

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Thuật toán I

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Bài tập 1. Thiết kế thuật toán để tính tổng của tất cả các số hạng trong một dãy số nguyên a_1, a_2, \dots, a_n cho trước. Chứng minh thuật toán bạn thiết kế là đúng.

Bài tập 2. Cho trước một dãy không giảm các số nguyên $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$. Hãy thiết kế một thuật toán để tìm các số xuất hiện nhiều hơn một lần trong dãy.

Bài tập 3. Một chuỗi ký tự được gọi là *chuỗi đối xứng (palindrome)* khi viết từ trái qua phải và viết từ phải qua trái thì chuỗi không thay đổi. Một ví dụ là chuỗi **madam**. Hãy thiết kế thuật toán để kiểm tra xem một chuỗi ký tự có phải là chuỗi đối xứng hay không.

Bài tập 4. Hãy thiết kế một thuật toán để hoán đổi các giá trị của các biến x và y chỉ sử dụng các phép gán giá trị.

Bài tập 5. Cho $f : A \rightarrow B$ là một hàm với các tập A, B là các tập con hữu hạn của \mathbb{Z} . Hãy thiết kế một thuật toán để kiểm tra xem

- (a) liệu f có là đơn ánh;
- (b) liệu f có là toàn ánh.

Bài tập 6. Sử dụng sắp xếp nổi bọt để sắp xếp các phần tử trong dãy 6, 2, 3, 1, 5, 4. Hãy viết cụ thể các dãy nhận được ở từng bước của thuật toán. Làm tương tự với sắp xếp chèn.

Bài tập 7. Một thuật toán tính x^n với $x \in \mathbb{R}^+$ và $n \in \mathbb{N}$ được mô tả như sau

Thuật toán 1: Tính x^n .

Input: x : số thực dương, n : số tự nhiên

Output: Giá trị của x^n

```
1 answer := 1
2 while n > 0 do
3   | answer := answer × x
4   | n := n - 1
5 return answer
```

Hãy chứng minh phát biểu sau là một bất biến vòng lặp cho vòng **while**

Ở trước lần lặp thứ i ($i \geq 1$), $answer = x^{i-1}$.

(Chú ý là “lần lặp thứ i ” khác với “lần lặp i ”. Khi ta nói “lần lặp i ”, ta chỉ lần lặp của vòng **while** mà giá trị của n bằng i . Khi ta nói “lần lặp thứ i ”, ta chỉ thứ tự thực hiện của lần lặp đó trong vòng **while**.)

Bài tập 8. Chứng minh rằng

- (1) x^3 là $O(x^4)$ nhưng x^4 không là $O(x^3)$.
- (2) $3x^4 + 1$ là $O(x^4/2)$ và $x^4/2$ là $O(3x^4 + 1)$.
- (3) $x \log x$ là $O(x^2)$ nhưng x^2 không là $O(x \log x)$.
- (4) 2^n là $O(3^n)$ nhưng 3^n không là $O(2^n)$.

Bài tập 9. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là $O(x)$ thì $f(x)$ cũng là $O(x^2)$.

Bài tập 10. Hãy giải thích một hàm $f(x)$ là $O(1)$ nghĩa là gì. Tương tự với $\Omega(1)$ và $\Theta(1)$.

Bài tập 11. Chứng minh rằng với các hàm f, g từ \mathbb{R} đến \mathbb{R} , f là $\Theta(g)$ khi và chỉ khi tồn tại các hằng số dương C_1, C_2 , và k sao cho $C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$ với mọi $x > k$.