VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

Tính liên thông trong đồ thị
- Đường đi
- Liên thông trong đồ thị vô hướng
- Liên thông trong đồ thị có hướng
- Đường đi và sự đẳng cấu
- Đếm số đường đi giữa các đỉnh

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
- Đường đi Euler
- Đường đi Hamilton

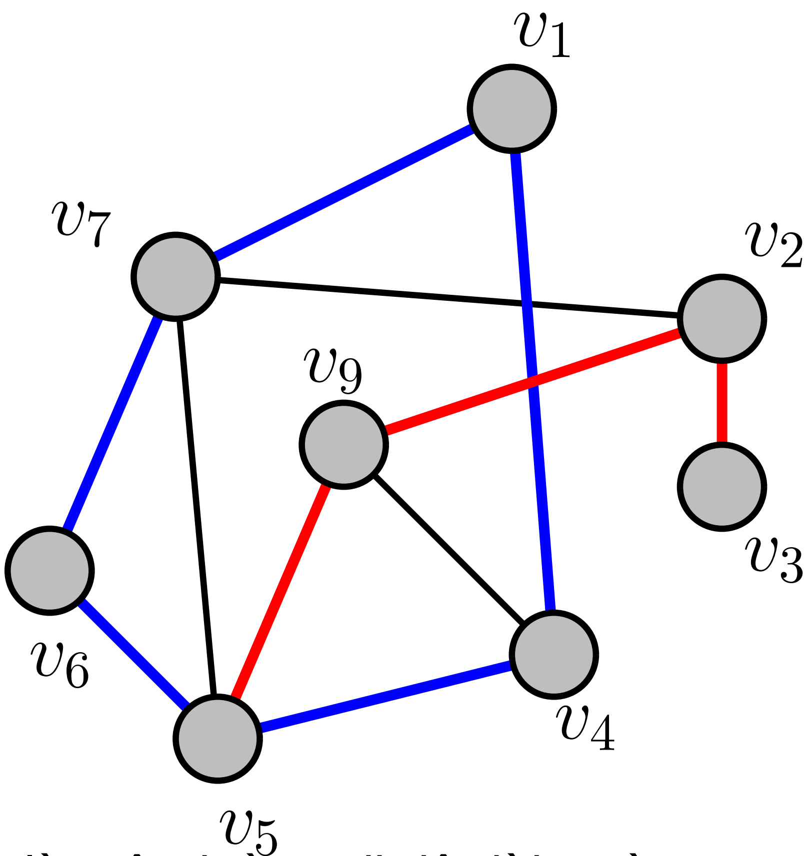
Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Đường đi (vô hướng)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng và n là một số nguyên dương. *Đường đi (path)* độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trong G là một dãy các cạnh $e_1, e_2, \dots, e_n$ của đồ thị thỏa mãn điều kiện tồn tại một dãy các đỉnh $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ sao cho $v_0 = u$, $v_n = v$, và e_i có các đầu mút v_{n-1} và v_i, với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

- Ta nói rằng đường đi bắt đầu với u và kết thúc với v
- Một đường đi độ dài $n \geq 1$ được gọi là một *chu trình (circuit hoặc cycle)* nếu nó bắt đầu và kết thúc ở cùng một đỉnh
- Khi G không có các cạnh song song, mỗi đường đi có thể được xác định một cách duy nhất thông qua các đỉnh của nó, và do đó ta có thể ký hiệu một đường đi bằng dãy các đỉnh của nó $v_0, v_1, \dots, v_n$

Ví dụ 1



Hình: v_5, v_9, v_2, v_3 là một đường đi độ dài 4 và $v_1, v_4, v_5, v_6, v_7, v_1$ là một chu trình độ dài 5

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Tính liên thông trong đồ thị

4 Đường đi

Liên thông trong đồ thị vô hướng

Liên thông trong đồ thị có hướng

Đường đi và sự đẳng cấu

Đếm số đường đi giữa các đỉnh

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

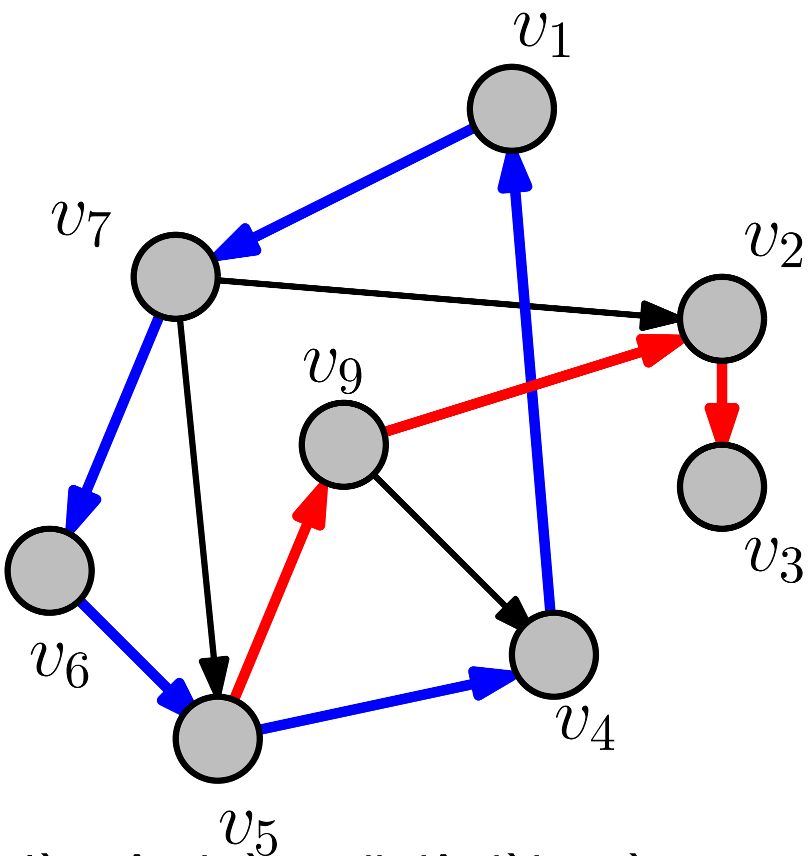
Đường đi (có hướng)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng và n là một số nguyên dương. *Đường đi (path)* độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v trong G là một dãy các cung $e_1, e_2, \dots, e_n$ của đồ thị thỏa mãn điều kiện tồn tại một dãy các đỉnh $v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ sao cho $v_0 = u$, $v_n = v$, và e_i có đỉnh đầu v_{n-1} và đỉnh cuối v_i, với mọi $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

- Ta nói rằng đường đi bắt đầu với u và kết thúc với v
- Một đường đi độ dài $n \geq 1$ được gọi là một *chu trình (circuit hoặc cycle)* nếu nó bắt đầu và kết thúc ở cùng một đỉnh
- Khi G không có các cạnh song song, mỗi đường đi có thể được xác định một cách duy nhất thông qua các đỉnh của nó, và do đó ta có thể ký hiệu một đường đi bằng dãy các đỉnh của nó $v_0, v_1, \dots, v_n$

Tính liên thông trong đồ thị
5 Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Ví dụ 2



Hình: v_5, v_9, v_2, v_3 là một đường đi độ dài 4 và $v_1, v_7, v_6, v_5, v_4, v_1$ là một chu trình độ dài 5

Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

- *Độ dài (length)* của một đường đi là số cạnh của đường đi đó
- Một đường đi gọi là *đơn (simple)* nếu nó không chứa cùng một cạnh (cung) nhiều hơn một lần

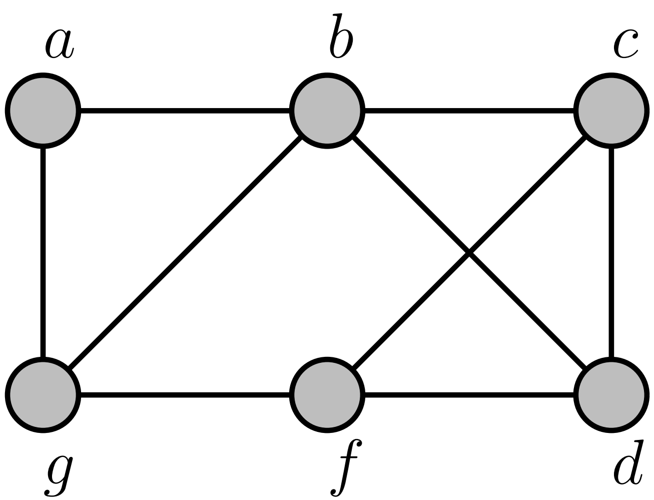
Bài tập 1

Hãy tìm trong đồ thị ở hình bên

(a) *Một đường đi có độ dài* n *với* $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$

