Toán rời rạc	GV: Phan Thị Hà Dương (lý thuyết)

Lý thuyết đồ thị (tiếp)

19/11/2018	GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Bài 1. Trong một vùng có sáu trạm phát sóng được đánh số từ 1 đến 6. Khoảng cách giữa các trạm phát sóng trong vùng (tính bằng đơn vị *dặm*) được mô tả trong bảng sau:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	—	85	175	200	50	100
2	85	—	125	175	100	160
3	175	125	—	100	200	250
4	200	175	100	—	210	220
5	50	100	200	210	—	100
6	100	160	250	220	100	—

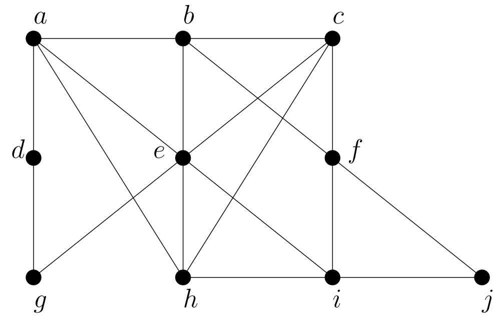
Một cách *tô màu đồ thị* là một cách gán màu cho các đỉnh của đồ thị sao cho hai đỉnh kề nhau luôn có màu khác nhau. Để gán tần số phát sóng cho các trạm từ 1 đến 6 như trên, một cách thường sử dụng là mô hình bài toán này dưới dạng một bài toán tô màu các đỉnh trên đồ thị, trong đó mỗi màu ứng với một tần số, và do đó mỗi cách tô màu ứng với một cách gán tần số cho các trạm phát sóng. Biết rằng để tránh việc tín hiệu bị nhiễu, hai trạm có khoảng cách nhỏ hơn hoặc bằng 150 dặm không thể sử dụng chung một tần số. Hãy mô hình bài toán theo phương pháp trên để trả lời câu hỏi cần sử dụng ít nhất bao nhiêu tần số để gán cho các trạm phát sóng trong vùng?

Bài 2. Thuật toán sau có thể được dùng để tô màu một đồ thị đơn: Đầu tiên, liệt kê các đỉnh theo thứ tự $v_1, v_2, \dots, v_n$ sao cho $\deg(v_1) \geq \deg(v_2) \geq \cdots \geq \deg(v_n)$. Gán màu 1 cho v_1 và đỉnh tiếp theo trong danh sách không kề với v_1 (nếu có), và lần lượt gán màu 1 cho mỗi đỉnh tiếp đó không kề với các đỉnh đã được gán màu 1. Sau đó, gán màu 2 cho đỉnh đầu tiên trong danh sách mà chưa được tô màu. Lần lượt gán màu 2 cho các đỉnh trong danh sách nếu các đỉnh này chưa được tô màu và không kề với các đỉnh đã được gán màu 2. Tiếp tục quá trình này với các màu tiếp theo đến khi tất cả các đỉnh trong danh sách đều được tô màu.

(a) Hãy sử dụng thuật toán trên để tô màu các đỉnh của đồ thị trong Hình 1.

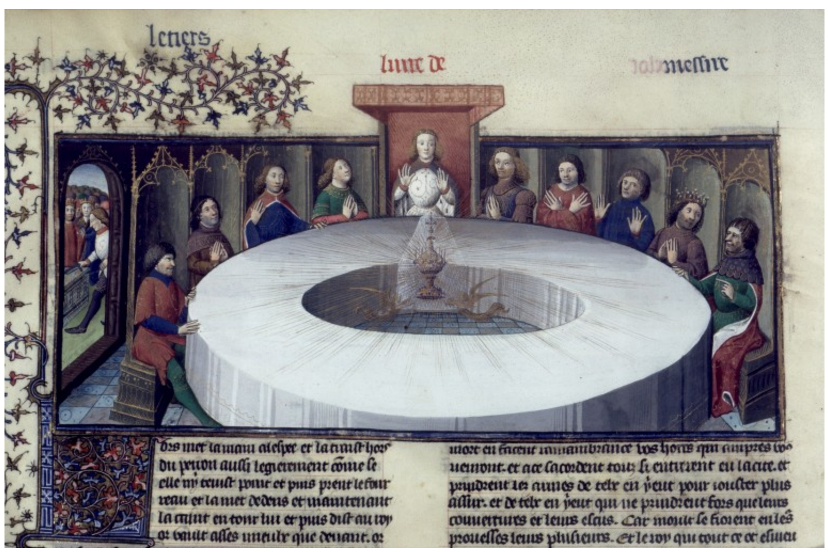
(b) Mô tả thuật toán trên bằng cách sử dụng mã giả (pseudocode).

(c) Chỉ ra một ví dụ rằng thuật toán trên có thể sử dụng nhiều màu hơn số màu cần thiết để tô màu một đồ thị đơn cho trước.



Hình 1: Minh họa **Bài 2**.

