

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Lời giải Bài tập 6 trong Bài tập Các phương pháp đếm I

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Đề bài: Chứng minh rằng trong một nhóm 10 người có ba người đôi một quen biết nhau hoặc bốn người đôi một không quen biết nhau, và có ba người đôi một không quen biết nhau hoặc bốn người đôi một quen biết nhau.

Lời giải: Trước tiên, ta chứng minh trong một nhóm 10 người có ba người đôi một quen biết nhau hoặc bốn người đôi một không quen biết nhau.

Một nhận xét quan trọng là nếu A là một người trong nhóm thì có ít nhất 4 người quen biết A hoặc 6 người không quen biết A . Để thấy điều này, ta xét hai trường hợp sau:

- (a) **Có ít nhất 4 người quen biết A .** Nhận xét trên là đúng.
- (b) **Có tối đa 3 người quen biết A .** Do đó, có ít nhất $9 - 3 = 6$ người không quen biết A . Nhận xét trên là đúng.

Giả sử có ít nhất 4 người quen biết A , lần lượt là A_1, A_2, A_3, A_4 . Nếu tồn tại $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ sao cho A_i quen biết A_j thì A, A_i, A_j là ba người đôi một quen biết nhau. Nếu không tồn tại cặp i, j nào như trên, ta có A_1, A_2, A_3, A_4 là bốn người đôi một không quen biết nhau.

Giả sử có ít nhất 6 người không quen biết A , lần lượt là $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Ta đã chứng minh được rằng trong một nhóm 6 người bất kỳ, có 3 người đôi một quen biết nhau hoặc 3 người đôi một không quen biết nhau. Nếu tồn tại $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sao cho A_i, A_j, A_k đôi một quen biết nhau thì ta có điều phải chứng minh. Nếu tồn tại $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sao cho A_i, A_j, A_k đôi một không quen biết nhau thì A, A_i, A_j, A_k là bốn người đôi một không quen biết nhau.

Để chứng minh trong một nhóm 10 người có ba người đôi một không quen biết nhau hoặc bốn người đôi một quen biết nhau, ta làm hoàn toàn tương tự như trên, với nhận xét quan trọng sau: nếu A là một người trong nhóm thì có ít nhất 4 người không quen biết A hoặc 6 người quen biết A .