



Bài toán tô màu đồ thị và ứng dụng

Sinh viên: Nguyễn Trà Giang – K65A2

Nguyễn Hoàng Sơn – K66A2

Khoa Toán - Cơ - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN

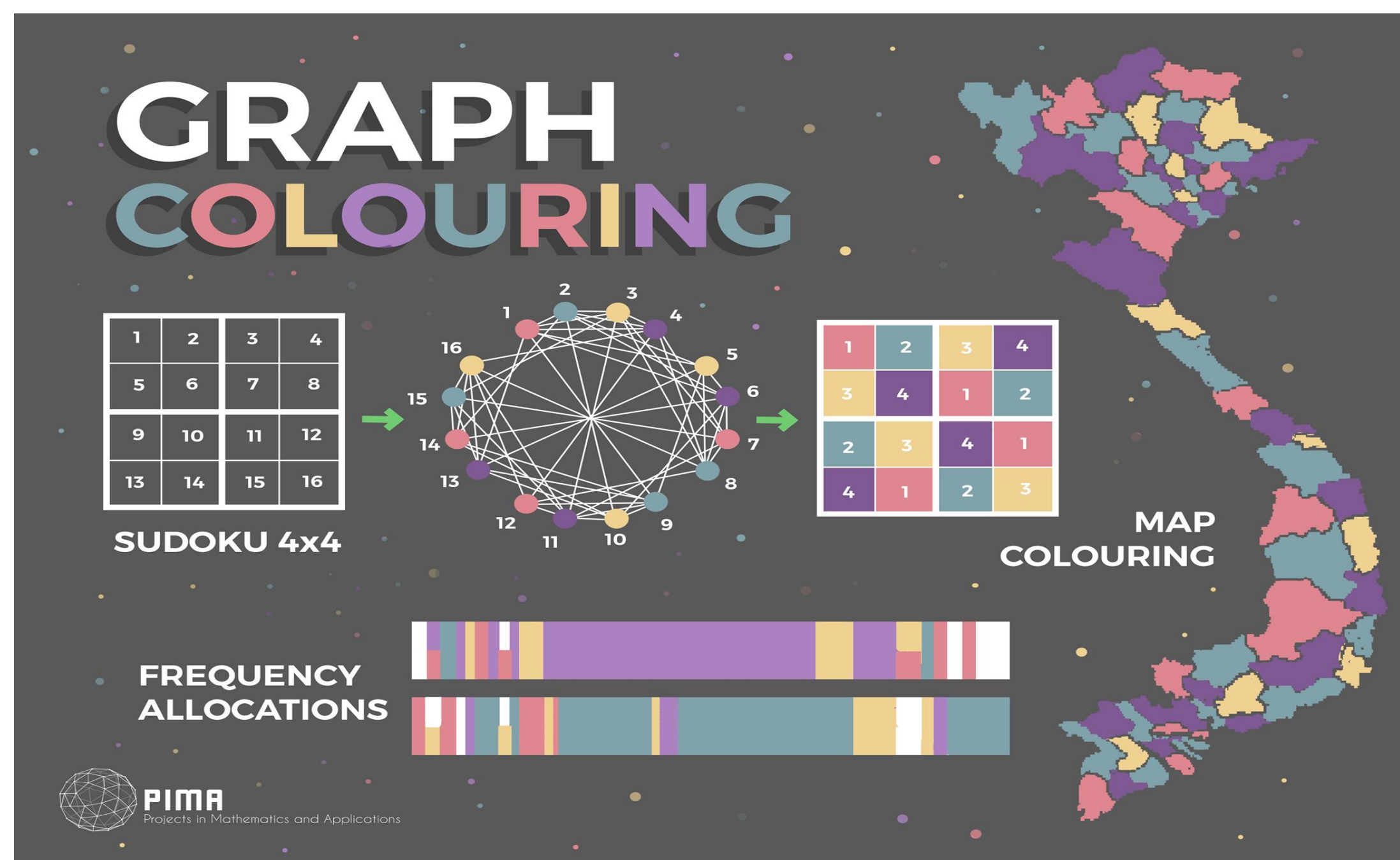
Người hướng dẫn: Giảng viên Hoàng Anh Đức



