VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Các phương pháp đếm II

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp
- Giới thiệu
- Một số đẳng thức tổ hợp

Tam giác Pascal và Định lý nhị thức
- Tam giác Pascal
- Định lý nhị thức
- Nguyên lý bù trừ tổng quát

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Một số ví dụ khác

Hoán vị, Chỉnh hợp, Tổ hợp

Giới thiệu

- Một *hoán vị (permutation)* của một tập S gồm các phần tử phân biệt là một dãy sắp thứ tự (ordered sequence) chứa mỗi phần tử trong S chính xác một lần
  - Tập $S = \{1, 2, 3\}$ có tất cả sáu hoán vị: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$
- Một *chỉnh hợp chập r (r-permutation)* của một tập S là một dãy sắp thứ tự r phần tử phân biệt của S, trong đó r là một số nguyên thỏa mãn $0 \leq r \leq |S|$
  - Tập S có tất cả sáu chỉnh hợp chập 2: $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$
- Ký hiệu $P(n, r)$ là *số chỉnh hợp chập r của (một tập) n phần tử*

Định lý 1

Với mọi số nguyên $n \geq 1$ và mọi số nguyên r thỏa mãn $0 \leq r \leq n$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Chứng minh Định lý 1.

Để xây dựng một chỉnh hợp chập r của một tập S gồm n phần tử, ta thực hiện một dãy r bước chọn các phần tử phân biệt trong S để xếp vào r vị trí:

- Chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 1: có n cách chọn
- Với vị trí thứ nhất đã được xác định, chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 2: có $n-1$ cách chọn
- Với hai vị trí đầu đã được xác định, chọn phần tử xếp vào vị trí thứ 3: có $n-2$ cách chọn
- $\dots$
- Với $r-1$ vị trí đầu đã được xác định, chọn phần tử xếp vào vị trí thứ r: có $n-r+1$ cách chọn

Theo quy tắc nhân, có tất cả

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ chỉnh hợp chập r

của một tập n phần tử. $\square$

Ví dụ 1

Có bao nhiêu hoán vị của các chữ cái $ABCDEFGH$ có chứa chuỗi ký tự liên tiếp ABC?

- Số hoán vị có chứa chuỗi ký tự ABC bằng với số hoán vị của tập gồm sáu phần tử: ABC, D, E, F, G, H
- Do đó, đáp án là $6! = 720$

Ví dụ 2

Giả sử bạn cần đến 8 địa điểm khác nhau trong một thành phố nào đó. Bạn bắt buộc phải xuất phát từ một địa điểm định sẵn, nhưng có thể chọn lần lượt các địa điểm còn lại theo thứ tự bất kỳ. Có bao nhiêu thứ tự bạn có thể chọn để đến các địa điểm này?

- Địa điểm đầu tiên là cố định, còn 7 địa điểm còn lại có thể được sắp thứ tự tùy ý
- Do đó, đáp án là $7! = 5040$

Ví dụ 3

Có bao nhiêu cách khác nhau để sắp xếp 4 người ngồi quanh một bàn tròn? Biết rằng hai cách sắp xếp là giống nhau nếu mỗi người có người ngồi bên trái giống nhau và người ngồi bên phải giống nhau trong cả hai cách sắp xếp.

- Giả sử ta muốn sắp xếp n_1, n_2, n_3, n_4 quanh bàn tròn
- Để người ngồi bên trái luôn giống nhau và người ngồi bên phải luôn giống nhau trong cả hai cách sắp xếp, cách duy nhất để thu được một cách sắp xếp từ một cách khác giống nó là xoay bàn theo chiều kim đồng hồ hoặc ngược chiều kim đồng hồ.
- Do đó, để sắp xếp n_1, n_2, n_3, n_4 quanh bàn tròn:
  - Cố định vị trí của n_1: có 1 cách (Chọn n_1 ở bất kỳ vị trí nào đều giống nhau, do nếu có một cách sắp xếp giống cách bạn sử dụng nhưng vị trí của n_1 không giống, ta có thể xoay bàn để vị trí của n_1 giống nhau trong cả hai cách sắp xếp)
  - Sắp xếp n_2, n_3, n_4 vào các vị trí còn lại: có $3! = 6$ cách
- Tóm lại, đáp án là $1 \cdot 3! = 6$

