Toán rời rạc	GV: Phan Thị Hà Dương (lý thuyết)

Hàm sinh và hệ thức truy hồi (tiếp)

08/10/2018	GV: Hoàng Anh Đức (bài tập)

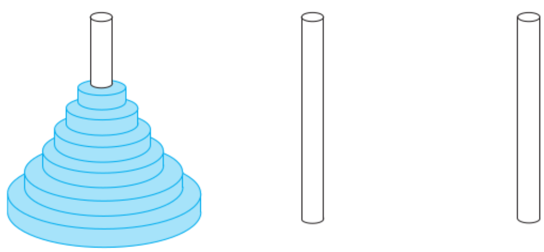
Bài 1. Tìm hệ thức truy hồi cho

(a) Số cách để phủ hoàn toàn một bàn cờ $2 \times n$ với các quân domino cỡ 1×2.

(b) Số các hàm toàn ánh từ một tập A gồm m phần tử vào một tập B gồm n phần tử $(m \geq n)$.

(c) Số các chuỗi nhị phân độ dài n có chứa một số chẵn các số 0.

Bài 2. Trong bài toán "Tháp Hà Nội" (The Tower of Hanoi), cho trước ba cột $1, 2, 3$ và n đĩa kích cỡ khác nhau đặt ở cột 1 như Hình 1. Trong mỗi một lần chuyển đĩa, bạn được phép di chuyển một đĩa từ cột này sang cột khác, với điều kiện không có đĩa nào đặt ở trên đĩa có kích cỡ nhỏ hơn nó trong tất cả các cột. Mục tiêu cuối cùng là chuyển tất cả các đĩa từ cột 1 sang cột 3 sử dụng quy tắc chuyển đĩa nêu trên.



Hình 1: Trạng thái ban đầu của bài toán "Tháp Hà Nội".

Gọi H_n là số lần chuyển tối thiểu để chuyển n đĩa từ cột 1 sang cột 3.

(a) Tìm hệ thức truy hồi cho H_n. Từ đó, hãy tìm công thức tường minh của H_n theo n.

(b) Giả sử các đĩa không được phép "nhảy" giữa cột 1 và cột 3 mà chỉ có thể di chuyển giữa cột 1 và cột 2, giữa cột 2 và cột 3. Tìm hệ thức truy hồi và công thức tường minh cho H_n trong trường hợp này.

(c) Một cách xếp đĩa được gọi là *hợp lệ* nếu không có đĩa nào nằm trên đĩa bé hơn nó trong tất cả các cột. Chứng minh rằng tất cả các cách sắp xếp hợp lệ xuất hiện trong các bước chuyển của lời giải tối thiểu của bài toán với điều kiện ở phần (b).

Bài 3. Bài tập sau mô tả các bước sử dụng hàm sinh để giải hệ thức truy hồi $(n+1)a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n!}$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$.

a) Gọi $G(x)$ là hàm sinh của dãy $\{a_n\}$. Chỉ ra rằng $G'(x) = G(x) + e^x$ và $G(0) = 1$.

b) Từ phần (a), chỉ ra rằng $(e^{-x}G(x))' = 1$, và kết luận rằng $G(x) = xe^x + e^x$.

c) Sử dụng phần (b) để tìm công thức tường minh cho a_n.

Bài 4. Sử dụng hàm sinh để giải các hệ thức truy hồi sau:

(a) $a_k = 3a_{k-1} + 2$, $a_0 = 1$.

(b) $a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2} + 2^k$, $a_0 = 4, a_1 = 12$.

(c) $a_k = 4a_{k-1} - 4a_{k-2} + k^2$, $a_0 = 2, a_1 = 5$.

(d) $a_n = a_{n-1}^2/a_{n-2}$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

Bài 5. Xét trò chơi sau: Xếp các số tự nhiên từ 1 đến n thành một vòng tròn theo thứ tự tăng dần theo chiều kim đồng hồ. Bắt đầu từ 1, đi theo chiều kim đồng hồ, cứ lần lượt giữ lại một số và xóa số tiếp theo, đến khi nào còn lại đúng một số thì dừng. Gọi số còn lại là $J(n)$. Ví dụ, với $n = 5$, các số bị xóa lần lượt là $2, 4, 1, 5$, và $J(5) = 3$

(a) Biểu diễn $J(2n)$ và $J(2n+1)$, $n \geq 1$, theo $J(n)$.

(b) Chứng minh rằng nếu $n = 2^k + r$ với $0 \leq r \leq 2^k - 1$ thì $J(n) = 2r + 1$.

Bài 6. Một *hoán vị mất thứ tự (derangement)* σ của một tập X gồm n phần tử là một hoán vị thỏa mãn điều kiện $\sigma(x) \neq x$ với mọi $x \in X$. Gọi số hoán vị mất thứ tự của một tập n phần tử là D_n.

(a) Sử dụng công cụ tổ hợp, chứng minh rằng $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

(b) Từ phần (a), chứng minh rằng $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

(c) Từ phần (b), tìm công thức tường minh của D_n theo n.

(d) Chứng minh rằng

$$n! = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_{n-k}.$$