ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI
KHOA TOÁN-CƠ-TIN
(Đề gồm 2 câu/1 trang)

ĐỀ KIỂM TRA THƯỜNG XUYÊN 3
Môn: Toán rời rạc (MAT3500 2, 2022-2023)
Thời gian: 30 phút

- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.

Họ và Tên: ______________________________

Mã Sinh Viên: ____________________ Lớp: ____________________

Câu:	1	2	Tổng
Điểm tối đa:	5	5	10
Điểm:			

1. (5 điểm) Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn điều kiện $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $x_1 \leq 3$?

Lời giải: Ta đếm số nghiệm nguyên của phương trình thỏa mãn $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và số nghiệm nguyên của phương trình thỏa mãn $x_1 \geq 4$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{2, 3, 4, 5\}$. Hiệu của hai số này cho ta số nghiệm nguyên của phương trình thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 3$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{2, 3, 4, 5\}$.

- Phương trình có $\binom{5+21-1}{5-1} = 12650$ nghiệm nguyên thỏa mãn $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Đặt $x_1' = x_1 - 4$. Số nghiệm nguyên của phương trình thỏa mãn $x_1 \geq 4$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ bằng với số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21 - 4 = 17$ và do đó bằng $\binom{5+17-1}{5-1} = 5985$.
- Do đó, số nghiệm nguyên của phương trình thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 3$ và $x_i \geq 0$ với mọi $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ là $12650 - 5985 = 6665$.

2. (5 điểm) Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị với n đỉnh và m cạnh. Gọi $\Delta(G)$ và $\delta(G)$ lần lượt là bậc lớn nhất và nhỏ nhất của một đỉnh của G. Chứng minh rằng $\delta(G) \leq 2m/n \leq \Delta(G)$.

Lời giải: Theo định nghĩa, với mọi $v \in V$, ta có $\delta(G) \leq \deg(v) \leq \Delta(G)$. Do đó,

$$\delta(G) \cdot n \leq \sum_{v \in V} \deg(v) \leq \Delta(G) \cdot n.$$

Định lý bắt tay cho ta $\sum_{v\in V}\deg(v) = 2m$, và do đó

$$\delta(G)\cdot n \le 2m \le \Delta(G)\cdot n.$$

Nghĩa là

$$\delta(G) \le 2m/n \le \Delta(G).$$