- Một *tổ hợp chập r (r-combination)* của một tập hợp S là một dãy không sắp thứ tự r phần tử phân biệt của S, trong đó r là một số nguyên thỏa mãn $0 \leq r \leq |S|$. Nói cách khác, một tổ hợp chập r của S cũng là một tập con r phần tử của S
  - Tập $S = \{1, 2, 3\}$ có ba tổ hợp chập 2: $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$
- Ký hiệu $C(n, r)$ hoặc $\binom{n}{r}$ (đọc là "n chọn r") là *số tổ hợp chập r của (một tập) n phần tử*

Định lý 2

Với mọi số nguyên $n \geq 1$ và mọi số nguyên r thỏa mãn $0 \leq r \leq n$

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Chứng minh Định lý 2.

Để xây dựng một tổ hợp chập r của một tập S gồm n phần tử:

- Đầu tiên, ta giả thiết rằng thứ tự các phần tử là quan trọng, và xây dựng một chỉnh hợp chập r của S: có $P(n, r)$ cách
- Theo định nghĩa, trong mỗi tổ hợp chập r của S, thứ tự giữa các phần tử là không quan trọng. Nói cách khác, mỗi tổ hợp chập r của S ứng với chính xác $P(r, r) = r!$ chỉnh hợp chập r có chứa cùng các phần tử và chỉ khác nhau bởi thứ tự sắp xếp các phần tử
- Theo quy tắc chia, số tổ hợp chập r của S là

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$\square$

Ví dụ 4

Có bao nhiêu cách chọn ra 7 quân bài khác nhau từ một bộ bài 52 quân?

- Thứ tự lựa chọn các quân bài là không quan trọng
- Do đó, đáp án là $C(52,7) = \dfrac{52!}{7!45!} = 133\,784\,560$

Ví dụ 5

Có bao nhiêu cách chọn ra 3 bạn nam và 3 bạn nữ trong một nhóm gồm 10 bạn nam và 7 bạn nữ để đại diện tham gia một buổi họp mặt?

- Đầu tiên ta chọn 3 bạn nam từ nhóm 10 bạn nam, sau đó chọn 3 bạn nữ từ nhóm 7 bạn nữ
- Có $C(10,3)$ cách chọn ra 3 bạn nam, và $C(7,3)$ cách chọn ra 3 bạn nữ
- Áp dụng quy tắc nhân, có tổng cộng $C(10,3) \cdot C(7,3) = 120 \cdot 35 = 4200$ cách

Định lý 3

Với các số nguyên n, r thỏa mãn $0 \leq r \leq n$, ta có

$$C(n, r) = C(n, n - r)$$

Chứng minh.

Ta chứng minh hai vế của đẳng thức có thể thu được bằng cách đếm cùng một đối tượng thông qua các phương pháp khác nhau. Phương pháp chứng minh này gọi là *phương pháp đếm bằng hai cách (double counting proof)*

- $C(n, r)$ là số tập con r phần tử của một tập n phần tử
- Mỗi tập con r phần tử cũng có thể được mô tả bằng cách chỉ ra tập $n - r$ phần tử không thuộc tập con đó. Do đó, số tập con r phần tử là $C(n, n - r)$

□

Bài tập 1

Chứng minh Định lý 3 bằng công thức đã biết.

Ví dụ 6

Giả sử $n, k \geq 2$. Có bao nhiêu cách chọn k số nguyên từ tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho 1 và 2 không đồng thời được chọn?

