

Đề thi Toán rời rạc. Lớp cử nhân tài năng. 2018-2019

Phan Thị Hà Dương

Ngày 26 tháng 12 năm 2018

(Được sử dụng tất cả các tài liệu. Không được sử dụng các thiết bị điện tử. Không được bàn luận, trao đổi và mượn tài liệu của nhau. Thời gian thi 120'. Mỗi bài 2 điểm.)

1. Có bao nhiêu cách xếp 4 ghế xanh và 6 ghế đỏ vòng quanh một cái bàn tròn ?
2. Trong một thành phố có các ngôi chùa khác nhau. Giữa một số chùa có đường đi trực tiếp đến nhau, nhưng cũng có những chùa muốn đến được nhau phải đi qua một số chùa khác. Biết rằng luôn có thể đi từ chùa này đến chùa khác trực tiếp hay gián tiếp. Người ta muốn treo cờ trên một số tuyến đường nhân ngày rằm tháng giêng sao cho luôn có cách đi từ chùa này đến chùa khác trên những con đường được treo cờ. Số cờ tỉ lệ thuận với độ dài các con đường. Biết rằng độ dài các đoạn đường nối giữa hai chùa (nếu có đường trực tiếp giữa chúng) là đôi một khác nhau. Chứng minh rằng chỉ có duy nhất một cách treo cờ sao cho số cờ được treo là ít nhất.
3. Hãng hàng không Chim Én có thuê các một số các sân bay và thiết kế các tuyến bay giữa chúng. Tổ phi công phát hiện ra rằng nếu muốn bay từ một sân bay qua các sân bay khác rồi lại quay về điểm xuất phát thì số chặng bay luôn là một số chẵn, bất kể bay thế nào. Bộ phận điều khiển sân bay phát hiện ra các sân bay có thể chia làm hai nhóm rời nhau sao cho không có chuyến bay nào nối giữa các sân bay của cùng một nhóm. Khi họ nêu các phát hiện này trong buổi lễ tổng kết thì giám đốc hãng nói: "Hai điều các anh phát hiện chỉ là một". Hỏi ông giám đốc nói có đúng không ?
4. Thuật toán Dijkstra được sử dụng để tìm các đường đi ngắn nhất từ một đỉnh đến các đỉnh còn lại trong đồ thị. Giả thiết ban đầu là các cạnh đồ thị có trọng số dương. Vậy nếu đồ thị có một số cạnh có trọng số âm thì thuật toán có chạy đúng nữa không ? Chứng minh hoặc cho ví dụ.
5. Hãy chứng minh tính chất sau: nếu hai mệnh đề P và Q là tương đương với nhau thì hai mệnh đề đối ngẫu của chúng P^* và Q^* cũng tương đương với nhau.
6. Có bao nhiêu hàm Boole gồm 3 biến Boole x, y, z sao cho nếu giá trị của x khác y thì hàm luôn có giá trị 1 ?
7. Xét hệ logic có các mệnh đề và các phép toán hội, tuyển, phủ định, kéo theo. Liệu có thể định nghĩa một phép toán mới mà chỉ cần dùng phép toán đó là biểu diễn được tất cả các phép toán của hệ logic này hay không ?