Tóm tắt: Báo cáo nghiên cứu lý thuyết các thuật toán tô màu đồ thị và một số ứng dụng thực tế

Giới thiệu:

Bài toán tô màu đồ thị (Graph coloring problem) là một bài toán trong lý thuyết đồ thị, trong đó nhiệm vụ là tô màu các đỉnh của đồ thị sao cho hai đỉnh kề nhau (nối bởi một cạnh) phải có màu khác nhau. Mục tiêu của bài toán là sử dụng số lượng ít nhất các màu để tô màu các đỉnh của đồ thị. Bài toán tô màu đồ thị có rất nhiều ứng dụng trong thực tế, bao gồm lập lịch làm việc, điều khiển đèn hiệu giao thông, vv...



Phương pháp nghiên cứu:

- Nghiên cứu lý thuyết các thuật toán tô màu đồ thị
- Nghiên cứu quan sát ứng dụng của các thuật toán tô màu đồ thị trong giải quyết các vấn đề thực tế

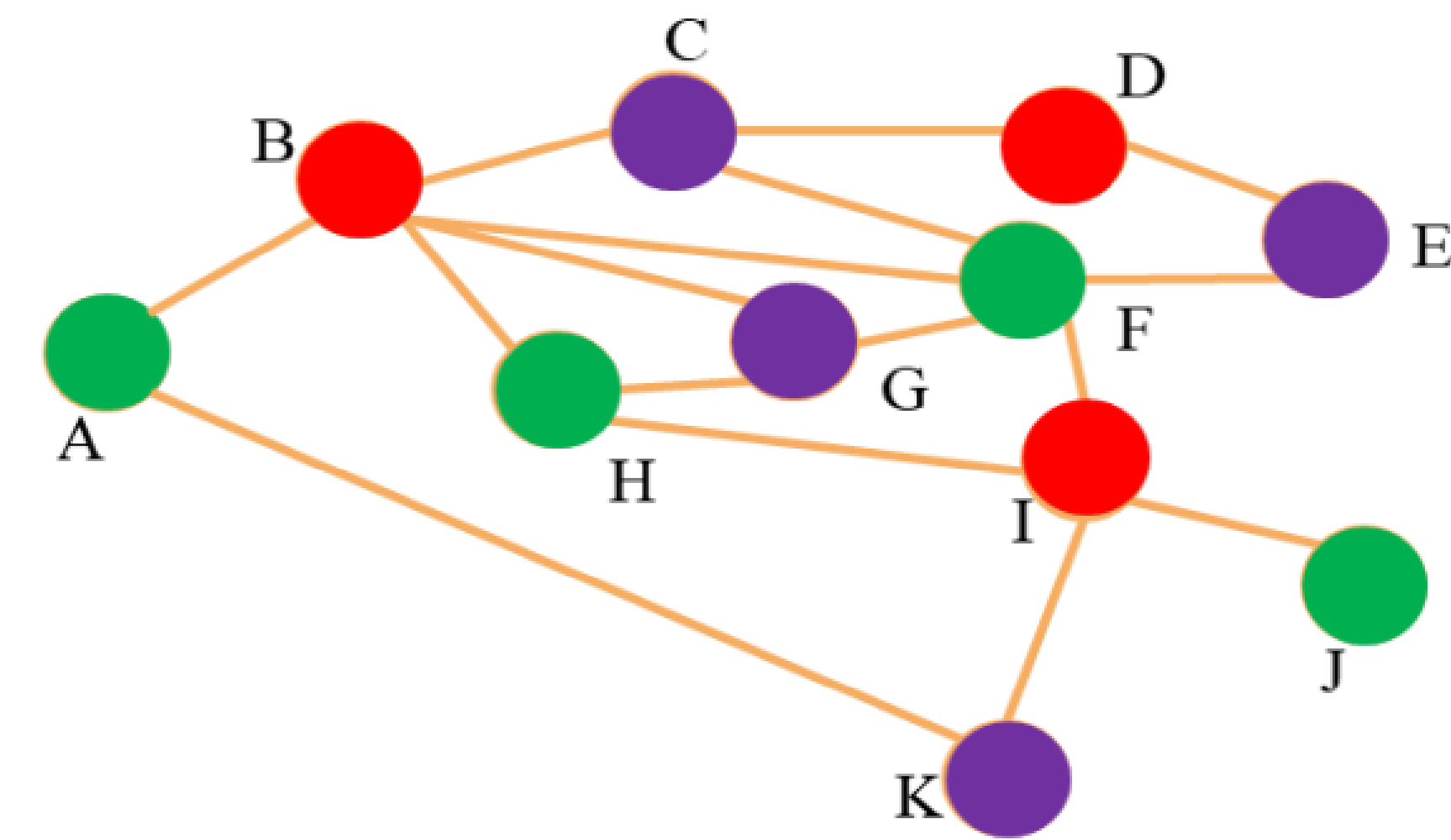
Mục tiêu nghiên cứu:

- Hiểu được khái niệm cơ bản về đồ thị, bài toán tô màu đồ thị
- Hiểu được các thuật toán cơ bản về tô màu đồ thị: thuật toán tô màu các cạnh của đồ thị, tô màu các đỉnh của đồ thị
- Hiểu được thuật toán Dsatur và ứng dụng trong giải quyết bài toán sudoku

Kết quả nghiên cứu:

I. Thuật toán tô màu cho các đỉnh của đồ thị:

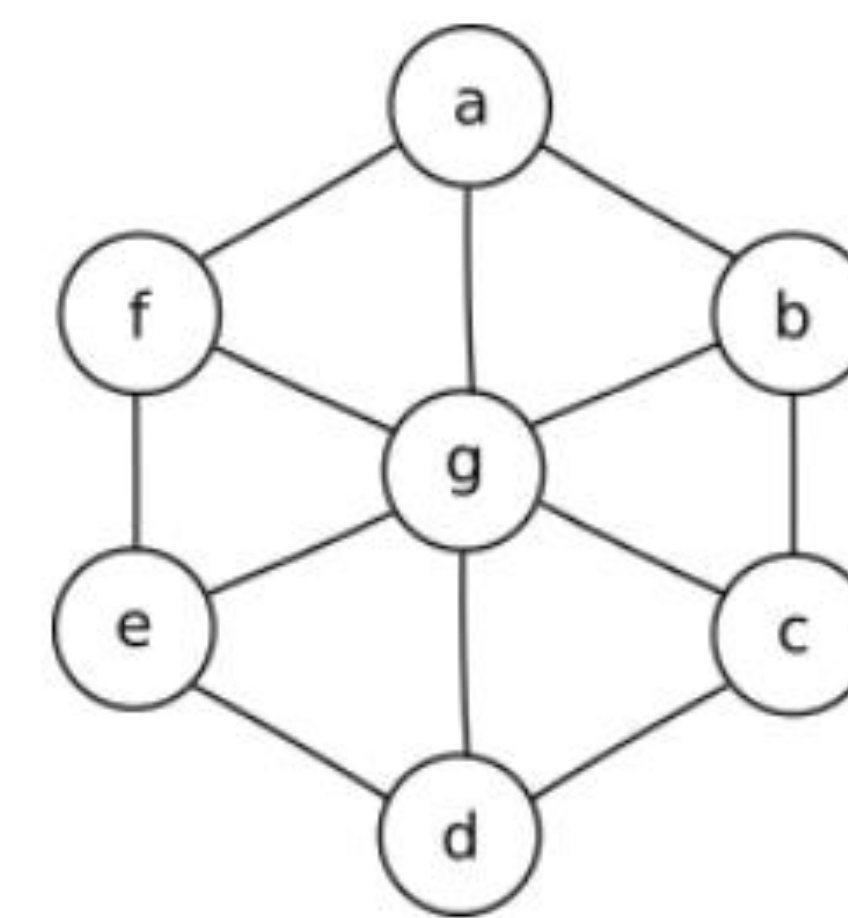
- + **Bước 1:** - Tô màu đỉnh đầu tiên trong danh sách là đỉnh B bằng màu đỏ. - Tô màu đỉnh tiếp theo trong danh sách là đỉnh I và D là các đỉnh không kề với đỉnh B, không kề với nhau bằng màu giống với đỉnh B.
- + **Bước 2:** - Loại bỏ các đỉnh vừa tô B, I và D khỏi danh sách. Lúc này ta có bảng danh sách liên kết mới với các đỉnh và bậc của chúng.
- + **Bước 3:** - Vẫn còn đỉnh chưa tô trong danh sách, tiếp tục tô đỉnh đầu tiên trong danh sách là đỉnh F bằng màu lục. - Tô màu đỉnh tiếp theo trong danh sách là đỉnh H, A và J là các đỉnh không kề với đỉnh F, không kề với nhau bằng màu giống với đỉnh F.
- + **Bước 4:** - Loại bỏ các đỉnh vừa tô F, H, A và J khỏi danh sách. Lúc này ta có bảng danh sách liên kết mới với các đỉnh và bậc của chúng.
- + **Bước 5:** - Vẫn còn đỉnh chưa tô trong danh sách, tiếp tục tô đỉnh có bậc đầu tiên trong danh sách là đỉnh C bằng màu vàng. - Tô màu đỉnh tiếp theo trong danh sách là đỉnh E, G và K là các đỉnh không kề với đỉnh C, không kề với nhau bằng màu giống với đỉnh C.