- **Cách 1:**
  - Có $C(n, k)$ tập con k phần tử và không có hạn chế gì
  - Có $C(n-2, k-2)$ tập con k phần tử có chứa đồng thời cả 1 và 2
    - Cố định 1 và 2, chọn $k-2$ phần tử còn lại từ tập $\{3, \ldots, n\}$
  - Do đó đáp án là $C(n, k) - C(n-2, k-2)$
- **Cách 2:**
  - Có $C(n-2, k-1)$ tập con k phần tử chứa 1 nhưng không chứa 2
    - Cố định 1, chọn $k-1$ phần tử còn lại từ tập $\{3, \ldots, n\}$
  - Tương tự, có $C(n-2, k-1)$ tập con k phần tử chứa 2 nhưng không chứa 1
  - Có $C(n-2, k)$ tập con k phần tử không chứa cả 1 và 2
    - Chọn k phần tử từ tập $\{3, \ldots, n\}$
  - Do đó đáp án là $2C(n-2, k-1) + C(n-2, k)$

Định lý 4

Giả sử $n > k \geq 1$. *Ta có* $C(n, k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1)$

Chứng minh.

- $C(n, k)$ là số cách chọn k phần tử từ tập n phần tử $\{1, 2, \dots, n\}$
- Để chọn k phần tử từ $\{1, 2, \dots, n\}$, ta cũng có thể:
  - Chọn 1, và chọn $k-1$ phần tử còn lại từ tập $\{2, \dots, n\}$: có $C(n-1, k-1)$ cách chọn
  - Không chọn 1, và chọn k phần tử từ tập $\{2, \dots, n\}$: có $C(n-1, k)$ cách chọn

  Do đó, theo quy tắc cộng, có $C(n-1, k) + C(n-1, k-1)$ tập con k phần tử của tập n phần tử
- Do đó, $C(n, k) = C(n-1, k) + C(n-1, k-1)$

$\square$

Bài tập 2

Chứng minh Định lý 4 bằng công thức đã biết

Bài tập 3

Sử dụng Định lý 4, chứng minh đẳng thức thu được từ Ví dụ 6 sau

$$C(n,k) - C(n-2,k-2) = 2C(n-2,k-1) + C(n-2,k)$$

Bắt đầu với $n = 0$, hàng thứ n có $n + 1$ phần tử: $C(n, 0)$, $C(n, 1), \dots, C(n, n)$

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \qquad \binom{4}{1} = 4 \qquad \binom{4}{2} = 6 \qquad \binom{4}{3} = 4 \qquad \binom{4}{4} = 1$$

Hình: Tam giác Pascal

Định lý 3 và 4 có thể được minh họa bằng tam giác Pascal

Một tính chất khác của tam giác Pascal là

Định lý 5

Với mọi $n \geq 0$, tổng các phần tử ở hàng thứ n là

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$$

Chứng minh.

- $C(n,k)$ là số cách chọn tập con k phần tử từ một tập n phần tử
- Do đó, $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)$ là số tập con của một tập n phần tử
- Như ta đã đề cập trong phần quy tắc nhân, số tập con của một tập n phần tử là 2^n

□

Bài tập 4

*Chứng minh Định lý 5 bằng phương pháp quy nạp. (**Gợi ý:** Sử dụng Định lý 4)*

Bài toán: Khai triển $(x+y)^n$

Ví dụ 7

$$
\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1 \\
(x+y)^1 &= 1 \cdot x + 1 \cdot y \\
(x+y)^2 &= 1 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + 1 \cdot y^2 \\
(x+y)^3 &= 1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2y + 3 \cdot xy^2 + 1 \cdot y^3 \\
(x+y)^4 &= 1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3y + 6 \cdot x^2y^2 + 4 \cdot xy^3 + 1 \cdot y^4
\end{aligned}
$$

Nhận xét: Các hệ số khi khai triển $(x+y)^n$ $(0 \leq n \leq 4)$ giống với các hàng tương ứng trong tam giác Pascal

Định lý 6: Định lý nhị thức

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Chứng minh.