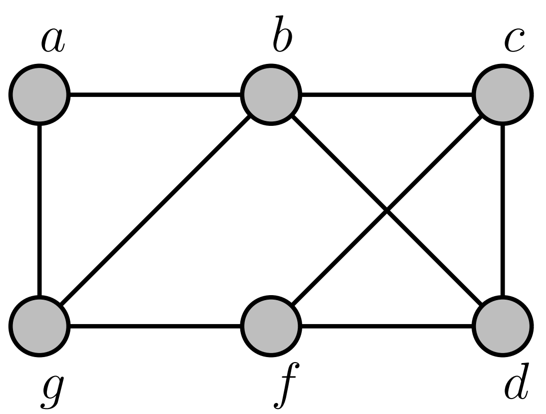
(b) *Một đường đi đơn có độ dài* n *với* $n \in \{1, 2, \dots, 7\}$

(c) *Một chu trình có độ dài* n *với* $n \in \{3, \dots, 7\}$

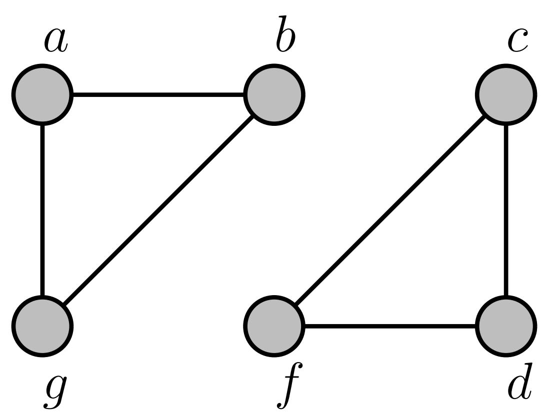


Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

- Một đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ được gọi là *liên thông (connected)* nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của G. Ngược lại, nếu không tồn tại đường đi giữa một cặp đỉnh phân biệt nào đó trong G, ta gọi G là đồ thị *không liên thông (disconnected)*



G là đồ thị liên thông



G là đồ thị không liên thông

Tính liên thông trong đồ thị

Liên thông trong đồ thị vô hướng

- *Hợp (union)* của hai đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đồ thị $G = (V, E)$ có tập đỉnh $V = V_1 \cup V_2$ và tập cạnh $E = E_1 \cup E_2$. Ta cũng viết $G = G_1 \cup G_2$
- Một đồ thị không liên thông G có thể được xem như là hợp của hai hay nhiều đồ thị con liên thông trong đó không có đỉnh chung nào giữa mỗi cặp đồ thị con này. Ta gọi các đồ thị con này là các *thành phần liên thông (connected component)* của G
- Cụ thể, một *thành phần liên thông (connected component)* $H = (V', E')$ của G là một đồ thị con liên thông cực đại của G, nghĩa là, H là một đồ thị con liên thông của G và với mọi đồ thị con liên thông K của G, H không là đồ thị con thực sự của K
- G là đồ thị liên thông khi và chỉ khi G có chính xác một thành phần liên thông

Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Mệnh đề 1

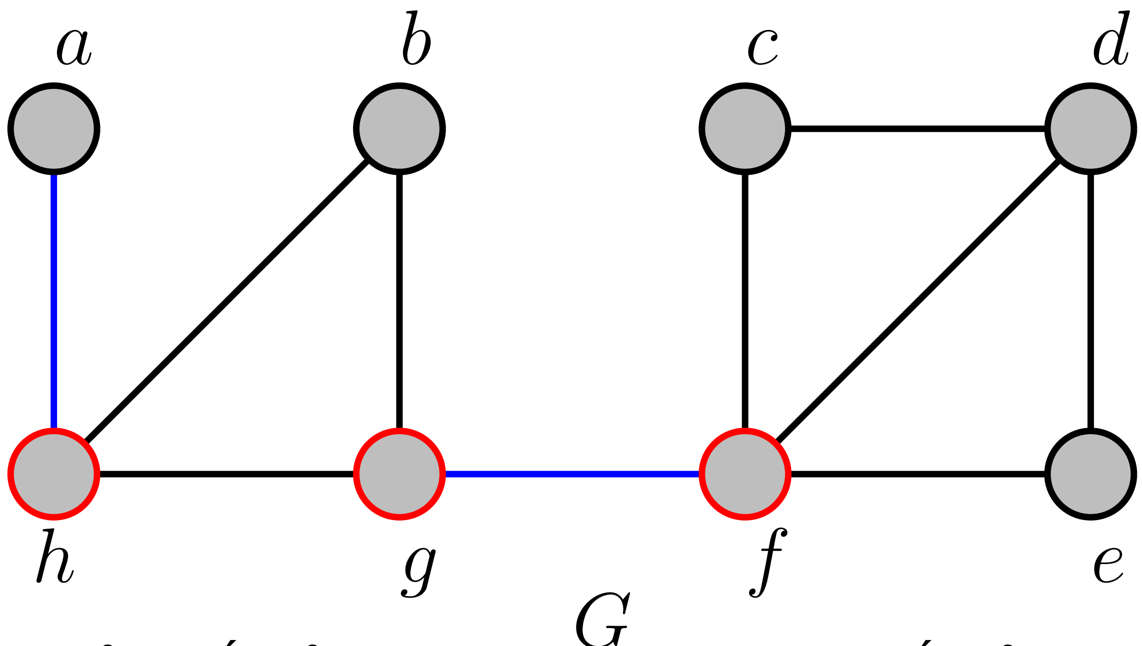
Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng liên thông có ít nhất hai đỉnh. Với hai đỉnh bất kỳ $u, v \in V$ của G, tồn tại một đường đi đơn giữa u và v

Chứng minh.

- Do G liên thông, luôn tồn tại một đường đi giữa hai đỉnh u, v. Gọi $P = v_0, v_1, \dots, v_k$ là một đường đi có độ dài nhỏ nhất trong số tất cả các đường đi giữa $u = v_0$ và $v = v_k$. Ta chứng minh P là một đường đi đơn
- Giả sử P không phải đường đi đơn. Suy ra, tồn tại i, j thỏa mãn $0 \leq i < j \leq k$ và $v_i = v_j$. Do đó, $P' = v_0, v_1, \dots, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k$ là một đường đi giữa u và v và P' có độ dài nhỏ hơn P. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của P

Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$

- Một đỉnh $v \in V$ được gọi là *đỉnh cắt (cut vertex)* hoặc *điểm khớp (articulation point)* nếu $G - v$ có nhiều thành phần liên thông hơn G
- Một cạnh $e \in E$ được gọi là *cạnh cắt (cut edge)* hoặc *cầu (bridge)* nếu $G - e$ có nhiều thành phần liên thông hơn G



Hình: Các đỉnh cắt của G là f, g, h. Các cạnh cắt của G là ah, gf

Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
10 Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

- Một đồ thị không có đỉnh cắt nào được gọi là *đồ thị không thể tách rời (nonseparable graph)*

Bài tập 2

Chứng minh rằng nếu G là đơn đồ thị vô hướng có chính xác hai đỉnh bậc lẻ u, v thì các đỉnh này phải thuộc cùng một thành phần liên thông của G

Bài tập 3

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng liên thông gồm $n \geq 1$ đỉnh và $G \not\cong K_n$. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tập các đỉnh V' sao cho $G - V'$ là đồ thị không liên thông

- Tập đỉnh V' của một đơn đồ thị vô hướng liên thông G thỏa mãn điều kiện ở Bài tập 3 được gọi là một *tập phân tách (separating set (of vertices))* của G

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Tính liên thông trong đồ thị
Liên thông trong đồ thị vô hướng

