COPYRIGHT NOTICE
THÔNG BÁO BẢN QUYỀN

VNU-HUS MAT3500: Toán rời rạc

Lôgic và Chứng minh

Hoàng Anh Đức

Bộ môn Tin học, Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học KHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Nội dung

Lôgic mệnh đề
Mệnh đề
Toán tử lôgic và bảng chân trị
Lôgic và các toán tử bit
Các mệnh đề tương đương
Phân loại mệnh đề
Tương đương lôgic
Lôgic vị từ
Vị từ
Lượng từ
Phủ định với lượng từ
Lồng các lượng từ
Chứng minh
Một số thuật ngữ
Một số phương pháp chứng minh
Ví dụ

Mệnh đề

Một *mệnh đề (proposition)* là một phát biểu đúng (True) hoặc sai (False), chứ không thể vừa đúng vừa sai

- ✔ Hà Nội là thủ đô của Việt Nam
- ✔ $1 = 2$
- ✔ $9^3 + 8^3 + 7^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 - 1^3 = 2023$
- ✔ Mọi số chẵn lớn hơn hoặc bằng 4 là tổng của hai số nguyên tố (Giả thuyết Goldbach)
- ✖ Mấy giờ rồi?
- ✖ Hãy đọc quyển sách này
- ✖ Màu xanh là tốt nhất
- ✖ $x + 1 = 2$

Bài tập 1

Câu nào sau đây là một mệnh đề?

(1) *Trái Đất là một hành tinh*

(2) $1 + 2$

(3) $1 + 2 = 3$

(4) *Hôm nay trời mưa*

(5) *Liệu có số nguyên âm x nào thỏa mãn $x^2 = 2x$?*

(6) $x + y = 5$

(7) *A ha ha ha ha*

(8) *Xem cuối trang này*

(9) *Rất tốt!*

(10) *Nếu $x = 3, y = 4, z = 5$ thì $x^2 + y^2 = z^2$*

- Ta thường sử dụng các chữ cái $p, q, r, s, \dots$ để ký hiệu các mệnh đề
- Mệnh đề đúng có *giá trị chân lý đúng* T (True). Mệnh đề sai có *giá trị chân lý sai* F (False)
- *Mệnh đề phức hợp (compound proposition)* được xây dựng bằng cách tổ hợp một hoặc nhiều mệnh đề thông qua các *toán tử lôgic (logical operators)*. Ngược lại, *mệnh đề nguyên tử (atomic proposition)* không thể biểu diễn được qua các mệnh đề đơn giản hơn

Phủ định	NOT	$\neg$
Phép hội	AND	$\wedge$
Phép tuyển	OR	$\vee$
Phép tuyển loại	XOR	$\oplus$
Phép kéo theo	IMPLIES	$\rightarrow$
Phép tương đương	IFF	$\leftrightarrow$

- Mối quan hệ giữa các giá trị chân lý của các mệnh đề được thể hiện thông qua *bảng chân trị (truth table)*

- *Phủ định (negation)* của mệnh đề p, ký hiệu $\neg p$ hoặc $\overline{p}$, là mệnh đề "không phải là p". Giá trị chân lý $\neg p =$ T khi và chỉ khi $p =$ F và $\neg p =$ F khi và chỉ khi $p =$ T
  - Với $p :=$ "2 là số chẵn" thì $\neg p :=$ "2 không là số chẵn"
- Bảng chân trị

p	$\neg p$
T	F
F	T

- *Hội (Conjunction)* của hai mệnh đề p và q, ký hiệu $p \wedge q$ hoặc pq, là mệnh đề "p và q". Giá trị chân lý $p \wedge q =$ T khi và chỉ khi cả p và q đều nhận giá trị T, và trong các trường hợp còn lại $p \wedge q =$ F
  - Với $p :=$ "2 là số chẵn" và $q :=$ "2 là số nguyên tố" thì $p \wedge q :=$ "2 là số chẵn và 2 là số nguyên tố"
- Bảng chân trị

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

- *Tuyển (Disjunction/Inclusive Or)* của hai mệnh đề p và q, ký hiệu $p \vee q$ hoặc $p + q$, là mệnh đề "p hoặc q". Giá trị chân lý $p \vee q = \mathrm{F}$ khi và chỉ khi cả p và q đều nhận giá trị F, và trong các trường hợp còn lại $p \vee q = \mathrm{T}$
  - Với $p :=$ "2 là số chẵn" và $q :=$ "2 là số nguyên tố" thì $p \vee q :=$ "2 là số chẵn hoặc 2 là số nguyên tố"
- Bảng chân trị