- Để nhận được một số hạng $x^{n-k}y^k$ trong khai triển của $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$, ta cần chọn chính xác $n-k$ số x và k số y từ n thừa số $(x+y)$. (Với mỗi thừa số, chọn chính xác một phần tử: hoặc x hoặc y)
  - Có $C(n, n-k)$ cách chọn chính xác $n-k$ số x, và ứng với mỗi cách trong số $C(n, n-k)$ cách này, có chính xác một cách chọn k số y từ các thừa số $(x+y)$ còn lại chưa được chọn
- Do đó, hệ số của $x^{n-k}y^k$ là $C(n, n-k) = C(n, k)$ □

Bài tập 5

Chứng minh Định lý 5 bằng cách sử dụng Định lý 6

Ví dụ 8

Khai triển $(x+2)^4$

$$\begin{aligned}(x+2)^4 &= C(4,0)\cdot x^4 + C(4,2\cdot)x^3\cdot 2 + C(4,3)\cdot x^2\cdot 2^2\\ &+ C(4,1)\cdot x\cdot 2^3 + C(4,4)\cdot y^4\\ &= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16\end{aligned}$$

Ví dụ 9

Tính $(1.02)^7$ làm tròn đến chữ số thập phân thứ 4

$$\begin{aligned}(1+0.02)^7 &= 1^7 + C(7,1)1^6(0.02) + C(7,2)1^5(0.0004)\\ &+ C(7,3)1^4(0.000008) + \dots\\ &= 1 + 1.14 + 0.0084 + 0.00028 + \dots\\ &\approx 1.14868 \approx 1.1487\end{aligned}$$

Chú ý: Để làm tròn đến chữ số thập phân thứ 4, ta cần tính toán đến chữ số thập phân thứ 5

Bài tập 6

Chứng minh rằng với mọi $n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

(a) *bằng cách áp dụng Định lý nhị thức (Định lý 6)*

(b) *($\star$) bằng phương pháp đếm hai lần (**Gợi ý:** Có bao nhiêu cách xây dựng một chuỗi* n *ký tự chỉ sử dụng các ký tự* A, B, C *thỏa mãn điều kiện có chính xác* $n-k$ *ký tự* A*?)*

Định lý 7: Nguyên lý bù trừ tổng quát

Với các tập hữu hạn $A_1, A_2, \dots, A_n$

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\{I \mid I\subseteq\{1,\dots,n\}\wedge|I|=k\}} (-1)^{k-1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|\right)$$

- $n = 2$

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

- $n = 3$

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\end{aligned}$$

Chứng minh.

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\{I \mid I\subseteq\{1,\dots,n\}\wedge|I|=k\}} (-1)^{k-1}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|\right)$$

- Cho $a \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ và giả thiết rằng a xuất hiện trong chính xác m tập $A_{a_1}, A_{a_2}, \dots, A_{a_m}$, với $1 \leq a_1, a_2, \dots, a_m \leq n$
- a được đếm một lần ở vế trái
- Có bao nhiêu lần a được đếm ở vế phải?
  - a xuất hiện trong m tập $A_{a_1}, A_{a_2}, \dots, A_{a_m}$
  - a xuất hiện trong $C(m,2)$ tập $A_{a_i} \cap A_{a_j}$ với $1 \leq i < j \leq m$
  - a xuất hiện trong $C(m,3)$ tập $A_{a_i} \cap A_{a_j} \cap A_{a_k}$ với $1 \leq i < j < k \leq m$
  - $\dots$

Do đó, ở vế phải, a được đếm $\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}C(m,k)$ lần

□

Chứng minh (tiếp).

- Để chứng minh vế trái bằng vế phải, ta cần chỉ ra a cũng được đếm một lần ở vế phải, nghĩa là

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}C(m,k) = 1$$

- Theo Định lý 6, ta có

$$\begin{aligned} 0 &= (-1+1)^m \\ &= \sum_{k=0}^{m} C(m,k)(-1)^k 1^{m-k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m}(-1)^k C(m,k) \end{aligned}$$

Do đó, $\sum_{k=1}^{m}(-1)^k C(m,k) = -1$, suy ra

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}C(m,k) = 1$$

Bài tập 7

(a) *Chứng minh rằng với mọi* $n > 0$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

(b) *Chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng với mọi* $m > 0$

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k} = 1$$

*(**Gợi ý:*** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$*)*

Bài tập 8

Chứng minh đẳng thức Vandermonde (Vandermonde's Identity) sau

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k},$$

trong đó m, n, r *là các số nguyên không âm và* $r \leq \min(m, n)$

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

- Một *chỉnh hợp lặp chập r (r-permutation with repetition)* của một tập S là một dãy sắp thứ tự r phần tử của S trong đó các phần tử có thể lặp lại
- Một *tổ hợp lặp chập r của một tập S (r-combination with repetition)* của một tập S là một dãy không sắp thứ tự r phần tử của S trong đó các phần tử có thể lặp lại

Định lý 8

Số chỉnh hợp lặp chập r của một tập n phần tử là n^r

Chứng minh.

