

# VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

## Bài tập Các cấu trúc cơ bản II

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội  
hoanganhduc@hus.edu.vn

**Bài tập 1.** Trong mỗi trường hợp sau, tìm các số hạng  $a_0, a_1, \dots, a_5$  của dãy  $\{a_n\}$  nếu

(a)  $a_n = 2^{n-1}$

(d)  $a_n = 7$

(b)  $a_n = 1 + (-1)^n$

(e)  $a_n = -(-2)^n$

(c)  $a_n = (n+1)^{n+1}$

(f)  $a_n = \lfloor n/2 \rfloor$

**Bài tập 2.** Dãy  $\{a_n\}$  có phải là lời giải của hệ thức truy hồi  $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$  nếu

(a)  $a_n = 0$ ?

(e)  $a_n = n4^n$ ?

(b)  $a_n = 1$ ?

(f)  $a_n = 2 \cdot 4^n + 3n4^n$ ?

(c)  $a_n = 2^n$ ?

(g)  $a_n = (-4)^n$ ?

(d)  $a_n = 4^n$ ?

(h)  $a_n = n^2 4^n$ ?

**Bài tập 3.** Tìm lời giải cho mỗi hệ thức truy hồi sau với các điều kiện ban đầu tương ứng cho trước bằng phương pháp đã trình bày trong bài giảng.

(a)  $a_n = -a_{n-1}, a_0 = 5$

(e)  $a_n = (n+1)a_{n-1}, a_0 = 2$

(b)  $a_n = a_{n-1} + 3, a_0 = 1$

(f)  $a_n = 2na_{n-1}, a_0 = 3$

(c)  $a_n = a_{n-1} - n, a_0 = 4$

(g)  $a_n = -a_{n-1} + n - 1, a_0 = 7$

(d)  $a_n = 2a_{n-1} - 3, a_0 = -1$

**Bài tập 4.** Cho  $a_n = 2^n + 5 \cdot 3^n$  với  $n = 0, 1, 2, \dots$

(a) Tìm  $a_0, a_1, a_2, a_3$ , và  $a_4$ .

(b) Hãy chứng minh  $a_2 = 5a_1 - 6a_0$ ,  $a_3 = 5a_2 - 6a_1$ , và  $a_4 = 5a_3 - 6a_2$ .

(c) Hãy chỉ ra rằng  $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$  với mọi số nguyên  $n \geq 2$ .

**Bài tập 5.** Giả thiết dân số thế giới năm 2017 là 7.6 tỷ người và tăng theo tỷ lệ 1.12%/năm.

(a) Xây dựng hệ thức truy hồi cho dân số thế giới  $n$  năm sau 2017.

(b) Tìm công thức tường minh để tính dân số thế giới  $n$  năm sau 2017.

(c) Dân số thế giới năm 2050 sẽ là bao nhiêu?

**Bài tập 6.** Một người nộp 1000 USD vào một tài khoản tiết kiệm với lãi suất 9%/năm và mỗi năm tiền lãi được chuyển vào tài khoản vào ngày cuối cùng của năm. Giả thiết rằng chỉ có thể rút tiền khi đóng tài khoản.

(a) Xây dựng hệ thức truy hồi để tính số tiền trong tài khoản sau  $n$  năm.

(b) Tìm công thức tường minh để tính số tiền trong tài khoản sau  $n$  năm.

(c) Sau 100 năm, trong tài khoản có bao nhiêu tiền?

**Bài tập 7.** Với mỗi dãy số nguyên sau, hãy tìm một công thức đơn giản hoặc một cách để tìm các số hạng tiếp theo của dãy. Giả sử công thức bạn tìm ra là đúng, hãy tìm ba số hạng tiếp theo của dãy

- (a) 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, ...                      (e) 15, 8, 1, -6, -13, -20, -27, ...  
(b) 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, ...                      (f) 3, 5, 8, 12, 17, 23, 30, 38, 47, ...  
(c) 1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, ...                      (g) 2, 16, 54, 128, 250, 432, 686, ...  
(d) 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, ...                      (h) 2, 3, 7, 25, 121, 721, 5041, 40321, ...

**Bài tập 8.** Tính các tổng sau

- (a)  $\sum_{k=100}^{200} k$   
(b)  $\sum_{k=99}^{200} k^3$   
(c)  $\sum_{k=10}^{20} k^2(k-3)$

**Bài tập 9.** (a) Chứng minh rằng  $\sum_{j=1}^n (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$ , trong đó  $a_0, a_1, \dots, a_n$  là một dãy gồm các số thực.

(b) Sử dụng đẳng thức  $1/(k(k+1)) = 1/k - 1/(k+1)$  và phần (a) để tính  $\sum_{k=1}^n 1/(k(k+1))$ .

**Bài tập 10.** Lấy tổng cả hai vế của đẳng thức  $k^2 - (k-1)^2 = 2k-1$  từ  $k=1$  đến  $k=n$  và sử dụng Bài tập 9(a) để tìm một công thức tường minh cho  $\sum_{k=1}^n (2k-1)$  (tổng  $n$  số tự nhiên lẻ đầu tiên).