VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Các cấu trúc cơ bản II
Dãy và Tổng

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

Dãy

- Định nghĩa dãy và một số khái niệm
- Một số dãy đặc biệt

Tổng

- Ký hiệu tổng và một số khái niệm
- Một số công thức tổng hữu ích

- Một *dãy (sequence)* $\{a_n\}$ được xác định qua một hàm $f : I \to A$ trong đó $I \subseteq \mathbb{Z}$ và A là tập bất kỳ
  - Thông thường, $I = \mathbb{N}$ hoặc $I = \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} - \{0\}$
  - Ví dụ, dãy $\{a_n\}$ xác định bởi $f(n) = n^2$ với mọi số nguyên $n \geq 0$ có các phần tử $0, 1, 4, 9, 16, \dots$
- Với $n \in I$, ta *sử dụng a_n để chỉ ảnh của n*, nghĩa là $a_n = f(n)$.
  - a_n là một *số hạng (term)* của dãy $\{a_n\}$
  - n là *chỉ số (index)* của a_n (thông thường, ta sử dụng i thay vì n)
- Đôi khi, thay vì ký hiệu $\{a_n\}$, có thể viết *"dãy $a_1, a_2, \dots$"* để chắc chắn rằng tập các chỉ số I được xác định rõ ràng
- Có thể mô tả một dãy bằng cách liệt kê một vài phần tử đầu tiên hoặc cuối cùng của dãy và sử dụng "$\dots$" cho phần còn lại
  - Ví dụ, có thể mô tả dãy $\{a_n\}$ ở trên bằng cách viết $\{a_n\} = 0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots$

- Một *cấp số nhân (geometric progression)* là một dãy có dạng

$$a, ar, ar^2, \dots, ar^n, \dots$$

  trong đó *số hạng đầu tiên (initial term)* a và *công bội (common ratio)* r là các số thực
- Ví dụ, với $n = 0, 1, 2, \dots$
  - $\{b_n\}$ với $b_n = (-1)^n$ số hạng đầu tiên 1, công bội -1
  - $\{c_n\}$ với $c_n = 6 \cdot (1/3)^n$ số hạng đầu tiên 6, công bội $1/3$
- Một *cấp số cộng (arithmetic progression)* là một dãy có dạng

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+nd, \dots$$

  trong đó *số hạng đầu tiên (initial term)* a và *công sai (common difference)* d là các số thực
- Ví dụ, với $n = 0, 1, 2, \dots$
  - $\{d_n\}$ với $d_n = -1 + 4n$ số hạng đầu tiên -1, công sai 4
  - $\{e_n\}$ với $e_n = 7 - 3n$ số hạng đầu tiên 7, công sai -3

- Một *hệ thức truy hồi (recurrence relation)* cho dãy $\{a_n\}$ là một phương trình biểu diễn a_n thông qua một hoặc nhiều số hạng trước đó của dãy với mọi số nguyên n thỏa mãn $n \geq n_0$ với n_0 là một số nguyên không âm.
  - Với dãy $\{a_n\} = 0, 1, 4, 9, 16 \dots$ $(n \geq 0)$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ *với* $n \geq 1$ là một hệ thức truy hồi cho $\{a_n\}$ (ở đây $n_0 = 1$)
- Để định nghĩa một dãy $\{a_n\}$ thông qua hệ thức truy hồi, ta cần thêm *các điều kiện ban đầu (initial conditions)* bằng cách *định nghĩa các phần tử trước* a_{n_0} trong dãy
  - Để định nghĩa $\{a_n\}$ qua hệ thức $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ $(n \geq 1)$, ta cần thêm *điều kiện ban đầu* $a_0 = 0$
- Một dãy được gọi là một *nghiệm (solution)* của một hệ thức truy hồi nếu các số hạng của dãy thỏa mãn hệ thức đó.
- *Giải hệ thức truy hồi với các điều kiện ban đầu* nghĩa là tìm một công thức tường minh cho các số hạng trong dãy
  - Một công thức tường minh cho dãy $\{a_n\}$ định nghĩa bởi $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ với $n \geq 1$ và điều kiện ban đầu $a_0 = 0$ là $a_n = n^2$ $(n \geq 0)$