Có n lựa chọn cho vị trí thứ nhất, n lựa chọn cho vị trí thứ hai, ..., n lựa chọn cho vị trí thứ r. Do đó có n^r cách xây dựng một chỉnh hợp lặp chập r của một tập n phần tử $\square$

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Định lý 9

Số tổ hợp lặp chập r của một tập n phần tử là $C(n+r-1, n-1)$

Chứng minh.

- Mỗi tổ hợp lặp chập r từ tập n phần tử có thể biểu diễn bằng một dãy $n-1$ thanh đứng và r ngôi sao
  - Ta dùng $n-1$ thanh đứng để phân cách các ngăn
  - Ngăn thứ i chứa thêm một ngôi sao mỗi lần khi phần tử thứ i của tập xuất hiện trong tổ hợp
  - Ví dụ, một tổ hợp lặp chập 6 của tập 4 phần tử được biểu diễn bởi

$$** \mid * \mid\mid ***$$

    là một tổ hợp chứa đúng hai phần tử thứ nhất, một phần tử thứ hai, không phần tử thứ ba, và ba phần tử thứ tư của tập 4 phần tử
- Mỗi dãy $n-1$ thanh đứng và r ngôi sao ứng với một chuỗi nhị phân độ dài $n+r-1$ có chính xác r số 1. Do đó, số các dãy thanh đứng và ngôi sao là $C(n+r-1, r) = C(n+r-1, n-1)$

□

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Ví dụ 10

Có bao nhiêu cách để 6 quả bóng vào một túi, biết rằng mỗi quả bóng chỉ có thể có màu đỏ (R), xanh lá cây (G), hoặc xanh da trời (B)?

- 6 quả bóng ứng với 6 ngôi sao, và 2 thanh đứng phân cách thành ba ngăn ứng với các màu đỏ, xanh lá cây, xanh da trời
  - Lựa chọn [R, R, G, G, G, B] ứng với dãy $** \mid *** \mid *$
  - Lựa chọn [R, B, R, R, B, R] ứng với dãy $* * ** \mid\mid **$
- Số cách để 6 quả bóng vào túi là $C(3+6-1, 3-1) = 28$

Ví dụ 11

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, và $x_3 \geq 0$?

- Mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách để 11 quả bóng vào 3 hộp gán nhãn x_1, x_2, x_3
- Số nghiệm nguyên không âm của phương trình chính là tổ hợp lặp chập 11 của tập 3 phần tử: $C(3+11-1, 3-1) = 78$

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Ví dụ 12

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn $x_1 \geq -2$, $x_2 \geq 1$, và $x_3 \geq 0$?

- Ta xây dựng một phương trình mới có dạng tổng của các số nguyên không âm như ở ví dụ trước
  - Ta có $x_1 + 2 \geq 0$ và $x_2 - 1 \geq 0$
  - Đặt $x'_1 = x_1 + 2 \geq 0$ và $x'_2 = x_2 - 1 \geq 0$
  - Số nghiệm nguyên của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ thỏa mãn $x_1 \geq -2$, $x_2 \geq 1$, và $x_3 \geq 0$ cũng là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x'_1 + x'_2 + x_3 = 11 + 2 - 1 = 12$
- Số nghiệm thỏa mãn điều kiện là $C(3 + 12 - 1, 3 - 1) = 91$

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Ví dụ 13

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 2$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$?

