  $C_4$  cảm sinh (Đề xuất 2.3.1). Vì  $\text{diam}(C_5) = 2$ , nên  $C_5$  không phải là đồ thị IR. Giả sử tồn tại một đồ thị  $G$  sao cho  $G(\text{IR}) \cong C_6$  hoặc  $G(\text{IR}) \cong C_7$ . Theo Bổ đề 2.3.2, tồn tại một tập  $\text{IR}(G)$   $X$  không độc lập. Theo hệ quả 2.3.2,  $G[X]$  chứa ít nhất hai cạnh, có nghĩa là  $G[X]$  có ít nhất ba đỉnh có bậc dương. Vì  $\text{diam}(C_6) = \text{diam}(C_7) = 3$ , Hệ quả 2.3.3 nói rằng  $X$  có chính xác ba đỉnh có bậc dương. Nhưng sau đó, theo Bổ đề 2.4.1,  $G(\text{IR})$  chứa một chu trình 4 đỉnh cảm sinh hoặc một đồ thị sao kép cảm sinh  $S(2, 2)$ , cả hai đều không phải là đồ thị con của  $C_6$  hoặc  $C_7$ . Chúng tôi suy ra rằng  $C_6$  và  $C_7$  không phải là đồ thị IR.

Vì  $\text{diam}(P_3) = 2$ , nó không phải là đồ thị IR theo Mệnh đề 2.3.1. Tương tự, theo Mệnh đề 2.4.1,  $P_4$  không phải là đồ thị IR, và theo Định lý 2.4.1,  $P_5$  không phải là đồ thị IR. Do đó (ii) đúng.

(iii) Nếu  $\text{IR}(G) = 1$ , thì  $G$  là đầy đủ và  $G(\text{IR}) \cong G$ ; cụ thể,  $K_4(\text{IR}) = K_4$ . Bởi (i), các đồ thị IR liên thông không đầy đủ duy nhất có độ lớn là 4 có bậc tối đa là 2. Theo Mệnh đề 2.1.1(ii),  $C_4$  là đồ thị IR của  $2K_2$  và vì  $P_4$  không phải là đồ thị IR, (iii) được chứng minh.

(iv) Vì các cây đầy đủ duy nhất có độ lớn nhỏ hơn 5 là  $P_3, P_4$  và  $K_{1,3}$ , không phải là cây IR, nên các cây IR không đầy đủ nhỏ nhất có độ lớn ít nhất là 5 và đường kính ít nhất là 3. Vì  $S(2, 2)$  là cây IR không đầy đủ nhỏ nhất duy nhất có đường kính

$3$  và  $Sp(1, 1; 1, 2)$  là cây IR nhỏ nhất duy nhất có đường kính 4 nhưng có bậc 7, nên chúng tôi xem xét các cây có đường kính ít nhất là 5. Tất cả các cây như vậy có độ lớn ít nhất là 7, ngoại trừ  $P_6$ , có cùng độ lớn với  $S(2, 2)$ .

□

Chúng tôi chỉ ra trong [5] rằng các đồ thị sao kép  $S(2k, 2k)$ , trong đó  $k \geq 1$ , là cây IR duy nhất có đường kính 3. Chúng tôi cũng giả định rằng  $P_6$  không phải là đồ thị IR (xem Giả thiết 1); nếu giả thiết này là đúng, nó sẽ chỉ ra rằng  $S(2, 2)$  là cây IR không đầy đủ nhỏ nhất duy nhất

# Chương 3

## Một số bài toán mở

Một chứng minh trực tiếp rằng  $P_5$  không phải là đồ thị IR có phần đơn giản hơn chứng minh của Định lý 2.4.1, nhưng không hoàn toàn đơn giản để dễ dàng khái quát hóa thành một chứng minh rằng các đường đi và chu trình dài hơn không phải là đồ thị IR. Tuy nhiên, chúng tôi tin rằng điều này là đúng và khẳng định nó bằng giả thiết.

**Giả thuyết 1.**  $P_n$  không phải là đồ thị IR với mọi  $n \geq 3$ .

**Giả thuyết 2.**  $C_n$  không phải là đồ thị IR với mọi  $n \geq 5$ .

**Bài toán 1.** Chứng minh hoặc bác bỏ: Đồ thị đầy đủ và  $K_m \times K_n$ , trong đó  $m, n \geq 2$ , là đồ thị IR liên thông claw-free.

Chúng tôi đã chỉ ra trong Bổ đề 2.3.2 rằng nếu tất cả các tập IR của  $G$  là độc lập và đồ thị IR  $H$  của  $G$  là liên thông và có bậc ít nhất là ba, thì  $H$  chứa một tam giác hoặc  $C_4$  cảm sinh. Nếu  $\text{diam}(H) \geq 3$ , do đó  $H$  chứa một đỉnh bậc ít nhất là ba. Các tập IR độc lập của các đồ thị trong Hình 2.4 và 2.5, cũng như các tập IR không độc lập, tương ứng với các đỉnh bậc ba trong đồ thị IR của chúng. Một câu trả lời khẳng định cho câu hỏi tiếp theo sẽ hữu ích trong việc chứng minh rằng  $C_n$  và  $P_n, n \geq 6$ , không phải là các cây IR.

**Bài toán 2.** Chứng minh hoặc bác bỏ: nếu  $G$  có một tập IR độc lập và đồ thị IR  $H$  của  $G$  là liên thông và có bậc ít nhất ba, thì  $H$  có bậc tối đa ít nhất là ba.

