VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Bài tập Thuật toán II

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Bài tập 1. Sắp xếp dãy sau bằng cách sử dụng sắp xếp trộn $4, 7, 0, 3, 8, 9, 1$

Bài tập 2. Đánh giá thời gian chạy của các thuật toán đệ quy mô tả trong bài giảng (tính giai thừa, lũy thừa, tìm kiếm tuyến tính, tìm kiếm nhị phân, sắp xếp trộn)

Bài tập 3. Giải các hệ thức truy hồi với điều kiện ban đầu sau

(a) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$

(b) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ $(n \geq 3)$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$

(c) $a_n = -5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 42 \cdot 4^n$ $(n \geq 3)$, $a_1 = 56$, $a_2 = 278$

Bài tập 4. Sử dụng hàm sinh để giải các hệ thức truy hồi sau

(a) $a_n = 7a_{n-1}$ $(n \geq 1)$ với $a_0 = 5$

(b) $a_k = 5a_{k-1} - 6a_{k-2}$ $(k \geq 2)$, $a_0 = 6$, $a_1 = 30$

Bài tập 5. Ước lượng các hệ thức truy hồi sau theo O-lớn, giả sử $T(1) = 1$

(a) $T(n) = 4T(n/3) + n^2$

(b) $T(n) = 4T(n/2) + n^2$

(c) $T(n) = 3T(n/3) + n$

(d) $T(n) = 3T(n/3) + 1$

Bài tập 6. Sử dụng cây đệ quy để ước lượng $T(n)$ cho bởi các hệ thức truy hồi sau

(a) $T(n) = 2T(n/2) + n^2$

(b) $T(n) = T(n/2) + 1$

(c) $T(n) = 2T(n-1) + 1$

Bài tập 7. Hệ thức $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$ không thỏa mãn các điều kiện của Định lý thợ nên ta không thể ước lượng nó thông qua Định lý. Tuy nhiên, ta vẫn có thể sử dụng cây đệ quy để ước lượng $T(n)$ trong trường hợp này. Hãy sử dụng cây đệ quy để chỉ ra $T(n) = O(n \log^2 n)$

Bài tập 8. Ta có thể chứng minh Định lý thợ bằng cách sử dụng cây đệ quy

(a) Vẽ cây đệ quy cho $T(n) = aT(n/b) + cn^d$ trong đó $n = b^k$ với k là số nguyên dương nào đó, $a \geq 1$, b là số nguyên dương lớn hơn 1, và c, d là các số thực với c dương và d không âm

(b) Tính tổng từng hàng và viết công thức của $T(n)$ dưới dạng tổng của các hàng trong cây.

(c) Xét các trường hợp $a < b^d$, $a = b^d$, và $a > b^d$

Bài tập 9. Một *cây van Emde Boas (van Emde Boas tree)* là một cấu trúc dữ liệu đệ quy cho phép chúng ta chèn, xóa, và tìm kiếm phần tử x nào đó trong một tập vũ trụ $U = \{1, 2, \ldots, u\}$ một cách nhanh chóng. Thời gian chèn, xóa, tìm kiếm trong một cây van Emde Boas được cho bởi hệ thức truy hồi $T(u) = T(\sqrt{u}) + 1$ và $T(1) = 1$. Hãy ước lượng $T(u)$. (**Gợi ý:** Định nghĩa $R(k) = T(2^k)$. Giải cho $R(k)$ có vẻ dễ dàng hơn!)