Ví dụ 1

- Dãy $\{b_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi $b_n = -b_{n-1}$ với $n \geq 1$ và điều kiện ban đầu $b_0 = 1$
  - $\{b_n\} = 1, -1, 1, -1, \dots$
- Dãy $\{s_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi $s_n = s_{n-1} - s_{n-2}$ với $n \geq 2$ và điều kiện ban đầu $s_0 = 3$ và $s_1 = 5$
  - $\{s_n\} = 3, 5, 2, -3, -5, \dots$
- *Dãy Fibonacci (Fibonacci sequence)* $\{f_n\}$ $(n \geq 0)$ được định nghĩa bởi điều kiện ban đầu $f_0 = 0, f_1 = 1$ và hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ với mọi số nguyên $n \geq 2$
  - $\{f_n\} = 0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots$
- *Dãy giai thừa (factorial sequence)* $\{g_n\}$ được định nghĩa bởi điều kiện ban đầu $g_0 = 1$ và hệ thức truy hồi $g_n = ng_{n-1}$ với mọi số nguyên $n \geq 1$
  - $\{g_n\} = 1, 1, 2, 6, 24, \dots$

Ví dụ 2

Giải hệ thức truy hồi $d_n = d_{n-1} + 4$ $(n \geq 1)$ với điều kiện ban đầu $d_0 = -1$

Hướng suy luận

(1) Từ hệ thức truy hồi, ta cũng có $d_{n-1} = d_{n-2} + 4$

(2) Thay (2) vào hệ thức ban đầu
$d_n = (d_{n-2} + 4) + 4 = d_{n-2} + 2 \cdot 4$

(3) Từ hệ thức truy hồi, ta cũng có $d_{n-2} = d_{n-3} + 4$

(4) Thay (4) vào (3), ta thu được $d_n = d_{n-3} + 3 \cdot 4$

(5) Lặp lại quá trình trên, ta "đoán" $d_n = d_{n-r} + r \cdot 4$

(6) Để có một công thức tường minh cho d_n, ta cần $n - r = 0$, tức là $r = n$. Khi đó d_n được biểu diễn qua d_0 đã cho trước và $n = r$.

(7) Tóm lại, ta có $d_n = -1 + 4n$

Ví dụ 3

Giải hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ $(n \geq 1)$ với điều kiện ban đầu $a_0 = 0$

(1) Từ hệ thức truy hồi, ta có $a_{n-1} = a_{n-2} + 2(n-1) - 1$

(2) Thay vào hệ thức ban đầu,
$a_n = (a_{n-2} + 2(n-1) - 1) + 2n - 1 = a_{n-2} + 4n - 4$

(3) Từ hệ thức truy hồi, ta có $a_{n-2} = a_{n-3} + 2(n-2) - 1$

(4) Thay vào (2),
$a_n = (a_{n-3} + 2(n-2) - 1) + 4n - 4 = a_{n-3} + 6n - 9$

(5) Từ hệ thức truy hồi, ta có $a_{n-3} = a_{n-4} + 2(n-3) - 1$

(6) Thay vào (4),
$a_n = (a_{n-4} + 2(n-3) - 1) + 6n - 9 = a_{n-4} + 8n - 16$

(7) Lặp lại quá trình trên, ta "đoán" $a_n =$

(8) Để có một công thức tường minh cho a_n, ta cần $n - r = 0$, tức là $r = n$. Khi đó a_n được biểu diễn qua a_0 đã cho trước và $n = r$

(9) Tóm lại $a_n =$

- Cho trước một vài phần tử của dãy
- Yêu cầu tìm
  - một công thức tường minh của các số hạng
  - hoặc một phương thức để liệt kê các phần tử của dãy

Ví dụ 4

Số tiếp theo trong dãy có thể là bao nhiêu?

- $1, 2, 3, 4, \ldots$
- $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$
- $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$

Ví dụ 5

Các số hạng tiếp theo có thể là bao nhiêu?

- $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4$
- $0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55$

- Một phương pháp hữu ích để tìm công thức tổng quát cho các số hạng của một dãy là *so sánh các số hạng của dãy cần tìm với các số hạng của một dãy đã biết* (ví dụ như cấp số cộng, cấp số nhân, dãy số chính phương, v.v...)

Công thức	Mười số hạng đầu tiên
n^2	$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \dots$
n^3	$1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, \dots$
n^4	$1, 16, 81, 256, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000, \dots$
f_n	$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$
2^n	$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots$
3^n	$3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, \dots$
$n!$	$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, 3628800, \dots$

- Bảng Tra Cứu Dãy Số Nguyên Trực Tuyến (The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences - OEIS) `https://oeis.org/`

- Cho *dãy* $\{a_n\}$, một số nguyên *giới hạn dưới (lower limit)* m, và một số nguyên *giới hạn trên (upper limit)* $n \geq m$. *Tổng (summation)* của các số hạng $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ có thể được viết là

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

$$\sum_{j=m}^{n} a_j$$

$$\sum_{m \leq j \leq n} a_j$$

- Ở đây, j được gọi là *chỉ số lấy tổng (index of summation)* và được chọn hoàn toàn tùy ý