**Bài toán 3.** Xác định đồ thị nhện kép nào là các cây IR.

**Bài toán 4.** *Đặc trưng cho đồ thị IR có đường kính 2.*

**Bài toán 5.** *Như kết quả đã đề cập trong 2.1,  $K_n(\text{IR}) = K_n$ . Xác định các đồ thị  $G$  khác sao cho  $G(\text{IR}) = G$  hoặc chỉ ra rằng đồ thị đầy đủ là đồ thị duy nhất có tính chất này.*



## KẾT LUẬN

Trong khóa luận này, trọng tâm chính của chúng tôi là phân tích khả năng thực hiện và đặc điểm cấu trúc của đồ thị tái cấu hình của các tập không dư thừa. Tôi đã trình bày tư tưởng nội dung của việc tái cấu hình của các tập dư thừa trên từng mô hình đồ thị cụ thể với các tập không dư thừa cực đại (IR), phân tích các trường hợp khả thi cũng như không khả để thực hiện tái cấu hình. Song song với đó là một số ví dụ minh họa cho phương pháp và cấu trúc đồ thị. Đóng góp chính của khóa luận:

1. Tìm hiểu và trình bày lại nội dung Lý thuyết đồ thị liên quan đến đề tài và Đồ thị tái cấu hình các tập không dư thừa.
2. Phân tích lý thuyết, đưa ra các trường hợp cụ thể thực hiện và cũng như phân tích chứng minh nội dung lý thuyết đề tài.

Tuy nhiên do thời gian thực hiện khóa luận không nhiều còn có những sai sót tôi rất mong nhận được sự góp ý của quý thầy cô và bạn đọc nhằm hoàn thiện hơn nữa khóa luận của mình. Tôi xin chân thành cảm ơn.

# Tài liệu tham khảo

- [1] A. Bień (2015), "Gamma Graphs Of Some Special Classes Of Trees", *Annales Mathematicae Silesianae*, (29), 25-34.
- [2] A. Haddadan, T. Ito and A. E. Mouawad and N. Nishimura and H. Ono and A. Suzuki and Y. Tebbal (2016), "The complexity of dominating set reconfiguration", *Theoret. Comput. Sci.*, (651), 37-49.
- [3] A. Dyck (2017), "The Realisability of  $\gamma$ -Graphs", *Master's Thesis, Simon Fraser University*.
- [4] A. Suzuki, A.E. Mouawad, N. Nishimura (2016), "Reconfiguration of dominating sets", *J.Comb.Optim* , (32), 1182-1195.
- [5] C.M. Mynhardt, A. Roux (2022), "Irredundance trees of diameter 3", *Discrete Mathematics*, (345), 113079 trang.
- [6] Cereceda L, Van Den Heuvel J and Johnson M (2008), "Connectedness of the graph of vertex-colourings", *Discrete Math*, (308), 913-919.
- [7] Cereceda L, Van Den Heuvel J and Johnson M (2011), Finding paths between 3-colorings, *J. Graph Theory*, (67), 69-82.
- [8] Cockayne E.J, Hedetniemi S.T and Miller D.J (1978), "Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs", *Canadian Mathematical Bulletin*, (21), 461-468.
- [9] Connelly E, Hutson K.R and Hedetniemi S.T and Haynes T. W. (2011). "A note on  $\gamma$ -graphs", *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 23-31.

- [10] C. M. Mynhardt, A. Roux and L. E. Teshima (2019), "Connected  $k$ -dominating graphs", *Discrete Math*, (342), 145-151.
- [11] C. M. Mynhardt and L. Teshima (2018), "A note on some variations of the  $\gamma$ -graph", *J. Combin. Math. Combin. Comput*, (104), 217-230.
- [12] E. Connelly, S.T. Hedetniemi and K.R. Hutson (2010), "A note on  $\gamma$ -Graphs", *AKCE Intr. J. Graphs Comb*, (8), 23-31.
- [13] G.H. Fricke, S.M. Hedetniemi and S.T. Hedetniemi and K.R. Hutson (2011), " $\gamma$ -graphs of graphs", *Discuss. Math. Graph Theory*, (31), 517-531.
- [14] K. Subramanian, N. Sridharan (2008), " $\gamma$ -graph of a graph", *Bull. Kerala Math. Assoc*, (1), 17-34.
- [15] Lê Anh Vinh (2020), "Lý thuyết đồ thị", *Đại học Quốc gia Hà Nội*, 260 trang.
- [16] M. Edwards (2015), "Vertex-critically and bicritically for independent domination and total domination in graphs", *PhD Dissertation, University of Victoria*.
- [17] N. Sridharan, S. Amutha and S. B. Rao (2013), "Induced subgraphs of gamma graphs", *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, (3), 1350012.
- [18] Paul Bonsma, Luis Cereceda (2009), "Finding paths between graph colourings: PSPACE-completeness and superpolynomial distances", *Theoretical Computer Science*, (410), 5215-5226.
- [19] R. Haas, K. Seyffarth (2014), "The  $k$ -dominating graph", *Graphs Combin*, (30), 609-617.
- [20] R. Haas, K. Seyffarth, "Reconfiguring dominating sets in some well-covered and other classes of graphs", *Discrete Math*, (340), 1802-1817.
- [21] S. Alikhani, D. Fatehi and S. Klavžar (2017), "On the structure of dominating graphs", *Graphs Combin*, (651), 665-672.
- [22] S. A. Lakshmanan, A. Vijayakumar (2010), "The gamma graph of a graph", *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, (7), 53-59.

- [23] T. Ito, E.D. Demaine, N.J.A. Harvey and C.H. Papadimitriou and M. Sideri and R. Uehara and Y. Uno (2011), "On the complexity of reconfiguration problems", *Theoretical Computer Science*, (412), 1054-1065.
  
- [24] T. Ito, M. Kaminski, E.D. Demaine (2009), "Reconfiguration of list edge-colorings in a graph, in: Algorithms and data structures", *Lecture Notes in Computer Science*, (5664), Springer, Berlin, 375-386.