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng

- *Số liên thông đỉnh (vertex connectivity)* của G, ký hiệu $\kappa(G)$, là số đỉnh nhỏ nhất cần bỏ đi từ G để thu được một đồ thị con G' *không liên thông* hoặc *chỉ có một đỉnh*.
  - $\kappa(G) = 0$ nếu G không liên thông hoặc chỉ có một đỉnh
  - $\kappa(K_n) = n - 1$
  - $\kappa(G)$ là số phần tử nhỏ nhất trong một tập phân tách (nếu có) của G
- G là *k-liên thông (k-connected)* nếu $\kappa(G) \geq k$
  - Nếu G là k-liên thông thì cũng là j-liên thông với mọi $0 \leq j \leq k$
  - G là 1-liên thông nếu G là liên thông và có nhiều hơn một đỉnh
  - G là 2-liên thông nếu G không có đỉnh cắt và có ít nhất 3 đỉnh
  - Nếu xóa đi tối đa $k - 1$ đỉnh bất kỳ từ G thì đồ thị thu được luôn là đồ thị liên thông

Bài tập 4

Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng liên thông gồm $n \geq 2$ đỉnh. Chứng minh rằng luôn tồn tại một tập cạnh E' sao cho $G - E'$ là một đồ thị không liên thông

- Tập cạnh E' của một đơn đồ thị vô hướng liên thông G thỏa mãn điều kiện ở Bài tập 4 được gọi là một *tập cạnh phân tách (separating set of edges)* của G
- *Số liên thông cạnh (edge connectivity)* của G, ký hiệu $\lambda(G)$, là số cạnh nhỏ nhất cần bỏ đi từ G để thu được một đồ thị con G' *không liên thông* hoặc *chỉ có một đỉnh*
- G được gọi là *k-liên thông cạnh (k-edge connected)* nếu $\lambda(G) \geq k$.
  - $\lambda(G) = 0$ nếu G không liên thông hoặc chỉ có một đỉnh
  - $\lambda(K_n) = n - 1$
  - Nếu G là k-liên thông cạnh thì cũng là j-liên thông cạnh với mọi $0 \leq j \leq k$
  - Nếu xóa đi tối đa $k - 1$ cạnh bất kỳ từ G, đồ thị thu được luôn là đồ thị liên thông

Bài tập 5

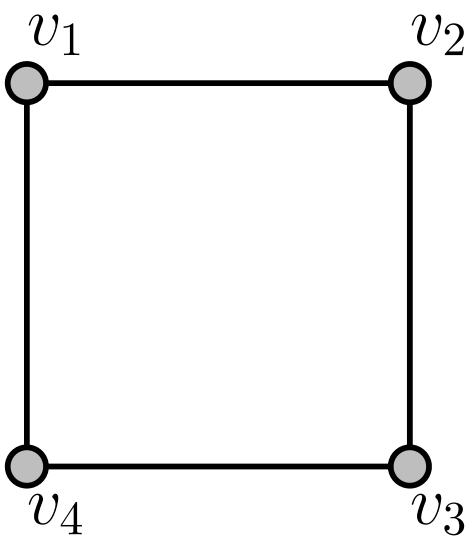
Chứng minh rằng với mọi đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$

$$\kappa(G) \leq \min_{v \in V} \deg_G(v) \quad (1)$$

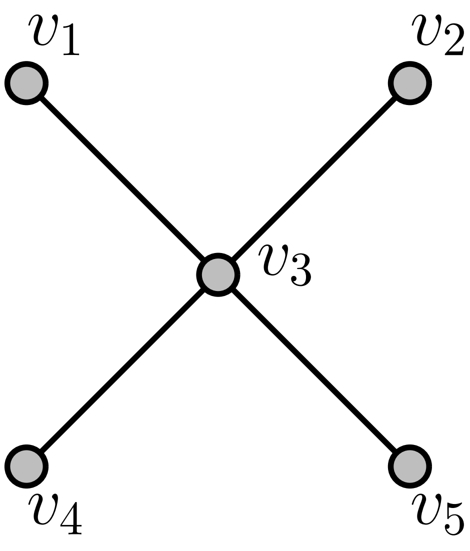
$$\lambda(G) \leq \min_{v \in V} \deg_G(v) \quad (2)$$

Bài tập 6

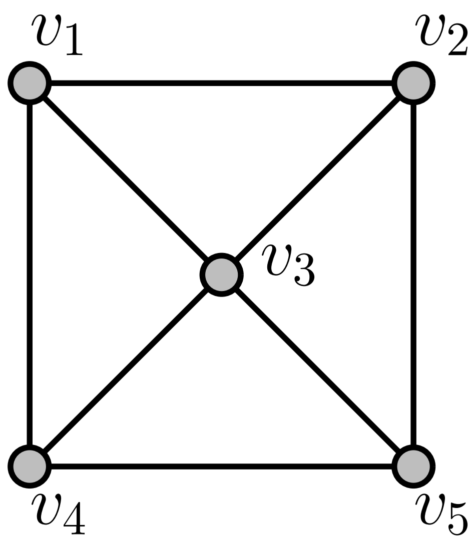
Xác định $\kappa(G_i)$ và $\lambda(G_i)$ trong các đồ thị G_i với $i = 1, 2, 3$ sau



G_1



G_2



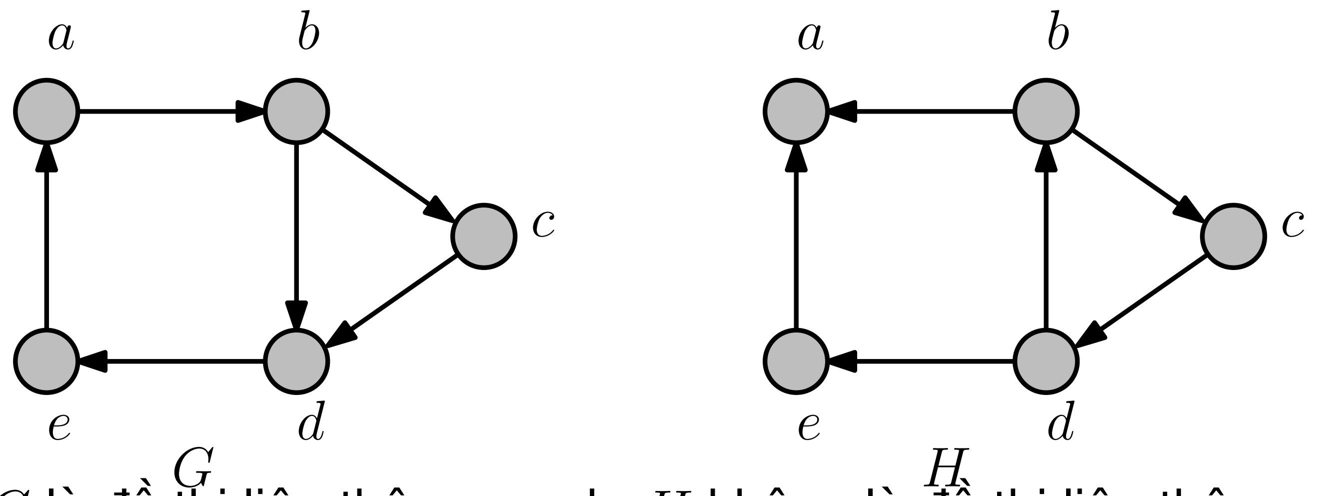
G_3

Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng

- G được gọi là *liên thông mạnh (strongly connected)* nếu với mỗi cặp đỉnh $u, v \in V$, tồn tại một đường đi có hướng từ u đến v và một đường đi có hướng từ v đến u
- G được gọi là *liên thông yếu (weakly connected)* nếu đồ thị vô hướng thu được bằng cách bỏ qua hướng của các cung của G là một đồ thị liên thông

Ví dụ 3



Hình: G là đồ thị liên thông mạnh. H không là đồ thị liên thông mạnh nhưng là đồ thị liên thông yếu

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
15 Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh

