Nhận xét Bài kiểm tra giữa kỳ

Toán rời rạc (MAT3500 2, 2022-2023)

Hoàng Anh Đức
BMTH, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Ngày 31 tháng 3 năm 2023

- Với bài số 1,
  - Một số bạn vẫn sai khi lập bảng chân trị ở phần (a).
  - Một số bạn ở phần (b) chỉ đưa ra mệnh đề lôgic mà không giải thích gì thêm là tại sao bạn có mệnh đề đó.
  - Một số bạn sử dụng các dấu + và − trong bảng chân trị thay vì T và F. Mình đề nghị các bạn **dùng T và F**.
  - Một số bạn viết $p \oplus \neg q$ và $p \to q$ dưới dạng các biểu thức chỉ sử dụng $\neg, \wedge, \vee$ và sau đó lấy $\wedge$ của hai biểu thức. Ý tưởng này không có vấn đề gì. Tuy nhiên, một số bạn viết $p \oplus \neg q \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee p)$, và điều này là không chính xác (lấy $p = \mathsf{F}$ và $q = \mathsf{F}$ thì vế trái là T và vế phải là F, do đó chúng không tương đương lôgic).
- Với bài số 2,
  - Một số bạn viết "Với $n = 4$, $\exists (a, b) = (0, 2)$ sao cho $n = 2a + 5b$". Chú ý rằng nếu bạn viết như trên thì $a = 0$ và $b = 2$, và do đó $n = 2 \times 0 + 5 \times 2 = 10$ chứ không phải 4.
  - Một số bạn vẫn không nắm được cách chứng minh bằng phương pháp quy nạp. Các bạn nên xem lại vì đây là kiến thức cơ bản.
  - Một số bạn viết giả thiết quy nạp là $k = 2x + 5y$ với $x \geq 2$. Tại sao các bạn có thể giả thiết như vậy? Cần xem lại phương pháp quy nạp.
  - Một số bạn chứng minh bằng cách xét n chẵn và n lẻ ($n \geq 4$). Nếu n chẵn thì chọn $b = 0$ và theo định nghĩa của n luôn tồn tại a sao cho $n = 2a$. Nếu n lẻ thì chọn $b = 1$ và luôn tồn tại a sao cho $n = 2a + 5 = 2(a + 2) + 1$ với mọi $n \geq 4$. Một số bạn trong trường hợp n lẻ viết $n = 2k + 1$ với $k \geq 2$ mà không giải thích tại sao có $k \geq 2$? Về mặt ý tưởng giải bài, các bạn có thể làm như trên, nhưng cần cẩn thận khi lý luận và xét các trường hợp.
  - Một số bạn chứng minh bằng quy nạp và ở bước quy nạp giả thiết $P(k)$ đúng và chứng minh $P(k+1)$ đúng bằng cách xét các trường hợp k chẵn và k lẻ. Nếu $k = 2a+5b$ lẻ thì b lẻ và do đó tồn tại v sao cho $b = 2v+1$. Suy ra $k+1 = (2a+5b)+1 = 2a+5(2v+1)+1 = 2a+10v+6 = 2(a+3)+5(2v)$, và do đó $P(k + 1)$ đúng. Nếu $k = 2a + 5b$ chẵn thì b chẵn và do đó $b = 2i$ với $i \geq 1$, suy ra $k + 1 = 2a + 6 + 5i - 5 = 2(a + 3) + 5(i - 1)$, và do đó $P(k + 1)$ đúng. Ở bước này, tại sao khi b chẵn các bạn có thể giả thiết $i \geq 1$? Nếu $i = 0$ thì có được không? Về mặt ý tưởng giải bài, các bạn có thể làm như trên, nhưng cần cẩn thận khi lý luận và xét các trường hợp.
  - Một số bạn chứng minh bằng quy nạp mạnh và ở bước quy nạp giả thiết $P(j)$ đúng với $4 \leq j \leq k$ và chứng minh $P(k + 1)$ đúng bằng cách xét các trường hợp $k + 1$ chẵn và $k + 1$ lẻ. Với $k + 1$ chẵn thì $k + 1 = 2i$ với số nguyên i nào đó thỏa mãn $4 \leq i \leq k$. Theo giả thiết quy nạp $i = 2a + 5b$ với các số nguyên không âm a, b nào đó, và do đó $k + 1 = 2i = 2(2a + 5b) = 2(2a) + 5(2b)$. Với $k + 1$ lẻ

thì $k+1 = i+j$ với i chẵn, j lẻ, và $4 \le i \le k$ và $4 \le j \le k$. Theo giả thiết quy nạp, $i = 2a_1 + 5b_1$ và $j = 2a_2 + 5b_2$ với các số nguyên không âm a_1, a_2, b_1, b_2 và do đó $k+1 = 2(a_1+b_1) + 5(a_2+b_2)$. Tuy nhiên, lý luận của bạn liệu có đúng với $k = 4$? Nếu $k = 4$ thì $k+1 = 5$ và theo lý luận trên, $5 = k+1 = i+j$ với $4 \le i \le 5$ và $4 \le j \le 5$. Điều này có đúng không?