- Ta đếm số nghiệm thỏa mãn
  - $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$
  - $x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

  Số nghiệm thỏa mãn $0 \leq x_1 \leq 2$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ sẽ là hiệu của hai số trên
- Có $C(3 + 11 - 1, 11) = 78$ nghiệm nguyên thỏa mãn $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$. Có $C(3 + 8 - 1, 8) = 45$ nghiệm nguyên thỏa mãn $x_1 \geq 3$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$. Do đó, kết quả là $C(3 + 11 - 1, 11) - C(3 + 8 - 1, 8) = 78 - 45 = 33$

Bài tập 9

Đếm số nghiệm nguyên của $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ *thỏa mãn* $0 \leq x_1 \leq 2$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ *một cách trực tiếp bằng cách xét từng trường hợp* $x_1 = 0$, $x_1 = 1$, *và* $x_1 = 2$

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Định lý 10

Số hoán vị phân biệt của n phần tử trong đó có n_1 phần tử giống nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử giống nhau thuộc loại 2, ..., và n_k phần tử giống nhau thuộc loại k, là

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Chứng minh.

- Nếu coi tất cả n phần tử đều khác nhau, có $n!$ hoán vị
- Với mỗi hoán vị trong $n!$ hoán vị này, có thể xây dựng một hoán vị giống nó bằng một chuỗi k bước:
  - Hoán vị n_1 phần tử loại 1: có $n_1!$ cách
  - Với mỗi cách hoán vị các phần tử loại 1, hoán vị n_2 phần tử loại 2: có $n_2!$ cách
  - ...
  - Với mỗi cách hoán vị các phần tử loại $1, \dots, k-1$, hoán vị n_k phần tử loại k: có $n_k!$ cách

  Theo quy tắc nhân, mỗi hoán vị có $n_1!n_2!\dots n_k!$ hoán vị giống nó trong số $n!$ hoán vị
- Theo quy tắc chia, số hoán vị phân biệt là $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$

□

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Ví dụ 14

Có bao nhiêu chuỗi ký tự thu được bằng cách sắp xếp lại thứ tự các chữ cái trong chuỗi **SUCCESS**?

- Số chuỗi ký tự chính là số hoán vị phân biệt của 7 ký tự, trong đó có 3 ký tự **S**, 2 ký tự **C**, 1 ký tự **U**, và 1 ký tự **E**
- Do đó kết quả là $\dfrac{7!}{3!2!1!1!} = 420$

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Ví dụ 15

Có bao nhiêu cách chia 5 quân bài cho mỗi người trong số 4 người chơi từ một bộ bài 52 quân thông thường?

- Mỗi cách chia bài ứng với một chuỗi các bước
  - Chia 5 quân từ 52 quân bài cho người chơi thứ nhất: có $C(52,5)$ cách
  - Với mỗi bộ 5 quân mà người chơi thứ nhất có, chia tiếp 5 quân từ 47 quân còn lại cho người chơi thứ hai: có $C(47,2)$ cách
  - Với mỗi các bộ 5 quân mà hai người chơi đầu tiên có, chia tiếp 5 quân từ 42 quân còn lại cho người chơi thứ ba: có $C(42,5)$ cách
  - Với mỗi các bộ 5 quân mà ba người chơi đầu tiên có, chia tiếp 5 quân từ 37 quân còn lại cho người chơi thứ tư: có $C(37,5)$ cách
- Theo quy tắc nhân, có tất cả

$$C(52,5)C(47,5)C(42,5)C(37,5) = \frac{52!}{5!5!5!5!32!}$$

cách chia bài

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

Định lý 11

Số cách chia n vật khác nhau vào trong k hộp sao cho có n_i đồ vật được đặt vào hộp thứ i, với $i = 1, 2, \dots, k$ là

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Với các số nguyên $n, n_1, n_2, \dots, n_k \geq 0$ thỏa mãn $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$, ta định nghĩa

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Định lý 12: Định lý đa thức

Với mọi $n \geq 0$ và $k \geq 1$

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{0 \leq n_1, \dots, n_k \leq n \\ n_1 + \cdots + n_k}} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$$