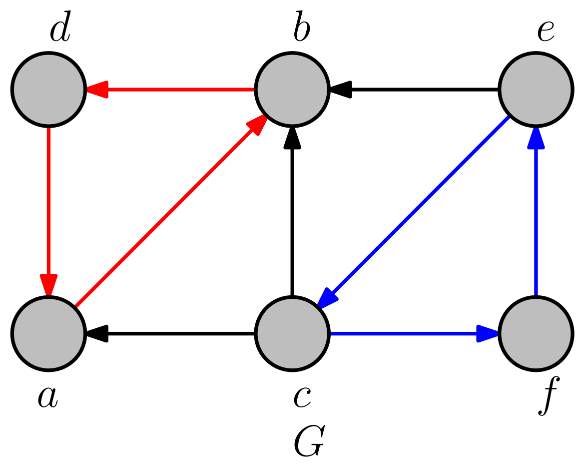
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng

- Một *thành phần liên thông mạnh (strongly connected component)* của G là một đồ thị con liên thông mạnh cực đại H của G, nghĩa là, H là một đồ thị con liên thông mạnh của G và không là đồ thị con thực sự của bất kỳ đồ thị con liên thông mạnh nào khác

Ví dụ 4

- G không là đồ thị liên thông mạnh
- Đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ với $V_1 = \{a, b, d\}$ và $E_1 = \{(a, b), (b, d), (d, a)\}$ là một thành phần liên thông mạnh của G
- Đồ thị $G_2 = (V_2, E_2)$ với $V_2 = \{c, e, f\}$ và $E_2 = \{(c, f), (f, e), (e, c)\}$ là một thành phần liên thông mạnh của G

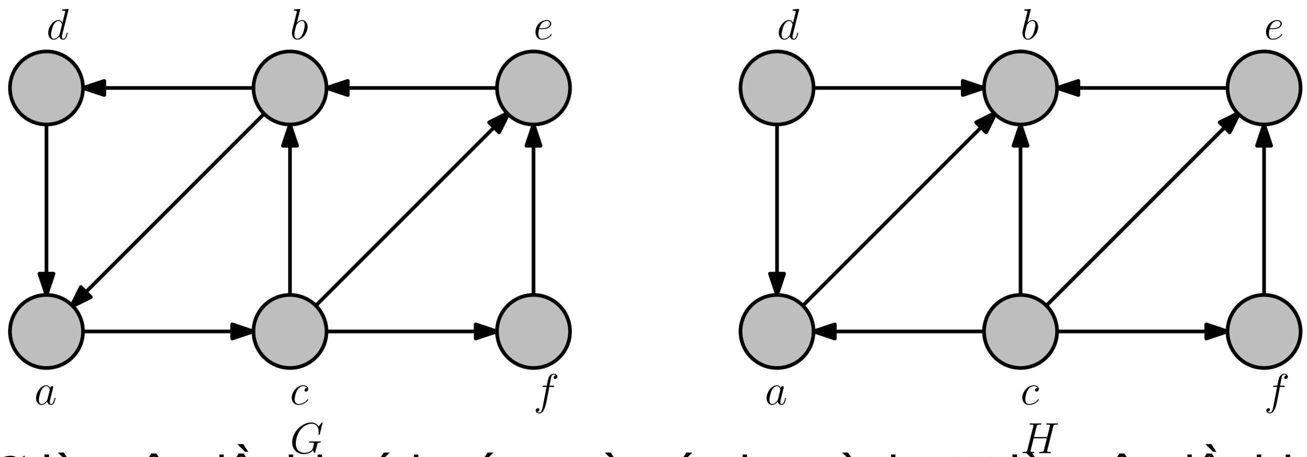


Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Tính liên thông trong đồ thị

Liên thông trong đồ thị có hướng

- Một *đồ thị có hướng không có chu trình (directed acyclic graph – DAG)* là một đồ thị có hướng không chứa khuyên hoặc chu trình có hướng.



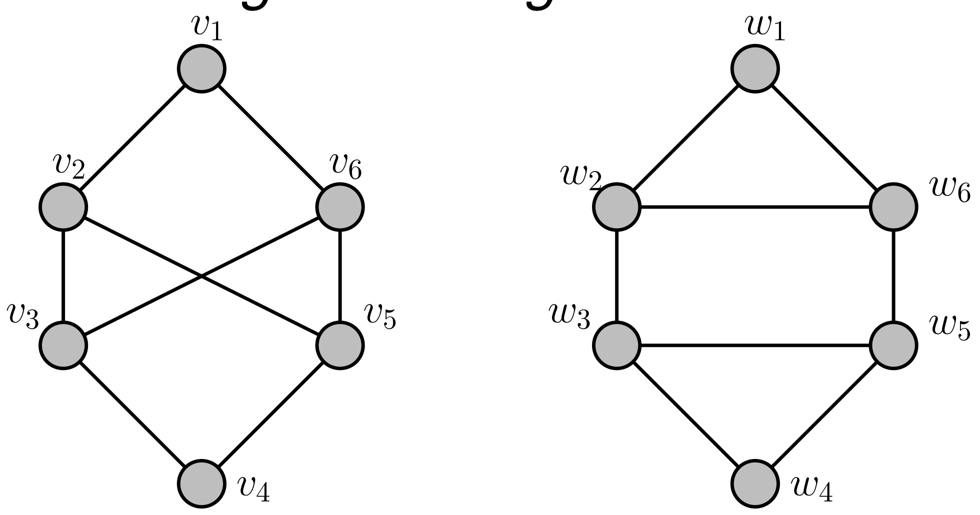
Hình: G là một đồ thị có hướng và có chu trình. H là một đồ thị có hướng và không có chu trình

Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
17 Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

- **Nhắc lại:** Để chứng minh hai đồ thị là *không đẳng cấu*, chúng ta thường tìm một tính chất mà chỉ một trong hai đồ thị có. Một tính chất như thế được gọi là một *bất biến đồ thị (graph invariant)*
  - số các đỉnh có bậc cho trước nào đó
  - danh sách bậc các đỉnh của đồ thị
- Một bất biến đồ thị hữu ích là *sự tồn tại của các chu trình đơn với độ dài* $k \geq 3$

Bài tập 7

Các đồ thị sau có đẳng cấu không? Vì sao?



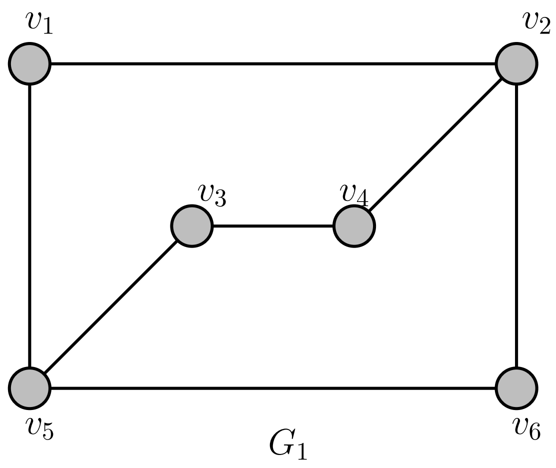
G_1 G_2

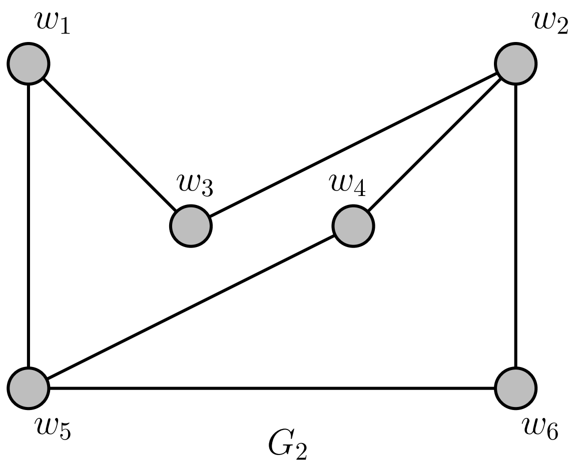
Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

- Chúng ta cũng có thể sử dụng đường đi để tìm các ánh xạ giữa hai đồ thị đẳng cấu

Bài tập 8

Các đồ thị sau có đẳng cấu không? Vì sao?





Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
19 Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Định lý 2

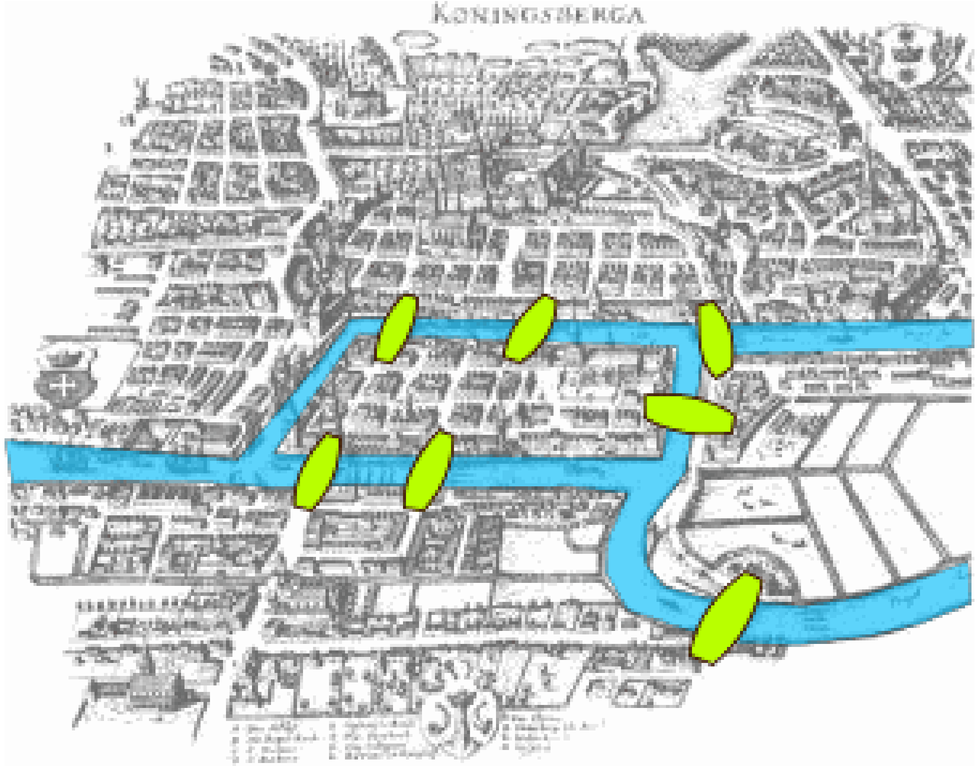
Cho G là một đồ thị với ma trận kề A tương ứng với thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_n$. Số các đường đi khác nhau độ dài r từ v_i tới v_j, trong đó r là một số nguyên dương, bằng giá trị của phần tử (i, j) của ma trận A^r.

Chứng minh.

Ta chứng minh Định lý bằng quy nạp theo r

- **Bước cơ sở:** Theo định nghĩa ma trận kề, Định lý 2 đúng với $r = 1$
- **Bước quy nạp:** Giả sử Định lý 2 đúng với mọi $1 \leq r \leq k$. Ta chứng minh Định lý 2 đúng với $r = k + 1$, tức là, số các đường đi khác nhau độ dài $k + 1$ từ v_i tới v_j bằng giá trị của phần tử (i, j) của A^{k+1}.
  - Một đường đi độ dài $k + 1$ từ v_i đến v_j được tạo thành bởi một đường đi độ dài k từ v_i đến v_ℓ nào đó, và cạnh $\{v_\ell, v_j\}$.

Hình: Leonhard Euler 1707–1783 (Wikipedia)



Hình: Bản đồ Königsberg cũ (Wikipedia)

Bảy cây cầu ở Königsberg

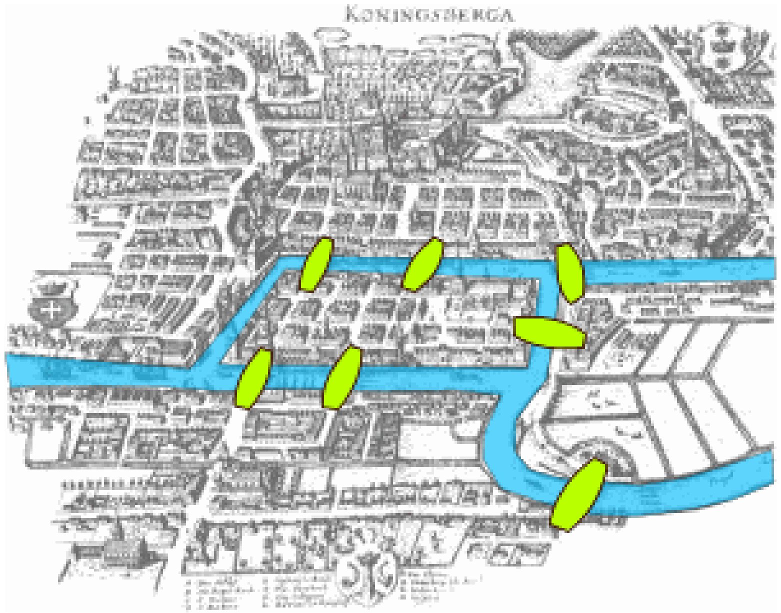
Tìm một tuyến đường đi qua mỗi cây cầu chính xác một lần và quay lại vị trí xuất phát

Tính liên thông trong đồ thị
- Đường đi
- Liên thông trong đồ thị vô hướng
- Liên thông trong đồ thị có hướng
- Đường đi và sự đẳng cấu
- Đếm số đường đi giữa các đỉnh

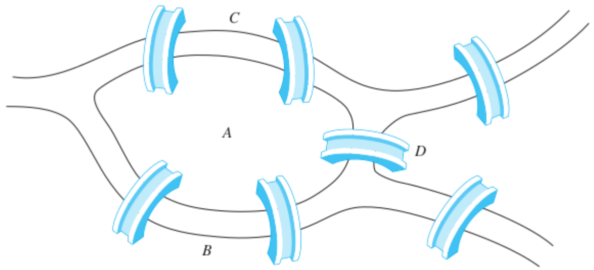
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
- 21 Đường đi Euler
- Đường đi Hamilton

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

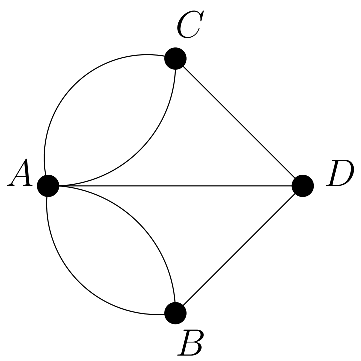
Bảy cây cầu ở Königsberg



(a) Bản đồ Königsberg cũ (Wikipedia)



(b) Bản đồ Königsberg cũ đơn giản hóa



(c) Đồ thị tương ứng

- Đồ thị tương ứng:
  - Mỗi vùng đất ứng với một đỉnh
  - Mỗi cây cầu nối hai vùng đất ứng với một cạnh
- Tìm chu trình đơn trong đồ thị chứa tất cả các cạnh