- Một số bạn lý luận rằng với mọi $n \ge 4$ và $a, b \ge 0$, nếu n lẻ thì (*) $n - 5b$ với b là số lẻ luôn là một số chẵn và nếu n chẵn thì (**) $n - 5b$ với b là số chẵn luôn là một số chẵn. Liệu (*) và (**) có đúng khi $n < 5b$? (Chú ý rằng ở đây các bạn không chỉ ra cách lựa chọn b như thế nào, nghĩa là tôi có thể chọn b sao cho $n < 5b$ thỏa mãn. Lúc này $2a = n - 5b < 0$ và do đó $a < 0$, trái với giả thiết của các bạn rằng $a \ge 0$.) Về mặt ý tưởng giải bài, các bạn có thể làm như trên, nhưng cần cẩn thận khi lý luận và xét các trường hợp.
- Một số bạn chứng minh bằng quy nạp yếu, ở bước cơ sở kiểm tra cho $P(4), \ldots, P(7)$ và ở bước quy nạp giả thiết $k = 2a + 5b$ và chứng minh $k+1 = 2a_1 + 5b_1$ như sau. Với $b \ge 1$ và $a \ge 0$, chọn $a_1 = a+3$ và $b_1 = b-1$. Với $b \ge 0$ và $a \ge 2$, chọn $a_1 = a-2$ và $b_1 = b+1$. Các bạn chú ý rằng ở bước quy nạp cần giả thiết $k \ge 7$. Thêm vào đó, cần xét trường hợp $b = 0, a = 1$ và $b = 0, a = 0$, mặc dù các trường hợp này không thỏa mãn giả thiết $k \ge 7$ nhưng bạn cần chỉ rõ điều này để thấy là tất cả các trường hợp đều được xét.
- Một số bạn ở bước quy nạp giả sử $k = 2a + 5b$ và viết $k+1 = 2(a-2) + 5(b+1)$ nhưng không xét điều kiện $a - 2 \ge 0$.

- Với bài số 3,
  - Phần lớn các bạn đều làm được câu (a).
  - Ở câu (b), một số bạn "đoán" công thức tổng quát là $a_n = 3^n - (-2)^n$ và chứng minh công thức đúng bằng quy nạp. Làm sao các bạn đoán được?

- Với bài số 4,
  - Nhiều bạn chỉ viết "chọn $C = ...$, $k = ...$". Ở đây C, k là gì? Các bạn cần viết rõ ràng ra. Một số bạn viết là chọn C và k nhưng hoàn toàn không hiểu các hằng số này là gì. Nhiều bạn viết là chọn C và k sau đó viết ra bất đẳng thức và không nói gì thêm. Làm sao với C và k các bạn đã chọn mà các bạn có bất đẳng thức như vậy? Các bạn cần chứng minh.
  - Ở câu (b), một số bạn viết $(3n)! = 3!n!$. Điều này không chính xác.
  - Ở các câu (b) và (c), một số bạn chỉ viết "Ta thấy $(3n)! > 6^n \forall n > 3$" và "Ta thấy $\forall n > 3$ thì $\frac{2n^3+6n^2+4n}{6} < n^3$" và không giải thích gì thêm? Những điều này không hoàn toàn hiển nhiên. Các bạn làm sao để "thấy" được?
  - Ở câu (b), một số bạn viết $(3n)! = 1(2 \cdot 3) \ldots ((3n-2) \cdot (3n-1))(3n)$ và nói rằng tích này có $\frac{3n-2}{2}$ cặp và do đó $(3n!) \ge 6\frac{3n-2}{2} \ge 6n$ với $n \ge 6$ do $\frac{3n-2}{2} \ge n$ với $n \ge 6$. Trước tiên, nếu n lẻ, $\frac{3n-2}{2}$ không là số nguyên, do đó số "cặp" các bạn đề cập đến là không chính xác. Thêm nữa, ta cần chứng minh với 6^n chứ không phải $6n$. Cuối cùng, đánh giá của các bạn có chính xác không? Một số bạn viết ra được $(3n)! \ge 6^{\frac{3n-2}{2}}$ nhưng không lý luận được tiếp.
  - Ở câu (b), một số bạn chứng minh $(3n)! \ge 6^n$ bằng cách xét hai trường hợp n chẵn và n lẻ. Với n chẵn, $(3n)! = 1 \cdot (2 \cdot 3) \ldots ((3n-2) \cdot (3n-1)) \cdot 3n$ và lý luận rằng có $(3n-2)/2$ tích $(2 \cdot 3), \ldots, ((3n-2) \cdot (3n-1))$, suy ra $(3n)! \ge 6^{\frac{3n-2}{2}} > 6^n$ với mọi $n > 5$. Với n lẻ, $(3n)! = 1 \cdot (2 \cdot 3) \ldots ((3n-1) \cdot (3n))$ và lý luận rằng có $(3n-1)/2$ tích $(2 \cdot 3), \ldots, ((3n-1) \cdot (3n))$, suy ra $(3n)! \ge 6^{\frac{3n-1}{2}} > 6^n$ với mọi $n > 5$.
  - Một số bạn chứng minh $(3n)! \ge 6^n$ ở câu (b) bằng quy nạp.