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

- Với tập chỉ số S bất kỳ, ta có thể viết

$$\sum_{j \in S} a_j$$

- Với $\{a_n\}$ là dãy vô hạn, ta có thể viết

$$\sum_{i=j}^{\infty} a_i = a_j + a_{j+1} + \dots$$

- Tổng các giá trị của một hàm trên tập $X = \{x_1, x_2, \dots\}$

$$\sum_{x \in X} f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \dots$$

- Nếu $X = \{x \mid P(x)\}$ với vị từ $P(x)$ nào đó

$$\sum_{P(x)} f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \dots$$

Ví dụ 6

$$\sum_{j=1}^{4} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^i = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots$$

$$\sum_{\substack{(0 \leq x \leq 10) \\ \wedge (x \text{ chẵn})}} x^2 = 0 + 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2$$

- *Tổng hằng số:* Với hằng số c bất kỳ,

$$\sum_{n=i}^{j} c = (j - i + 1) \cdot c$$

- *Phân phối:* Với hằng số c bất kỳ,

$$\sum_{n=i}^{j} cf(n) = c\sum_{n=i}^{j} f(n)$$

- *Giao hoán:*

$$\sum_{n=i}^{j}(f(n) + g(n)) = \sum_{n=i}^{j} f(n) + \sum_{n=i}^{j} g(n)$$

- *Đổi chỉ số:*

$$\sum_{i=j}^{m} f(i) = \sum_{k=j+n}^{m+n} f(k-n)$$

  - Ví dụ $\sum_{i=1}^{4} i^2 = \sum_{k=3}^{6} (k-2)^2$ (đặt $k = i + 2$)

- *Tách tổng:* Với $j \leq m < k$

$$\sum_{i=j}^{k} f(i) = \sum_{i=j}^{m} f(i) + \sum_{i=m+1}^{k} f(i)$$

- *Đảo thứ tự:*

$$\sum_{i=0}^{k} f(i) = \sum_{i=0}^{k} f(k-i)$$

- Với $\{a_n\}$ là cấp số nhân có số hạng đầu tiên a và công bội r, tổng của $n+1$ số hạng đầu tiên của dãy là

$$S = \sum_{i=0}^{n} ar^i$$

- Công thức tường minh

$$S = \sum_{i=0}^{n} ar^i = \begin{cases} \dfrac{ar^{n+1} - a}{r-1} & \text{nếu } r \neq 1 \\ (n+1)a & \text{nếu } r = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n \\ rS &= \phantom{a + {}} ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n + ar^{n+1} \\ rS - S &= ar^{n+1} - a \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
rS &= r\sum_{i=0}^{n} ar^i && \text{công thức của } S\\
&= \sum_{i=0}^{n} ar^{i+1} && \text{phân phối}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1} ar^k && \text{đổi chỉ số, } k = i+1\\
&= \sum_{k=1}^{n} ar^k + \sum_{k=n+1}^{n+1} ar^k && \text{tách tổng}\\
&= (\sum_{k=1}^{n} ar^k + ar^0) + (ar^{n+1} - ar^0) && \text{thêm và bớt } ar^0 = a\\
&= \sum_{k=0}^{n} ar^k + (ar^{n+1} - a) && \text{tách tổng}\\
&= S + (ar^{n+1} - a) && \text{công thức của } S
\end{aligned}
$$

Ví dụ 7

Tìm công thức tường minh cho tổng $T = \sum_{i=1}^{n} i$

$$
\begin{aligned}
T &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\
T &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \\
2T &= (n+1) \cdot n
\end{aligned}
$$

Bài tập 1

Với $\{a_n\}$ là cấp số cộng có số hạng đầu tiên a và công sai d, tổng của $n+1$ số hạng đầu tiên của dãy là

$$T = \sum_{i=0}^{n} (a + id)$$

Hãy tìm công thức tường minh cho T

Ví dụ 8

Phương pháp của Gauss để tính $\sum_{i=1}^{100} i$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$$

Bài tập 2

Tìm công thức tường minh cho $T = \sum_{i=1}^{n} i$ *sử dụng phương pháp tương tự như ví dụ trên. Có thể áp dụng phương pháp tương tự cho Bài tập 1 không?*

Ví dụ 9

Tìm công thức tường minh của $T = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ với x là số thực thỏa mãn $-1 < x < 1$

Ta đã chứng minh

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}.$$

Do $-1 < x < 1$, $x^{k+1} \to 0$ khi $k \to \infty$. Ta có

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} x^n = \lim_{k \to \infty} \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x}$$

Tổng	Công thức tường minh
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \ (r \neq 0)$	$\dfrac{ar^{n+1}-a}{r-1} \ (r \neq 1)$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\dfrac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \ (-1 < x < 1)$	$\dfrac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \ (-1 < x < 1)$	$\dfrac{1}{(1-x)^2}$