Tính liên thông trong đồ thị

Đường đi

Liên thông trong đồ thị vô hướng

Liên thông trong đồ thị có hướng

Đường đi và sự đẳng cấu

Đếm số đường đi giữa các đỉnh

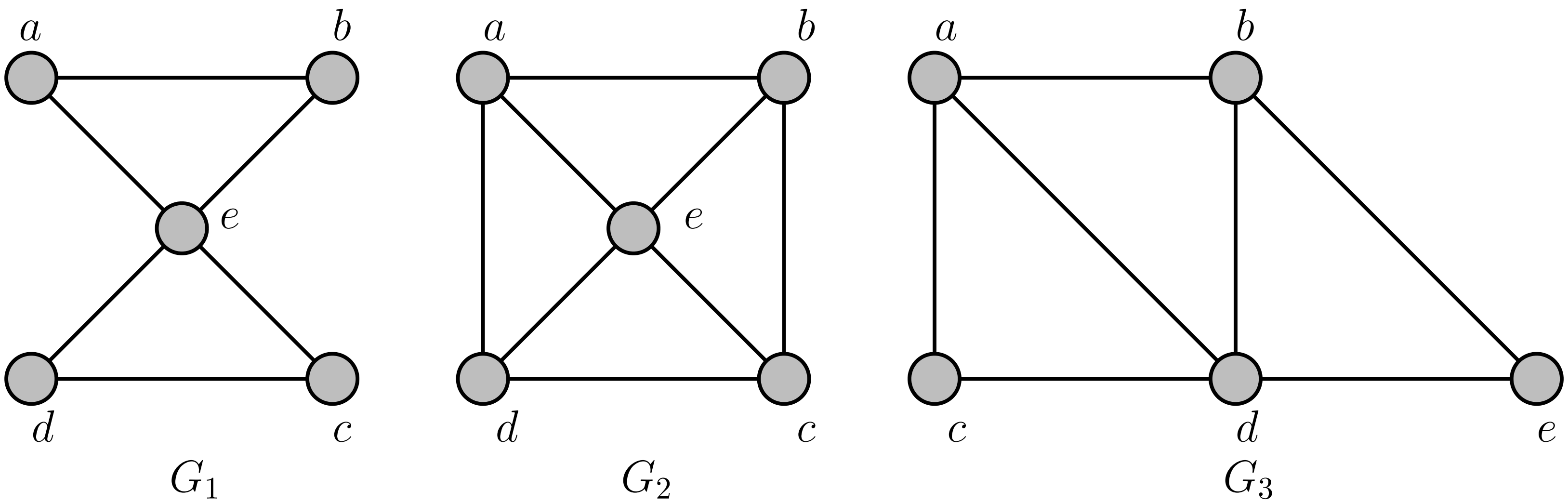
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

22 Đường đi Euler

Đường đi Hamilton

Cho đồ thị $G = (V, E)$. Một *đường đi/chu trình Euler (Eulerian path/circuit)* trong G là một đường đi/chu trình đơn có chứa mọi cạnh của G

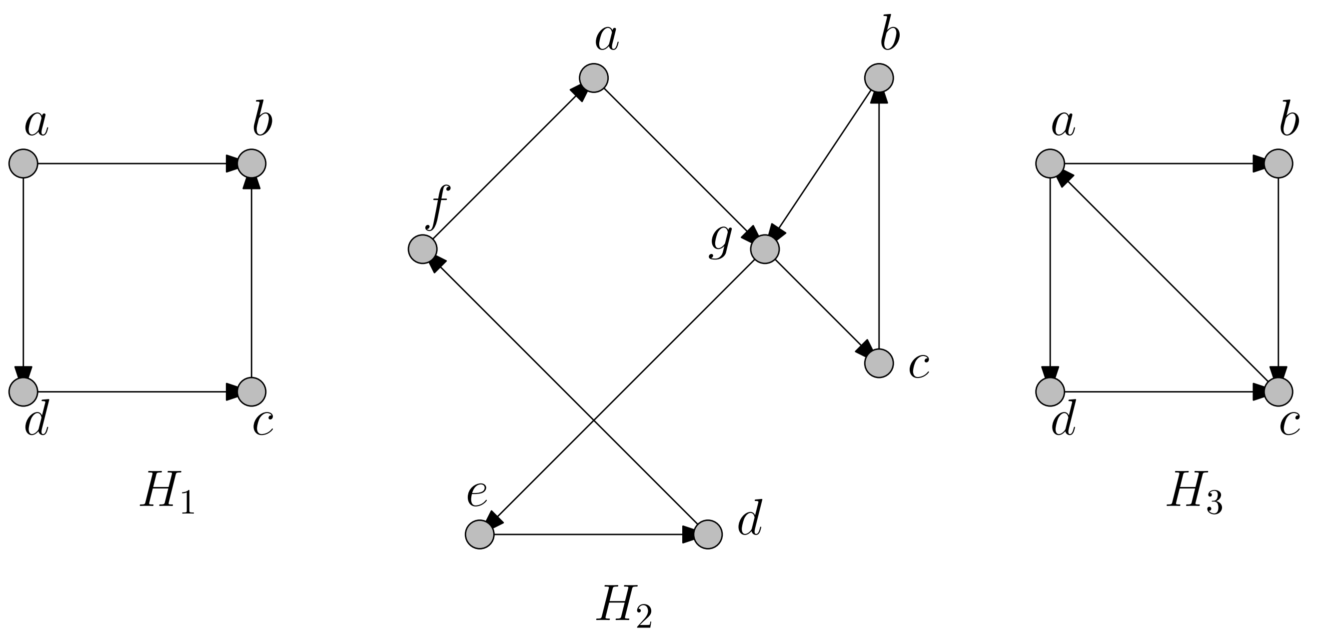
Ví dụ 5



- G_1 có chu trình Euler, G_2 và G_3 không có
- G_3 có đường đi Euler, G_2 không có

Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Ví dụ 6



- H_2 có chu trình Euler, H_1 và H_3 không có
- H_3 có đường đi Euler, H_1 không có

Bài tập 9

Chứng minh rằng nếu $G = (V, E)$ là một đa đồ thị vô hướng thỏa mãn $\deg_G(u) \geq 2$ với mọi $u \in V$ thì G có một chu trình đơn

Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
24 Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Định lý 3

Một đa đồ thị liên thông có một chu trình Euler khi và chỉ khi mỗi đỉnh của đồ thị có bậc chẵn

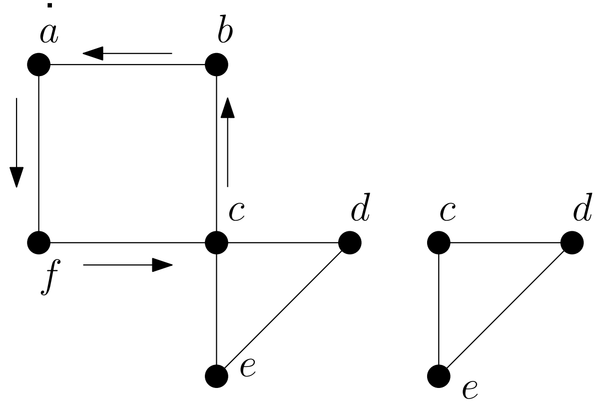
Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử một đa đồ thị liên thông $G = (V, E)$ có một chu trình Euler $e_1, e_2, \dots, e_m$ trong đó $e_i = x_{i-1}x_i \in E$ với $1 \leq i \leq m$ và $x_0 = x_m = u$.

- Với $v = x_i$ $(2 \leq i \leq m-1)$: chu trình đi vào v qua e_i và đi ra qua e_{i+1}
- Với $u = x_0 = x_m$: chu trình đi ra u qua e_1 và trở lại u qua e_m

($\Leftarrow$) Giả sử mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn. Lặp lại quá trình chọn chu trình sau cho đến khi đã chọn hết các cạnh của G

- Xuất phát từ đỉnh $x_0 = a$ bất kỳ.
- Chọn tùy ý các cạnh $x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k$ càng dài càng tốt.
- Kết thúc tại cạnh có dạng ya.
- Bỏ đi các cạnh đã chọn và các đỉnh không kề với các cạnh còn lại.



Cuối cùng, ghép các chu trình trên thành một chu trình Euler

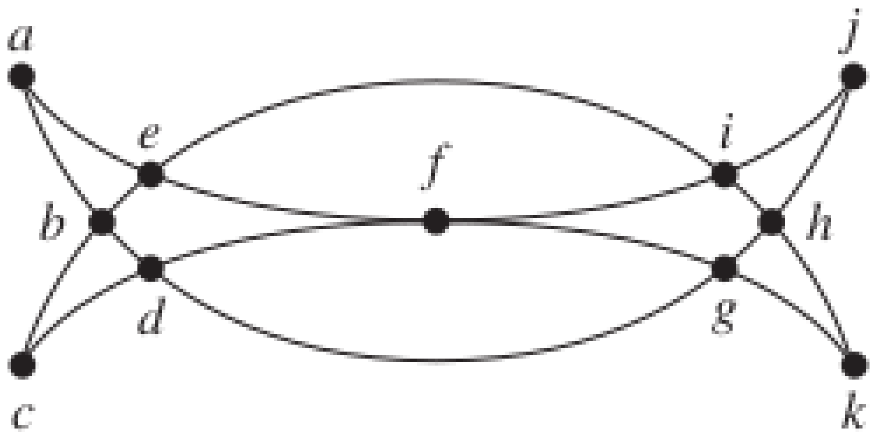
□

Lý thuyết đồ thị II
Hoàng Anh Đức
Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Ví dụ 7

Tìm chu trình Euler trong đồ thị sau.

