Nhận xét Bài kiểm tra thường xuyên 1

Toán rời rạc (MAT3500 2, 2022-2023)

Hoàng Anh Đức
BMTH, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Ngày 21 tháng 2 năm 2023

- Với bài số 1,
  - Một số bạn vẫn sai hoặc thiếu hàng, cột khi lập bảng chân trị. Chú ý rằng ta cần các cột cho $p, q, \neg q, p \oplus q, p \oplus \neg q, (p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$. Các bạn cần cẩn thận hơn và nên xem lại phần lôgic.
  - Một số bạn thay vì lập bảng chân trị thì xét từng trường hợp của p và q. Điều này tương đương với lập bảng chân trị.
  - Một số bạn viết $p + q$ thay vì $p \oplus q$. Chú ý rằng $p + q$ thực ra là cách viết khác của $p \vee q$ và nó hoàn toàn khác với $p \oplus q$.
  - Một số bạn sử dụng 1 thay vì F và 0 thay vì T. Tất nhiên các bạn có thể sử dụng định nghĩa như vậy, nhưng mình vẫn đề nghị bạn dùng 1 thay vì T và 0 thay vì F.
- Với bài số 2,
  - Một lời giải đúng của bài 2 từ bạn Hoàng Vũ Đức (K67A5) là như sau: Giả sử $P(x) :=$ "x là số chẵn" và $Q(x) :=$ "x là số lẻ", với $x \in \mathbb{Z}$. Ta có $(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))$ (tồn tại x sao cho x chẵn và tồn tại x sao cho x lẻ) đúng và $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ (tồn tại x sao cho x vừa chẵn vừa lẻ) sai.
  - Một lời giải đúng của bài 2 từ các bạn Nguyễn Trí Hiếu và Trương Quốc Anh (K67A3) là như sau: Giả sử $P(x) :=$ "x là số dương" và $Q(x) :=$ "x là số không dương", với $x \in \mathbb{Z}$ (hoặc $x \in \mathbb{N}$). Ta có $(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))$ (tồn tại x sao cho x là số dương và tồn tại x sao cho x là số không dương) đúng và $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ (tồn tại x sao cho x vừa là số dương vừa là số không dương) sai.
  - Một lời giải đúng của bài 2 từ bạn Nguyễn Hải Đăng (K67A3) là như sau: Giả sử $P(x) :=$ "x chia hết cho 2" và $Q(x) :=$ "x không chia hết cho 2" với $x \in \mathbb{Z}$. Ta có $(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))$ (tồn tại x sao cho x chia hết cho 2 và tồn tại x sao cho x không chia hết cho 2) đúng và $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ (tồn tại x sao cho x vừa chia hết cho 2 vừa không chia hết cho 2) sai.
  - Một lời giải đúng của bài 2 từ bạn Nguyễn Hoàng Phong (K67A3?) là như sau: Giả sử $P(x) :=$ "$x + 1 \neq 2$" và $Q(x) :=$ "$x + 1 = 2$" với $x \in \mathbb{Z}$. Ta có $(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))$ (tồn tại x sao cho $x + 1 \neq 2$ và tồn tại x sao cho $x + 1 = 2$) đúng và $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ (tồn tại x đồng thời thỏa mãn $x + 1 \neq 2$ và $x + 1 = 2$) sai.
  - Một lời giải đúng của bài 2 từ bạn Đinh Thị Minh Hằng (K67A3) là như sau: Giả sử $P(x) :=$ "x là số tự nhiên chia hết cho 3" và $Q(x) :=$ "x là số tự nhiên không chia hết cho 3". Ta có $(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))$ (tồn tại x sao cho x chia hết cho 3 và tồn tại x sao cho x không chia hết cho 3) đúng và $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ (tồn tại x sao cho x vừa chia hết cho 3 vừa không chia hết cho 3) sai.
  - Một số bạn lấy ví dụ $P(x) :=$ "x chia hết cho 2" và $Q(x) :=$ "x chia hết cho 3". Trong trường hợp này $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ (tồn tại x sao cho x vừa chia hết cho 2 vừa chia hết cho 3) luôn đúng, và $(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))$ (tồn tại x sao cho x chia hết cho 2 và tồn tại x sao cho x chia hết cho

3) cũng luôn đúng. Do đó đây không phải là một phản ví dụ để chứng minh hai mệnh đề không tương đương lôgic.