Một số ví dụ khác

Ví dụ 16

Có bao nhiêu cách phân phối 4 nhân viên khác nhau A, B, C, D vào 3 văn phòng hoàn toàn giống hệt nhau? (Ví dụ, xếp A, B vào phòng thứ nhất và C, D vào phòng thứ hai hoàn toàn giống với việc xếp A, B vào phòng thứ hai và C, D vào phòng thứ ba. *Điều quan trọng là A, B cùng phòng và C, D cùng phòng*.) Giả sử rằng mỗi văn phòng có thể chứa được bất kỳ một số lượng nhân viên nào

- Cả 4 người chung một văn phòng: có $C(4, 4) = 1$ cách
  - Xếp 4 người vào bất kỳ phòng nào đều được
- ba + một: có $C(4, 3) = 4$ cách
  - Chọn 3 người xếp vào một phòng, người còn lại tự động xếp vào một trong hai phòng còn lại, phòng nào đều được
- hai + hai: có $C(4, 2)/2 = 3$ cách
  - Chọn 2 người để xếp vào một phòng, hai người còn lại tự động vào một trong hai phòng còn lại. Mỗi cách chọn này có một cách tương đương với nó, ví dụ như chọn A, B xếp vào một phòng tương đương với chọn C, D xếp vào một phòng, vì đều cho kết quả là $\{\{A, B\}, \{C, D\}\}$
- hai + một + một: có $C(4, 2)$ cách
  - Chọn 2 người để xếp vào một phòng, hai người còn lại tự động xếp vào hai phòng còn lại

Một số ví dụ khác

Ví dụ 17

Có bao nhiêu cách để đặt 6 quyển sách hoàn toàn giống nhau vào 4 hộp hoàn toàn giống nhau, trong đó mỗi hộp có thể chứa nhiều nhất 6 quyển sách?

- Ta liệt kê các cách sắp xếp bằng cách liệt kê số sách lớn nhất trong một hộp, theo sau bởi các số sách nhỏ hơn trong các hộp có chứa ít nhất một quyển sách khác, theo thứ tự giảm dần của số sách. Ví dụ, $4, 1, 1$ mô tả cách xếp sách vào 3 hộp, một hộp có 4 quyển, hai hộp khác mỗi hộp có 1 quyển
- Các cách sắp xếp là:
  - 6
  - $5, 1$
  - $4, 2 \quad 4, 1, 1$
  - $3, 3 \quad 3, 2, 1 \quad 3, 1, 1, 1$
  - $2, 2, 2 \quad 2, 2, 1, 1$

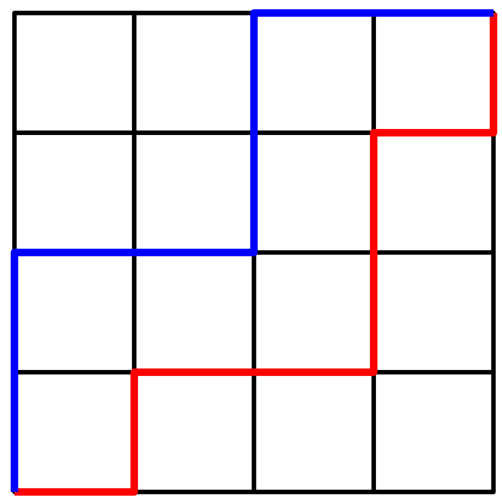
Một số ví dụ khác

Bài tập 10 ($\star$)

Alice và Bob chơi trò chơi sau: Bob chọn 10 số nguyên bất kỳ trong khoảng từ 1 đến 40. Alice cần tìm hai tập số nguyên khác nhau trong các số mà Bob chọn, mỗi tập có 3 phần tử, sao cho tổng các số nguyên trong hai tập là bằng nhau. Hãy chứng minh rằng Alice luôn luôn thắng

Bài tập 11

Có bao nhiêu cách đi từ góc dưới cùng bên trái đến góc trên cùng bên phải của một lưới kích thước $n \times n$? Giả sử rằng trong mỗi bước từ một đỉnh sang đỉnh khác của lưới, bạn chỉ có thể đi sang phải một bước hoặc đi lên trên một bước



Hình: Một lưới 4×4 và ví dụ một số đường đi