II. Thuật toán Dsatur

Thuật toán Dsatur tô màu đỉnh của đồ thị dựa trên mức độ sẵn sàng của các màu khác nhau khác với thuật toán tô màu đỉnh thông thường từ đó tìm ra cách tô màu tốt nhất cho đồ thị.

Cho đồ thị $G = (V, E)$ như hình phía dưới



Thuật toán hoạt động như sau:

- + **Bước 1:** Chọn v là đỉnh chưa tô màu trong đồ thị G vô hướng, với độ bão hòa cao nhất. Trong trường hợp bằng nhau, chọn đỉnh trong số này có bậc lớn nhất trong đồ thị con sinh ra bởi các đỉnh không tô màu.
- + **Bước 2:** Gán v cho màu i , trong đó i là số nguyên nhỏ nhất từ tập hợp các nhãn màu $\{1, 2, \dots, n-1\}$ không được sử dụng bởi bất kỳ đỉnh kề nào khác của v .
- + **Bước 3:** Nếu tất cả các đỉnh đã được tô màu thì kết thúc. Nếu không, quay lại Bước 1.

• Hiệu suất của thuật toán Dsatur:

- Độ phức tạp của thuật toán là $O(n^2)$, với n là số đỉnh của đồ thị.
- Điều này là do quá trình chọn đỉnh tiếp theo để tô màu mất $O(n)$ lần, và quá trình này được thực hiện n lần.

Kết luận và kiến nghị:

- Qua kết quả nghiên cứu tạm thời đạt được hiểu biết cơ bản về các thuật toán trong bài toán tô màu đồ thị và ứng dụng của thuật toán Dsatur.
- Cần tiếp tục nghiên cứu về một số thuật toán tô màu đồ thị khác và các ứng dụng khác ví dụ như thuật toán Welsh-Powell và bài toán điều khiển đèn hiệu nút giao thông hay bài toán sắp xếp lịch thi

Tài liệu tham khảo:

1. R. M. R. Lewis, Guide to Graph Colouring: Algorithms and Applications, 2nd edition, Springer, 2021
2. Graph coloring, Wikipedia, accessed 11 April 2023, https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring
3. DSatur, Wikipedia, accessed 11 April 2023, <https://en.wikipedia.org/wiki/DSatur>