

Phép kéo theo trong logic

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

1 Câu hỏi và trả lời

Có bạn đặt câu hỏi như sau:

Trong chủ đề Logic và chứng minh, phần mệnh đề kéo theo, em thực sự vẫn chưa hiểu vì sao khi mệnh đề p sai, q đúng thì mệnh đề kéo theo của p và q lại đúng nữa thầy ạ. Em thử lấy một ví dụ đó là p là “Người dùng nhập mật khẩu và tên đăng nhập đúng”, q là “Người dùng được phép truy cập vào tài khoản”. Theo qui tắc p sai thì q đúng thì mệnh đề phức hợp đó sẽ đúng. Áp dụng quy tắc trên cho ví dụ trên thì phủ định của p sẽ là “Người dùng nhập mật khẩu không đúng” thì q đúng là “Người dùng được phép truy cập tài khoản”.

Mình trả lời câu hỏi của bạn như sau:

- Với ví dụ trên, p là “Người dùng nhập mật khẩu và tên đăng nhập đúng” và q là “Người dùng được phép truy cập vào tài khoản”
 - Mệnh đề “Nếu Người dùng nhập mật khẩu và tên đăng nhập đúng, thì Người dùng được phép truy cập vào tài khoản” có thể viết dưới dạng $p \rightarrow q$. Ở đây giá trị chân lý của $p \rightarrow q$ là đúng.
 - Theo mình hiểu, bạn cho rằng với p sai và q đúng thì $p \rightarrow q$ đúng nhưng mệnh đề “Nếu Người dùng nhập mật khẩu không đúng, thì Người dùng được phép truy cập tài khoản” trên thực tế là sai, và hai điều này do đó là mâu thuẫn.
- Bạn cần chú ý rằng p là một mệnh đề logic, do đó nó chỉ có thể nhận một trong hai giá trị đúng (T) hoặc sai (F) chứ không thể đồng thời nhận cả hai giá trị.
- Do đó, điều bạn hiểu tương đương với phát biểu sau: nếu $p \rightarrow q$ (Nếu Người dùng nhập mật khẩu và tên đăng nhập đúng, thì Người dùng được phép truy cập vào tài khoản) là đúng thì $\neg p \rightarrow q$ (Nếu Người dùng không nhập mật khẩu và tên đăng nhập đúng, thì Người dùng được phép truy cập vào tài khoản) cũng là đúng. Điều này không chính xác. Bạn hãy kiểm tra lại bằng cách lập bảng chân trị.

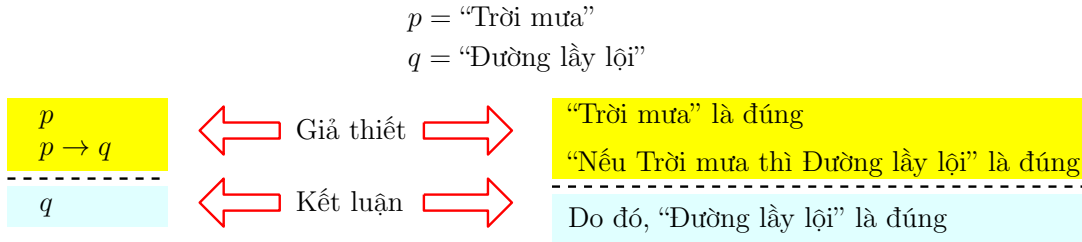
2 Chú ý

Với các mệnh đề p, q cho trước, mệnh đề $p \rightarrow q = F$ khi và chỉ khi $p = T$ và $q = F$, và trong mọi trường hợp còn lại, $p \rightarrow q = T$. Một số chú ý khi làm việc với phép kéo theo trong logic là như sau:

- Mệnh đề $p \rightarrow q$ đúng không có nghĩa là p và q có quan hệ nguyên nhân-kết quả. Nói cách khác, $p \rightarrow q$ có giá trị chân lý T không có nghĩa là p là nguyên nhân xảy ra q . Mệnh đề $p \rightarrow q$ đúng chỉ nói cho ta nếu p đúng, thì q đúng chứ không phải nếu p đúng thì nó là nguyên nhân mà q đúng. Ví dụ, với p là “ $1 + 1 = 2$ ” và q là “ $1 = 1$ ” thì $p \rightarrow q$ có giá trị chân lý T, nhưng điều này không có nghĩa là “ $1 + 1 = 2$ đúng” là nguyên nhân mà “ $1 = 1$ đúng”. Mệnh đề $p \rightarrow q$ không nói cho ta trong trường hợp p sai thì q là đúng hay sai.
- Chúng ta đang làm việc với các định nghĩa toán học chứ không phải với các lý luận trong ngôn ngữ thường ngày. Cụ thể, trong logic mệnh đề, mỗi mệnh đề có giá trị chân lý đúng (T) hoặc sai (F). Do đó, ta cần định nghĩa giá trị chân lý của mệnh đề $p \rightarrow q$ cho tất cả các trường

hợp có thể xảy ra ($p = T, q = T$; $p = T, q = F$; $p = F, q = T$; và $p = F, q = F$). Trong thực tế, phát biểu “Nếu p , thì q ” trong nhiều trường hợp có thể là “không xác định” hoặc “không rõ ràng”. Một “quy tắc” thường được sử dụng trong toán học là như sau: **ta không thể nói điều gì đó là sai chỉ vì ta không có bằng chứng rằng nó đúng hay sai**. Thông thường, trong nhiều trường hợp, nếu không có bằng chứng về tính đúng/sai, ta cho rằng đó là đúng. Một ví dụ minh họa cho điều này là trong lý thuyết tập hợp: tập rỗng là tập con của mọi tập hợp do không có bằng chứng nào thể hiện rằng nó không phải—không tồn tại bất kỳ phần tử nào trong một tập rỗng mà *không* là một phần tử của một tập khác.

- **Định nghĩa $p \rightarrow q$ như trên mô tả chính xác quá trình lý luận theo logic.** Lý do của việc định nghĩa như trên là để mô tả rằng *một lý luận là đúng khi kết luận có thể được suy ra từ giả thiết*. Ví dụ, một “lý luận” có thể được thể hiện như sau



Lý luận là hợp lệ khi và chỉ khi $((p) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q = T$

Điều ta muốn thể hiện trong một lý luận hợp lệ là nếu giả thiết đúng thì kết quả suy luận cũng phải đúng. Ta có thể mô tả chính xác điều này thông qua việc định nghĩa phép kéo theo \rightarrow như đề cập ở trên. Trong ví dụ trên, nếu giả thiết đúng thì kết luận cũng đúng. Chúng ta không quan tâm điều gì xảy ra khi giả thiết sai; trong trường hợp này lý luận trong ví dụ vẫn là một lý luận hợp lệ, vì nó không nói cho ta trong trường hợp này thì điều gì xảy ra.

3 Bài tập

Các bài tập sau giúp các bạn hiểu rõ hơn tại sao $p \rightarrow q$ được định nghĩa là T khi $p = F$. Ta xét các trường hợp thay đổi giá trị của $p \rightarrow q$ khi $p = F$.

Bài tập 1. Ta định nghĩa toán tử imp1 thông qua bảng chân trị sau

p	q	$p \text{ imp1 } q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Chứng minh rằng $p \text{ imp1 } q \equiv q \text{ imp1 } p$.

Bài tập 2. Ta định nghĩa toán tử imp2 thông qua bảng chân trị sau

p	q	$p \text{ imp2 } q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	F

- (a) Chứng minh rằng

$$(p \text{ imp2 } q) \wedge (q \text{ imp2 } p) \neq p \leftrightarrow q$$

- (b) Chứng minh rằng (a) đúng ngay cả khi chúng ta thay đổi hàng thứ ba của bảng chân trị cho imp2 thành F T F.