Bài 3. Tương truyền rằng dưới triều vua Arthur của Đế quốc Anh (khoảng cuối thế kỉ thứ 5 đầu thế kỉ thứ 6 sau công nguyên), các hội nghị quan trọng của đế quốc giữa nhà vua và các hiệp sĩ cận thần (Knights of the Round Table) thường được tổ chức quanh một bàn tròn, với ý nghĩa rằng mọi thành viên tham gia đều có vai trò như nhau.



Hình 2: Hội nghị bàn tròn giữa vua Arthur và các cận thần (ảnh từ Wikipedia).

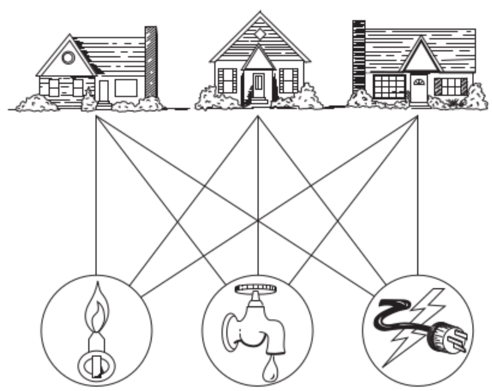
Giả sử vua Arthur cần triệu tập $2n$ hiệp sĩ quanh một bàn tròn để tiến hành một hội nghị quan trọng. Trong số này, hai hiệp sĩ bất kỳ hoặc là thân nhau hoặc là kẻ thù, và mỗi hiệp sĩ có không quá $n-1$ kẻ thù trong số $2n-1$ hiệp sĩ còn lại. Một câu hỏi đặt ra là liệu vua Arthur có thể xếp các hiệp sĩ cận thần của mình quanh một bàn tròn sao cho mỗi hiệp sĩ có hai người bạn thân ngồi ở hai bên trái phải của mình.

(a) Xét đồ thị được xây dựng bằng cách coi mỗi hiệp sĩ là một đỉnh của đồ thị, và hai đỉnh kề nhau khi hai hiệp sĩ tương ứng là bạn thân của nhau. Việc trả lời câu hỏi đặt ra tương ứng với việc giải bài toán nào trong đồ thị trên?

(b) Giả sử có 8 hiệp sĩ Alynore, Bedivere, Degore, Gareth, Kay, Lancelot, Perceval, và Tristan. Danh sách các hiệp sĩ là kẻ thủ của nhau được biểu diễn như sau: A (D, G, P), B (K, P, T), D (A, G, L), G (A, D, T), K (B, L, P), L (D, K, T), P (A, B, K), T (B, G, L), trong đó mỗi hiệp sĩ tương ứng với một chữ cái thể hiện chữ đầu tiên trong tên của hiệp sĩ này, và kèm theo mỗi hiệp sĩ là một danh sách các hiệp sĩ kẻ thù. Hãy vẽ đồ thị tương ứng mô tả ở trên, và sử dụng đồ thị này để chỉ ra một cách sắp xếp các hiệp sĩ quanh bàn tròn thỏa mãn yêu cầu đề ra (nếu có).

(c) Hãy thử trả lời câu hỏi đặt ra ở đề bài trong trường hợp tổng quát cho $2n$ hiệp sĩ.

Bài 4. Có ba ngôi nhà được nối với ba cơ sở cung cấp thiết bị sinh hoạt như hình sau. Một



Hình 3: Đường nối giữa ba ngôi nhà và ba cơ sở cung cấp thiết bị sinh hoạt.

câu hỏi đặt ra là liệu có thể nối ba ngôi nhà với ba cơ sở sao cho các đường nối không cắt nhau. Để trả lời câu hỏi trên, ta có thể coi mỗi ngôi nhà và mỗi cơ sở là một đỉnh của đồ thị, và các cạnh của đồ thị tương ứng với các đường nối từ các nhà đến các cơ sở. Câu hỏi đặt ra ban đầu ứng với việc tìm hiểu xem liệu có thể vẽ lại đồ thị trên mặt phẳng theo một cách nào đó sao cho hai cạnh bất kỳ của đồ thị không cắt nhau (trừ ở các vị trí đầu mút). Hãy vẽ đồ thị tương ứng và trả lời câu hỏi đặt ra trong trường hợp trên. Nếu thay vì ba nhà ta chỉ có hai nhà thì kết quả có thay đổi gì không?

Bài 5. Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng và $A \subseteq V$ và $B \subseteq V$. Với mỗi đỉnh $v \in V$, định nghĩa $N(v) := \{w : w \in V \text{ và } vw \in E\}$. Với mỗi tập con $X \subseteq V$, định nghĩa $N(X) := \bigcup_{x \in X} N(x)$. Chứng minh rằng

(a) $N(A \cup B) = N(A) \cup N(B)$.

(b) $N(A \cap B) \subseteq N(A) \cap N(B)$, và đưa ra một ví dụ trong trường hợp $N(A \cap B) \neq N(A) \cap N(B)$.