Toán rời rạc – Kiểm tra cuối kỳ

Học kỳ 1, năm học 2018 – 2019

Thời gian: 120 phút

Đề thi gồm 8 bài; các bài độc lập với nhau và có thể được làm theo thứ tự tùy ý. Được phép sử dụng tài liệu và máy tính bỏ túi; không được sử dụng các thiết bị điện tử khác. Các bài làm giống nhau, toàn bộ hoặc một số câu, sẽ tự động chia đều số điểm (của bài ít điểm hơn).

Phần I. Tổ hợp đếm

Bài 1 (2 điểm)**.** Một bài kiểm tra có ba phần, phần 1 có 3 bài tập, phần 2 có 3 bài tập, phần 3 có 2 bài tập. Các bài tập độc lập với nhau và có thể được làm theo một thứ tự bất kỳ. Giả sử một sinh viên làm được tất cả các bài. Hỏi sinh viên đó:

a) có bao nhiêu cách chọn thứ tự các bài để làm?

b) có bao nhiêu cách chọn thứ tự các bài để làm sao cho phần 1 được làm trước phần 2, phần 2 được làm trước phần 3?

Bài 2 (2 điểm)**.** Có bao nhiêu cách chia 25 cái kẹo cho năm bạn nhỏ sao cho:

a) bạn nào cũng có kẹo?

b) số kẹo của mỗi bạn là một số lẻ?

Bài 3 (3 điểm)**.** Với mỗi số tự nhiên n, gọi a_n là tổng của các bình phương của n số tự nhiên đầu tiên.

a) Tính a_0, a_1, a_2, a_3. Viết một công thức truy hồi tuyến tính (không thuần nhất) cho dãy (a_n).

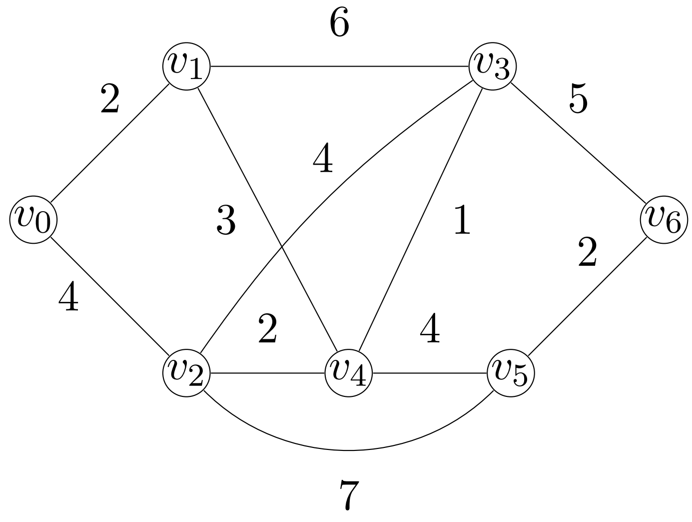
b) Gọi $g(x)$ là hàm sinh của dãy. Tìm một công thức thu gọn của $g(x)$. Từ đó tìm một công thức tổng quát (theo n) cho a_n.

Phần II. Đồ thị

Bài 4 (1 điểm)**.** Chứng minh rằng một cây là một đồ thị hai phía.

Bài 5 (1 điểm)**.** Một cây nhị phân *đầy* có 9 lá thì có bao nhiêu cạnh cầu?

Bài 6 (2 điểm)**.** Sử dụng một thuật toán đã học, tìm một đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh v_0 và v_6 của đồ thị trong Hình 1 (nói tên của thuật toán được sử dụng và trình bày rõ các bước và các kết quả trung gian).



Hình 1: Tìm một đường đi ngắn nhất giữa v_0 và v_6.

Phần III. Lô-gích

Bài 7 (2 điểm)**.** Cho hàm Boole ba biến $F(x, y, z) = (x + \bar{z})y$.

a) Lập bảng giá trị của hàm F. Biểu diễn F trên một khối lập phương đơn vị bằng cách đánh dấu các đỉnh tại đó hàm đạt giá trị 1.

b) Tìm một biểu diễn của hàm F chỉ sử dụng hai phép toán $\cdot$ và $\bar{}$ (*Gợi ý: sử dụng đẳng thức De Morgan*).

Bài 8 (2 điểm)**.** Hàm Boole bốn biến $F(w, x, y, z)$ nhận giá trị 1 khi và chỉ khi có ít nhất hai trong các biến x, y, z nhận giá trị 1.

a) Tìm một biểu diễn của F dưới dạng tổng của các *minterm*.

b) Đơn giản hóa biểu thức tìm được ở câu trước bằng một phương pháp đã học (nêu tên phương pháp và trình bày rõ các bước và các kết quả trung gian).

Gợi ý trả lời

Bài 1. a) $8! = 40320$ cách.

b) $3!3!2! = 72$ cách.

Bài 2. a) Số cách chia kẹo thỏa mãn là số nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 25$, hay số nghiệm nguyên không âm của phương trình $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 20$, và bằng $\binom{24}{4} = 10626$ cách.

b) Số cách chia kẹo thỏa mãn là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 25$ sao cho mỗi x_i là số lẻ. Đặt $x_i = 2y_i + 1$, đưa về tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình $y_1+y_2+y_3+y_4+y_5 = 10$. Đáp số là $\binom{14}{4} = 1001$ cách.

Bài 3. a) Bốn số hạng đầu tiên: 0, 1, 5, 14. Công thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + n^2$ với mọi $n \geq 1$.

b) Viết $a_n = a_{n-1} + n(n-1) + n$, thay vào $g(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1} + n(n-1) + n)x^n \\ &= x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + x^2\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \\ &= xg(x) + \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Suy ra $g(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^4} = \frac{2x}{(1-x)^4} - \frac{x}{(1-x)^3}$.

Khai triển chuỗi lũy thừa hình thức thu được $a_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Bài 4. Chọn một đỉnh làm gốc. Phân hoạch (hay tô màu) các đỉnh theo khoảng cách chẵn/lẻ đến đỉnh gốc.

Bài 5. Một cây nhị phân đầy có 9 lá thì có $2 \times 9 - 1 = 17$ đỉnh và $17 - 1 = 16$ cạnh. Vì trong một cây, mọi cạnh đều là cạnh cầu, nên có 16 cạnh cầu.

Bài 6. Có thể sử dụng thuật toán Dijkstra hoặc Bellman – Ford. Một đường đi ngắn nhất tìm được bởi thuật toán Dijkstra là $v_0v_1v_4v_3v_6$, độ dài 11.

Bài 7. a) $F(x, y, z) = 1$ tại các điểm $(1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0)$.

b) $F(x, y, z) = (\overline{\bar{x}z})y$.

Bài 8. a) $F = wxyz + w\bar{x}yz + wx\bar{y}z + wxy\bar{z} + \bar{w}xyz + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}xy\bar{z}$.

b) Có thể sử dụng sơ đồ Karnaugh hoặc phương pháp Quine–McCluskey. Sơ đồ Karnaugh có thể cho các kết quả khác nhau. Quine–McCluskey cho $F = yz + xz + xy$.