ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI
KHOA TOÁN-CƠ-TIN
(Đề gồm 4 câu/4 trang)

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ
Môn: Toán rời rạc (MAT3500 3, 2022-2023)
Thời gian: 50 phút

- Điền các thông tin về Họ Tên, Mã Sinh Viên, Lớp trước khi bắt đầu làm bài.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.
- Điểm bài kiểm tra này chiếm 20% tổng số điểm của môn học. Tổng điểm nhỏ hơn hoặc bằng 10 thì giữ nguyên, còn ngược lại thì tính là 10 điểm.

Họ và Tên: ______________________________

Mã Sinh Viên: ____________________ Lớp: ____________________

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	3	3	3	3	12
Điểm:					

1. Cho mệnh đề $(p \oplus q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$ với p, q là các mệnh đề lôgic.
   (a) (1 điểm) Lập bảng chân trị cho mệnh đề trên.
   (b) (2 điểm) Hãy xây dựng một mệnh đề lôgic phức hợp tương đương với mệnh đề đã cho trong đó chỉ sử dụng các toán tử $\neg, \wedge, \vee$.

Lời giải:

(a) Bảng chân trị cho mệnh đề $(p \oplus q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$.

p	q	$\neg p$	$p \oplus q$	$\neg p \leftrightarrow q$	$(p \oplus q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$
T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	F

(b) Từ các hàng có giá trị T trong bảng chân trị của $(p \oplus q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$, ta xây dựng một dạng tuyển chuẩn tắc tương đương lôgic với nó.

- Ta xây dựng mệnh đề A_1 thỏa mãn $A_1 = \mathsf{T}$ khi và chỉ khi $p = \mathsf{T}$ và $q = \mathsf{F}$. Một mệnh đề như vậy có thể là $A_1 = p \wedge \neg q$.
- Ta xây dựng mệnh đề A_2 thỏa mãn $A_2 = \mathsf{T}$ khi và chỉ khi $p = \mathsf{F}$ và $q = \mathsf{T}$. Một mệnh đề như vậy có thể là $A_2 = \neg p \wedge q$.

- Theo bảng chân trị trên, $(p \oplus q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$ có giá trị đúng khi và chỉ khi A_1 đúng hoặc A_2 đúng. Do đó, mệnh đề $A = A_1 \vee A_2 = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ là một mệnh đề tương đương lôgic với $(p \oplus q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$. A chỉ sử dụng các toán tử $\neg, \wedge, \vee$ và do đó là một mệnh đề cần tìm.

2. (3 điểm) Cho S là tập được định nghĩa theo đệ quy như sau:

- $5 \in S$
- Nếu $x \in S$ thì $x + 5 \in S$

Gọi $5\mathbb{Z}^+ = \{n \mid n \in \mathbb{Z}^+$ và n chia hết cho $5\}$. Chứng minh rằng $S = 5\mathbb{Z}^+$.

Lời giải: Ta chứng minh (a) $5\mathbb{Z}^+ \subseteq S$ và (b) $S \subseteq 5\mathbb{Z}^+$.

(a) Ta chứng minh rằng với mọi $n \in 5\mathbb{Z}^+$, $n \in S$ bằng cách chứng minh phát biểu $P(m)$ sau

$$5m \in S$$

đúng với mọi $m \in \mathbb{Z}^+$.

- **Bước cơ sở:** $P(1)$ đúng vì theo định nghĩa của S, ta có $5 \in S$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 1$ nào đó, nghĩa là $5k \in S$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là $5(k+1) \in S$. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp $5k \in S$, và do đó theo định nghĩa của S ta cũng có $5k + 5 = 5(k+1) \in S$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều cần chứng minh.

(b) Ta chứng minh phát biểu $P(x)$ sau

$$x \in 5\mathbb{Z}^+$$

đúng với mọi $x \in S$ bằng quy nạp theo cấu trúc.

- **Bước cơ sở:** $5 = 5 \cdot 1 \in 5\mathbb{Z}^+$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(x)$ đúng với $x \in S$ nào đó, nghĩa là $x \in 5\mathbb{Z}^+$. Ta chứng minh $P(x+5)$ đúng. Thật vây, theo giả thiết quy nạp, $x = 5a$ với $a \in \mathbb{Z}^+$, và do đó $x + 5 = 5(a+1) \in 5\mathbb{Z}^+$.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có điều cần chứng minh.

3. (3 điểm) Tìm các ví dụ của hàm $f(n)$ thỏa mãn các điều kiện (a) – (d) tương ứng. Cụ thể, ở (a),

	$f(n)$ là $O(n^3)$	$f(n)$ không là $O(n^3)$
$f(n)$ là $\Omega(n^3)$	(a)	(b)
$f(n)$ không là $\Omega(n^3)$	(c)	(d)

bạn cần tìm ví dụ về một hàm $f(n)$ đồng thời là $O(n^3)$ và $\Omega(n^3)$ và chứng minh ví dụ bạn tìm ra là đúng. Tương tự cho các phần (b), (c), và (d).