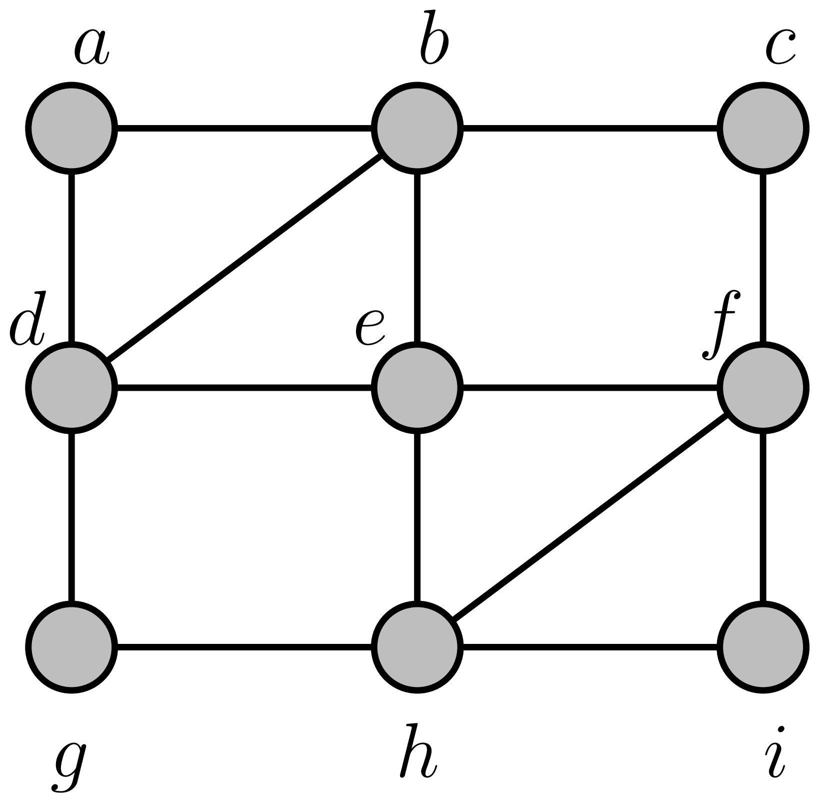


- Bắt đầu từ $x_0 = a$, chọn tùy ý các cạnh $x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k, x_ka$. Ví dụ: $a, e, f, i, j, h, g, d, b, a$.
- Bỏ đi các cạnh $ae, ef, fi, ij, jh, hg, gd, db, ba$ và các đỉnh a, j.
- Bắt đầu từ $x_0 = c$, chọn tùy ý các cạnh $x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{l-1}x_l, x_lc$. Ví dụ: $c, b, e, i, h, k, g, f, d, c$.
- Ghép hai chu trình đã chọn thành một chu trình Euler: $a, e, i, h, k, g, f, d, c, b, e, f, i, j, h, g, d, b, a$.

Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Bài tập 10

Tìm chu trình Euler trong đồ thị sau.



Tính liên thông trong đồ thị
- Đường đi
- Liên thông trong đồ thị vô hướng
- Liên thông trong đồ thị có hướng
- Đường đi và sự đẳng cấu
- Đếm số đường đi giữa các đỉnh

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
- 28 Đường đi Euler
- Đường đi Hamilton

Định lý 4

Một đa đồ thị liên thông G có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler khi và chỉ khi có đúng hai đỉnh của G có bậc lẻ.

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử G có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler

- Hai đỉnh ở hai đầu mút của đường đi có bậc lẻ
- Các đỉnh còn lại có bậc chẵn

($\Leftarrow$) Giả sử G có chính xác hai đỉnh bậc lẻ u, v

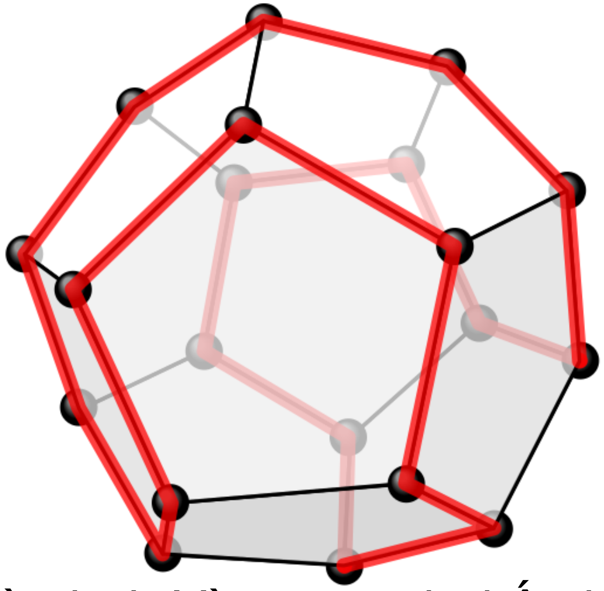
- Tìm chu trình Euler của đồ thị $G + uv$
- Xóa cạnh uv trong chu trình để thu được đường đi Euler trong G

□

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

Trò chơi "Vòng quanh thế giới" (1857)

Hình: Sir William Rowan Hamilton 1805–1865 (Wikipedia)



Hình: Trò chơi "Vòng quanh thế giới" (Wikipedia)

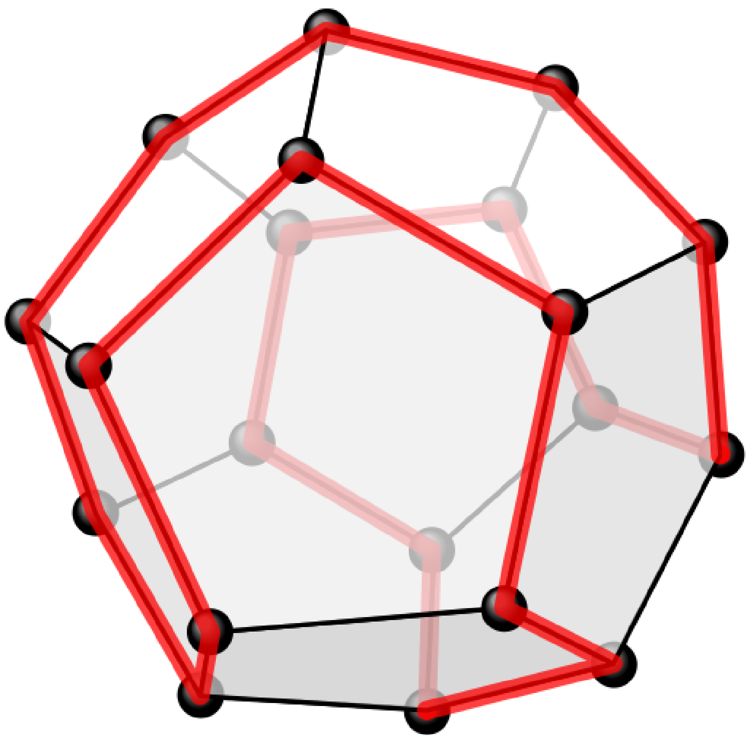
Trò chơi "Vòng quanh thế giới"

Mỗi đỉnh trong 20 đỉnh của khối 12 mặt đại diện cho một thành phố. Tìm đường đi xuất phát từ một đỉnh dọc theo các cạnh của khối, ghé thăm mỗi đỉnh còn lại một lần, và quay lại vị trí ban đầu

