

Hoán vị mở rộng, Chính hợp lặp, Tổ hợp lặp

17/09/2018

GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

Bài 1

- (a) Có bao nhiêu nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 5$, $0 \leq x_2 \leq 6$, $0 \leq x_3 \leq 6$, và $0 \leq x_4 \leq 3$?
- (b) Có bao nhiêu nghiệm nguyên của bất phương trình $x_1 + x_2 + x_3 \leq 11$ trong đó x_1, x_2, x_3 là các số nguyên không âm.

Bài 2

Giả sử một thanh tra vũ khí cần kiểm tra năm địa điểm chọn trước, mỗi địa điểm hai lần, và mỗi ngày cần phải kiểm tra đúng một địa điểm. Thanh tra có thể chọn thứ tự đến thăm mỗi địa điểm, nhưng không thể đến địa điểm X đáng nghi nhất trong hai ngày liên tiếp. Có bao nhiêu cách để thanh tra sắp xếp thứ tự các điểm đến?

Bài 3

- (a) Có bao nhiêu số hạng trong khai triển của $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ sau khi rút gọn?
- (b) Chứng minh rằng nếu n là một số nguyên dương thì

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_m = n} C(n; n_1, n_2, \dots, n_m) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}, \quad (1)$$

trong đó

$$C(n; n_1, n_2, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_m!}.$$

Bài 4

Cho S là một tập gồm n phần tử. Có bao nhiêu cặp (A, B) thỏa mãn $A \subseteq B \subseteq S$?

Bài 5

- (a) Xét tập A gồm $2n$ vật, trong đó n vật hoàn toàn giống nhau. Có bao nhiêu cách chọn n vật từ A ?
- (b) Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n , $n \geq 4$, trong đó 01 xuất hiện chính xác hai lần.

Bài 6

Số Stirling loại một không dấu $c(k, n)$ (k, n là các số nguyên thỏa mãn $1 \leq k \leq n$) là số cách sắp xếp n người vào k bàn tròn sao cho mỗi bàn có ít nhất một người. Hai cách sắp xếp được coi là như nhau nếu mỗi người có cùng người bên trái và người bên phải trong mỗi cách sắp xếp.

- (a) Tìm các số Stirling loại một không dấu sau: $c(3, 2)$, $c(4, 2)$, $c(4, 3)$, và $c(5, 4)$.
- (b) Chứng minh rằng nếu n là số nguyên dương thì $\sum_{k=1}^n c(n, k) = n!$.
- (c) Chứng minh rằng nếu $1 \leq k < n$ thì $c(n+1, k) = c(n, k-1) + nc(n, k)$.