Lời giải:

	$f(n)$ là $O(n^3)$	$f(n)$ không là $O(n^3)$
$f(n)$ là $\Omega(n^3)$	$f(n) = n^3$	$f(n) = n^4$
$f(n)$ không là $\Omega(n^3)$	$f(n) = n^2$	$f(n) = n^{3+(-1)^n} = \begin{cases} n^2 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ n^4 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$

Các ví dụ cho các phần (a), (b), (c) khá dễ và các bạn có thể tự kiểm tra lại. Ta chứng minh ví dụ cho phần (d): hàm $f(n)$ định nghĩa bởi

$$f(n) = n^{3+(-1)^n} = \begin{cases} n^2 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ n^4 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

là một hàm vừa không là $O(n^3)$ vừa không là $\Omega(n^3)$. Nhắc lại rằng $f(n)$ không là $O(n^3)$ nếu với mọi hằng số C, k, tồn tại số nguyên $n_{C,k} > k$ sao cho $|f(n_{C,k})| > C|n_{C,k}^3|$. Để chứng minh $f(n)$ không là $O(n^3)$, ta chọn $n_{C,k} = 2 \cdot (|C| + |k| + 1) > k$ và theo định nghĩa

$$\begin{aligned} |f(n_{C,k})| &= |n_{C,k}^4| \\ &= |n_{C,k}| \cdot |n_{C,k}^3| \\ &= 2 \cdot (|C| + |k| + 1) \cdot |n_{C,k}^3| \\ &> C|n_{C,k}^3|. \end{aligned}$$

Nhắc lại rằng $f(n)$ không là $\Omega(n^3)$ nếu với mọi hằng số $C > 0, k$, tồn tại số nguyên $n_{C,k} > k$ sao cho $|f(n_{C,k})| < C|n_{C,k}^3|$. Để chứng minh $f(n)$ không là $\Omega(n^3)$, ta chọn $n_{C,k} = 2(|k| + \lceil 1/C \rceil) + 1 > k$ và theo định nghĩa

$$\begin{aligned} |f(n_{C,k})| &= |n_{C,k}^2| \\ &< C \cdot (2(|k| + \lceil 1/C \rceil) + 1) \cdot |n_{C,k}^2| \\ &= C|n_{C,k}^3|. \end{aligned}$$

4. Tìm công thức tường minh cho các tổng sau:
   (a) (1 điểm) $s(n) = \sum_{k=1}^{n} 5^k$
   (b) (2 điểm) $t(n) = \sum_{k=1}^{n} k5^k$

Lời giải:

(a) Ta có

$$\begin{aligned} s(n) &= 5^1 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1} + 5^n \\ 5s(n) &= \qquad 5^2 + \cdots + 5^{n-1} + 5^n + 5^{n+1} \end{aligned}$$

Và do đó $5s(n) - s(n) = 5^{n+1} - 5$, suy ra $s(n) = \dfrac{5^{n+1}-5}{4}$.

(b)
- **Cách 1:**

$$\begin{aligned} t(n) &= 5 + 2\cdot 5^2 + \cdots + n\cdot 5^n \\ 5t(n) &= \qquad 5^2 + \cdots + (n-1)\cdot 5^n + n\cdot 5^{n+1} \end{aligned}$$

Và do đó

$$\begin{aligned} t(n) - 5t(n) &= 5 + 5^2 + \cdots + 5^n - n\cdot 5^{n+1} \\ &= \frac{5^{n+1}-5}{4} - n\cdot 5^{n+1} \end{aligned}$$

Suy ra $4t(n) = n\cdot 5^{n+1} - \dfrac{5^{n+1}-5}{4}$, và do đó

$$t(n) = \frac{(4n-1)\cdot 5^{n+1}+5}{16}.$$

- **Cách 2:** Để tìm công thức tổng quát của $t(n)$, ta giải hệ thức truy hồi

$$t(n) = t(n-1) + n\cdot 5^n \quad (n \geq 1)$$

với điều kiện ban đầu $t(1) = 5$.
  - **Tìm nghiệm $t^{(h)}(n)$ của hệ thức thuần nhất $t(n) = t(n-1)$.** Đa thức đặc trưng của hệ thức này là $r - 1 = 0$. Do đó

$$t^{(h)}(n) = \alpha \cdot 1^n$$

  với hằng số α nào đó.
  - **Tìm nghiệm riêng $t^{(p)}(n)$ của hệ thức truy hồi ban đầu.** Chú ý rằng hệ thức có dạng $t(n) = t(n-1) + F(n)$ với $F(n) = (1\cdot n + 0)\cdot 5^n$ và do đó một nghiệm riêng $t^{(p)}(n)$ của hệ thức có dạng $t^{(p)}(n) = (p_1 n + p_0)\cdot 5^n$ với các hằng số p_0, p_1 nào đó. Thay nghiệm này vào hệ thức truy hồi, ta có

$$(p_1 n + p_0)\cdot 5^n = (p_1(n-1) + p_0)\cdot 5^{n-1} + n\cdot 5^n$$

  Suy ra $(4p_1 - 5)n + (4p_2 + p_1) = 0$ và do đó $4p_1 - 5 = 0$ và $4p_2 + p_1 = 0$, suy ra $p_1 = 5/4$ và $p_2 = -5/16$. Tóm lại,

$$t^{(p)}(n) = \left(\frac{5}{4}n - \frac{5}{16}\right)\cdot 5^n = \frac{5(4n-1)}{16}\cdot 5^n = \frac{(4n-1)5^{n+1}}{16}.$$

– Nghiệm $t(n)$ của hệ thức đã cho có dạng

$$t(n) = t^{(p)}(n) + t^{(h)}(n) = \frac{(4n-1)5^{n+1}}{16} + \alpha \cdot 1^n.$$

Từ điều kiện ban đầu $t(1) = 5$, ta có

$$t(1) = \frac{(4 \cdot 1 - 1)5^{1+1}}{16} + \alpha \cdot 1^1 = \frac{15 \cdot 5 - 16\alpha}{16} = 5.$$

Suy ra $\alpha = 5/16$. Tóm lại,

$$t(n) = \frac{(4n-1)5^{n+1}}{16} + \frac{5}{16} \cdot 1^n = \frac{(4n-1)5^{n+1} + 5}{16}.$$