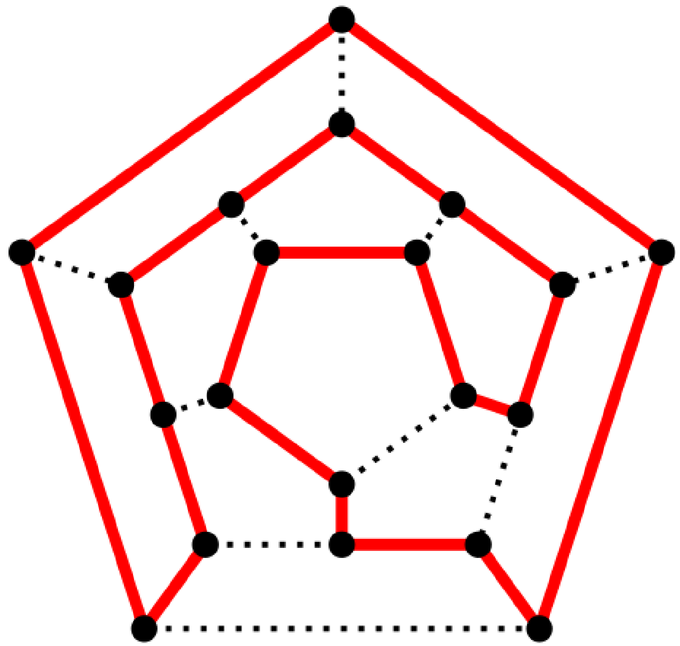
Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

Trò chơi "Vòng quanh thế giới" (1857)



(a) Trò chơi "Vòng quanh thế giới" (Wikipedia)



(b) Đồ thị đẳng cấu với khối 12 mặt (Wikipedia)

Tính liên thông trong đồ thị

Đường đi

Liên thông trong đồ thị vô hướng

Liên thông trong đồ thị có hướng

Đường đi và sự đẳng cấu

Đếm số đường đi giữa các đỉnh

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton

Đường đi Euler

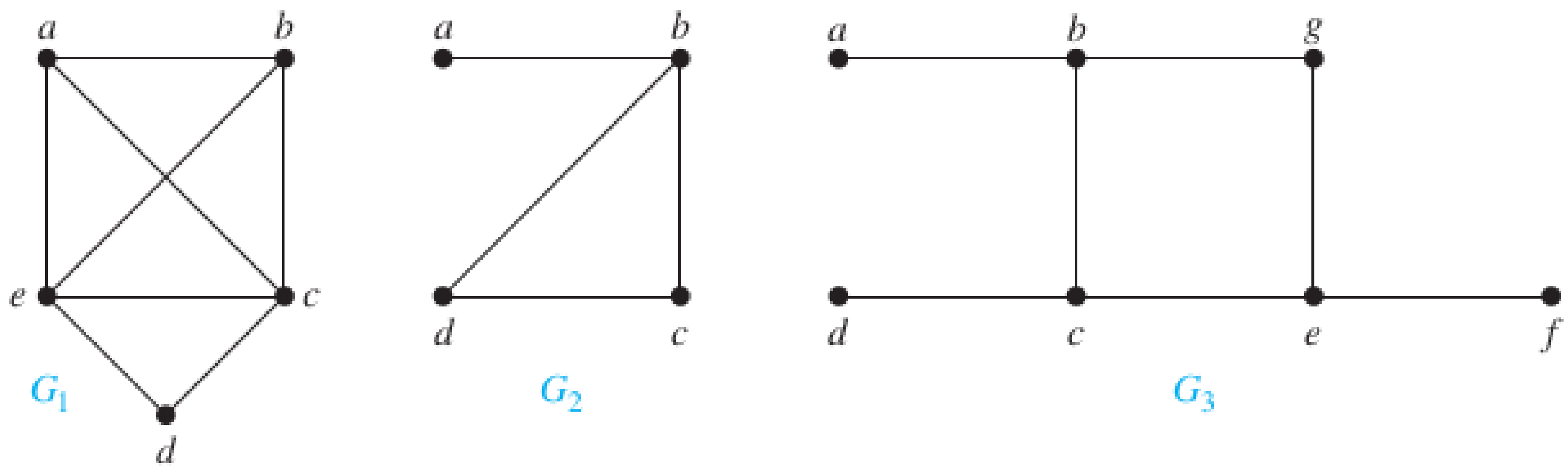
Đường đi Hamilton

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng

- Một *đường đi Hamilton* trong G là một đường đi đơn $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ thỏa mãn điều kiện $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ và $x_i \neq x_j$ với $0 \leq i < j \leq n$
- Một *chu trình Hamilton* trong G là một chu trình đơn $x_0, x_1, x_{n-1}, x_n, x_0$ thỏa mãn điều kiện x_0, x_1, x_{n-1}, x_n là một đường đi Hamilton

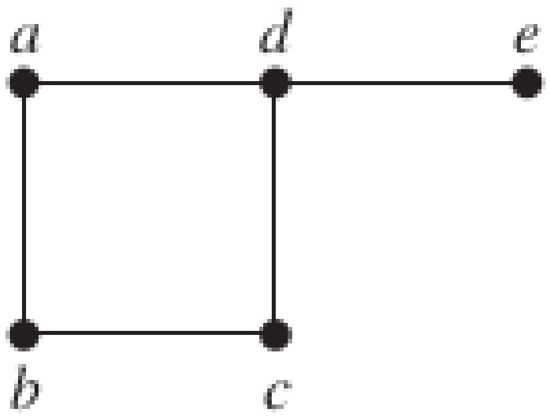
Bài tập 11

Các đồ thị sau có chu trình/đường đi Hamilton không?

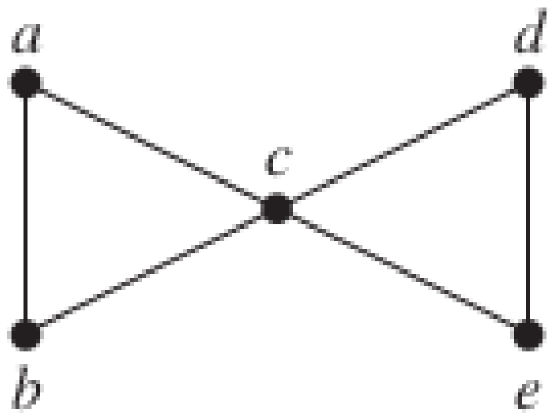


Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh
Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

- *Chưa có* điều kiện cần và đủ để kiểm tra xem một đồ thị có chu trình Hamilton hay không.
- Một số tính chất có thể được sử dụng để chỉ ra một đồ thị *không* có chu trình Hamilton.
  - Đồ thị có chứa đỉnh bậc 1 không có chu trình Hamilton.
  - Nếu đỉnh v của đồ thị G có bậc 2 thì hai cạnh kề với v thuộc mọi chu trình Hamilton của G (nếu có).
  - Một chu trình Hamilton không chứa một chu trình nào có số đỉnh nhỏ hơn nó.



G



H

Lý thuyết đồ thị II

Hoàng Anh Đức

Tính liên thông trong đồ thị
Đường đi
Liên thông trong đồ thị vô hướng
Liên thông trong đồ thị có hướng
Đường đi và sự đẳng cấu
Đếm số đường đi giữa các đỉnh

Đường đi Euler và Đường đi Hamilton
Đường đi Euler
Đường đi Hamilton

Định lý 5: Định lý Dirac

Nếu $G = (V, E)$ là một đồ thị đơn gồm n đỉnh ($n \geq 3$) thỏa mãn điều kiện bậc của mỗi đỉnh trong G lớn hơn hoặc bằng $n/2$ thì G có một chu trình Hamilton.

Bài tập 12 (($\star$) Chứng minh Định lý Dirac)

(a) *G phải liên thông (Tại sao?)*

(b) *Gọi $P = v_0, v_1, \dots, v_k$ là đường đi đơn có độ dài lớn nhất trong G ($0 \leq k \leq n-1$).*

- *Tất cả các đỉnh kề với v_0 hoặc v_k đều phải thuộc P.*
- *Do P có độ dài lớn nhất, có ít nhất $n/2$ cạnh v_iv_{i+1} của P thỏa mãn $v_iv_k \in E$. Tương tự, có ít nhất $n/2$ cạnh v_jv_{j+1} của P thỏa mãn $v_0v_{j+1} \in E$.*
- *Do P có ít hơn n cạnh, tồn tại một cạnh v_qv_{q+1} thỏa mãn đồng thời hai điều kiện trên: $v_qv_k \in E$ và $v_0v_{q+1} \in E$*

(c) *P chứa tất cả các đỉnh của G (Tại sao?)*