- Một số bạn viết "...$\exists x$ sao cho $x \in P(x)$...". Chú ý là $P(x)$ là vị từ, không phải là tập hợp. Các bạn xem lại phần lôgic vị từ.
- Một số bạn có ý tưởng viết $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) = (P(x_1) \wedge Q(x_1)) \vee (P(x_2) \wedge Q(x_2)) \vee \cdots \vee (P(x_n) \wedge Q(x_n))$. Chú ý rằng điều này chỉ thực hiện được khi ta có thể liệt kê toàn bộ các phần tử của $\mathcal{D}$: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- Một số bạn viết
$$\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \neg(\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)))$$
Biểu thức này không chính xác. $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ và $\neg(\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)))$ không tương đương lôgic. Ví dụ nếu chọn $P(x) :=$ "x chẵn" và $Q(x) :=$ "x lẻ" với $x \in \mathbb{Z}$ thì vế trái luôn sai và vế phải luôn đúng. Các bạn nên xem lại phần phủ định của mệnh đề lôgic với lượng từ và vị từ.
- Một số bạn chứng minh $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ và $(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))$ không tương đương lôgic bằng cách giả sử $(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))$ đúng và chứng minh $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ sai. Ý tưởng của các bạn là khi $(\exists x\, P(x)) \wedge (\exists x\, Q(x))$ đúng ta có thể chọn $a \in \mathcal{D}$ sao cho $P(a)$ đúng và chọn $b \in \mathcal{D}$ sao cho $Q(b)$ đúng nhưng $Q(a)$ sai, từ đó dẫn tới $P(a) \wedge Q(a)$ sai, và suy ra là $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ sai.

  Ở đây các bạn nhầm lẫn giữa "với mọi" và "tồn tại". Đồng thời các bạn cần xem lại phần phủ định của mệnh đề có lượng từ và vị từ. Chú ý rằng $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ đúng nghĩa là tồn tại $a \in \mathcal{D}$ sao cho $P(a) \wedge Q(a)$ đúng. Do đó, $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ sai nghĩa là $\neg(\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)))$ đúng, nghĩa là $\forall x\, \neg(P(x) \wedge Q(x))$ đúng, nghĩa là với mọi $a \in \mathcal{D}$ ta có $P(a) \wedge Q(a)$ sai.

• Với bài số 3,

- Một số bạn chứng minh bằng cách dùng giản đồ Venn. Tuy nhiên, có nhiều bạn không vẽ phần hình chữ nhật bao quanh thể hiện cho tập vũ trụ U. Các bạn xem lại phần biểu diễn tập hợp với giản đồ Venn. Một chú ý nữa là các bạn cần vẽ giản đồ cho $A \Delta B$, $A \cap B$, $A \cup B$, và $(A \cup B) - (A \cap B)$.
- Một số bạn vẽ hình (một phần của giản đồ Venn) và đặt tên các vùng $A - B$, $A \cap B$, và $B - A$ lần lượt là $(1), (2), (3)$ sau đó lý luận $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (1) + (3)$. Trên thực tế, phương pháp này tương đương với việc các bạn vẽ giản đồ Venn. Có một số lưu ý như sau:
  * $(1), (2), (3)$ ở đây là các tập hợp, nên viết $(1) \cup (3)$ thay vì $(1) + (3)$.
  * Nên vẽ hình chữ nhật bao quanh để biểu diễn tập vũ trụ U.
- Một số bạn viết "Giả sử $A \cap B = \{\emptyset\}$..." Chú ý rằng $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. $\emptyset$ là tập rỗng—không chứa bất kỳ phần tử nào, còn $\{\emptyset\}$ là tập chứa một phần tử—tập hợp rỗng.
- Một số bạn nhầm lẫn giữa bảng chân trị cho các mệnh đề lôgic và bảng tính thuộc cho các tập hợp. Đây là hai loại bảng khác nhau.
- Một số bạn viết
$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{x \mid [(x \in A) \wedge (x \notin B)] \vee [(x \notin A) \wedge (x \in B)]\}$$
Tại sao các bạn trực tiếp có biểu thức này? Các bạn áp dụng định nghĩa hay công thức nào ở đây? Chú ý rằng theo định nghĩa thì vế phải chính là tập $(A - B) \cup (B - A)$, và mình không thấy rằng có thể trực tiếp suy ra nó bằng $(A \cup B) - (A \cap B)$. Mặc dù điều này là đúng, nhưng nó không hiển nhiên, và các bạn cần chứng minh. Chú ý rằng theo định nghĩa thì $(A \cup B) - (A \cap B) = \{x \mid (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$.
- Một số bạn viết
$$(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$$
và không giải thích gì thêm. Ở đây $(A \cap B)'$ là gì? Chú ý rằng khi bạn sử dụng ký hiệu mới, bạn cần định nghĩa cụ thể.