

Cây

Nguyễn Hoàng Thạch * Hoàng Anh Đức †

Bài 1

Một đỉnh của một đồ thị liên thông được gọi là một *đỉnh treo* nếu bậc của nó bằng 1. Chứng minh rằng đồ thị nhận được từ một đồ thị liên thông bằng cách xóa đi một đỉnh treo cũng là một đồ thị liên thông.

Bài 2

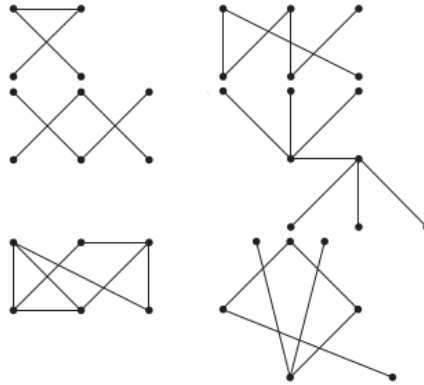
Chứng minh rằng một đồ thị liên thông có n đỉnh thì có ít nhất $n - 1$ cạnh.

Bài 3

Giả sử giữa hai đỉnh u và v của một đồ thị liên thông có hai đường đi đơn P_1 và P_2 , và e là một cạnh nằm trong P_1 nhưng không nằm trong P_2 . Chứng minh rằng đồ thị nhận được bằng cách xóa đi cạnh e cũng là một đồ thị liên thông.

Bài 4

Trong các đồ thị ở hình 1, đồ thị nào là cây?



Hình 1:

Bài 5

Trong cây được cho bởi hình 2, hãy cho biết:

- Đỉnh nào là gốc?

*nhthach@math.ac.vn

†anhduc.hoang1990@gmail.com

- Đỉnh nào là đỉnh trong?
- Đỉnh nào là lá?
- Đỉnh nào là con của g ?
- Đỉnh nào là cha của h ?
- Đỉnh nào là anh em của k ?
- Đỉnh nào là tổ tiên của m ?
- Đỉnh nào là hậu duệ của d ?
- Cây con có gốc tại b có bao nhiêu đỉnh? bao nhiêu lá?
- Cây con có gốc tại d có chiều cao bằng bao nhiêu?

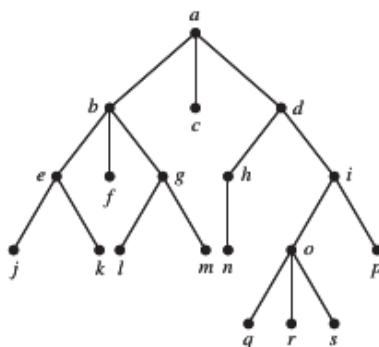
- Bài 6**
1. Hai cây không có gốc được coi là giống nhau nếu các đồ thị vô hướng tương ứng đẳng cấu với nhau. Có bao nhiêu cây không có gốc có 4 đỉnh?
 2. Hai cây có gốc được coi là giống nhau nếu các đồ thị có hướng tương ứng đẳng cấu với nhau. Có bao nhiêu cây có gốc có 5 đỉnh?

Bài 7

Với giá trị nào của m, n thì $K_{m,n}$ là một cây?

Bài 8

Một cây có 100 đỉnh có bao nhiêu cạnh? Một cây 5-ary đầy với 100 đỉnh trong có bao nhiêu cạnh?



Hình 2:

Bài 9

Tồn tại hay không một cây m -phân đầy có 76 lá và chiều cao bằng 3?

Bài 10

Chứng minh rằng một cây m -phân đầy, cân bằng và có chiều cao bằng h có nhiều hơn m^{h-1} lá.

Bài 11

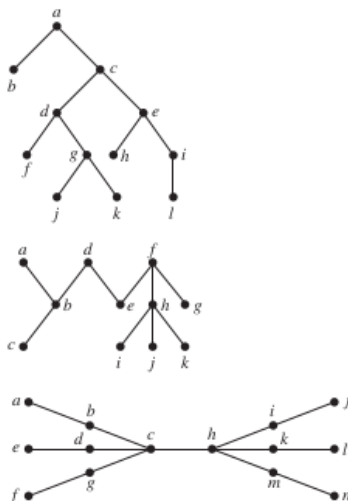
Một rừng là một đồ thị mà mỗi thành phần liên thông của nó là một cây. Một rừng gồm có k cây và n đỉnh thì có bao nhiêu cạnh?

Bài 12

Chứng minh rằng có thể tô màu đỉnh của một cây bất kỳ bằng không quá 2 màu.

Bài 13

Trong một cây không có gốc, *độ trung tâm* của một đỉnh là độ dài của đường đơn dài nhất xuất phát từ đỉnh đó. Một đỉnh được gọi là một *tâm* nếu độ trung tâm của nó là nhỏ nhất trong tất cả các đỉnh. Xác định độ trung tâm của các đỉnh và các đỉnh tâm của các cây trong hình 3.



Hình 3:

Bài 14

Từ một cây không có gốc, ta muốn chọn một đỉnh gốc sao cho cây có gốc nhận được có chiều cao tối thiểu. Chứng minh rằng đỉnh được chọn phải là một đỉnh tâm.

Bài 15

Chứng minh rằng mọi cây không có gốc hoặc có 1 đỉnh tâm, hoặc có 2 đỉnh tâm kề nhau.