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- *Tuyển loại (Exclusive Or)* của hai mệnh đề p và q, ký hiệu $p \oplus q$, là mệnh đề "hoặc p hoặc q". Giá trị chân lý $p \oplus q =$ T khi và chỉ khi chính xác một trong hai mệnh đề p và q nhận giá trị T, và trong các trường hợp còn lại $p \oplus q =$ F
  - Với $p :=$ "2 là số chẵn" và $q :=$ "2 là số nguyên tố" thì $p \oplus q :=$ "Hoặc 2 là số chẵn hoặc 2 là số nguyên tố, nhưng không phải cả hai"
- Bảng chân trị

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- **Chú ý:** Khi $p =$ T và $q =$ T thì $p + q =$ T nhưng $p \oplus q =$ F

- Mệnh đề *kéo theo (implication)* $p \to q$, với p, q là hai mệnh đề cho trước, là mệnh đề "nếu p, thì q". Giá trị chân lý $p \to q =$ F khi và chỉ khi $p =$ T và $q =$ F, và trong mọi trường hợp còn lại $p \to q =$ T
  - Ta gọi p là "giả thiết (hypothesis)" và q là "kết luận (conclusion)". Ta cũng nói "p là điều kiện đủ (sufficient) cho q" và "q là điều kiện cần (necessary) cho p"
  - Với $p :=$ "2 là số chẵn" và $q :=$ "2 là số nguyên tố" thì $p \to q :=$ "Nếu 2 là số chẵn, thì 2 là số nguyên tố"
- Bảng chân trị

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- Từ $p \to q$ ta có thể xây dựng một số mệnh đề mới
  - $q \to p$ là *mệnh đề đảo (converse)* của $p \to q$
  - $\neg q \to \neg p$ là *mệnh đề phản đảo (contrapositive)* của $p \to q$
  - $\neg p \to \neg q$ là *mệnh đề nghịch đảo (inverse)* của $p \to q$
- Ví dụ với $p \to q :=$ “Nếu 2 là số chẵn, thì 2 là số nguyên tố”
  - $q \to p :=$ “Nếu 2 là số nguyên tố, thì 2 là số chẵn”
  - $\neg q \to \neg p :=$ “Nếu 2 không là số nguyên tố, thì 2 không là số chẵn”
  - $\neg p \to \neg q :=$ “Nếu 2 không là số chẵn, thì 2 không là số nguyên tố”

Bài tập 2

Xây dựng bảng chân trị cho các mệnh đề trên. Có nhận xét gì về các giá trị của các mệnh đề này?

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$q \to p$	$\neg q \to \neg p$	$\neg p \to \neg q$
T	T			T			
T	F			F			
F	T			T			
F	F			T			

- Mệnh đề *tương đương (bi-implication)* $p \leftrightarrow q$, với p, q là hai mệnh đề cho trước, là mệnh đề "p khi và chỉ khi q". Giá trị chân lý $p \leftrightarrow q =$ T khi và chỉ khi p và q nhận cùng giá trị, và trong các trường hợp khác $p \leftrightarrow q =$ F
  - Với $p :=$ "2 là số chẵn" và $q :=$ "2 là số nguyên tố", ta có $p \leftrightarrow q :=$ "2 là số chẵn khi và chỉ khi 2 là số nguyên tố"
- Bảng chân trị

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

12

- Tổng kết các toán tử lôgic đã đề cập

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T	T

- Thứ tự ưu tiên của các toán tử lôgic trong một mệnh đề phức hợp: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$. Nên sử dụng *ngoặc đơn* "(" và ")" để xác định thứ tự ưu tiên
  - $\neg p \wedge q$ *nghĩa là* $(\neg p) \wedge q$ chứ không phải $\neg(p \wedge q)$

Ví dụ 1

Xây dựng bảng chân trị cho mệnh đề $(p \vee \neg q) \to q$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$(p \vee \neg q) \to q$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	T	F

Ví dụ 2

Xây dựng bảng chân trị cho mệnh đề $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \oplus q)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$	$\neg(p \oplus q)$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \oplus q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T

- Một *bit* (binary digit $=$ chữ số nhị phân) có giá trị 0 hoặc 1
- Sử dụng bit để biểu diễn giá trị chân lý: 1 cho T và 0 cho F
- Một *chuỗi nhị phân độ dài n* là một dãy sắp thứ tự $x_1 x_2 \dots x_n$ trong đó mỗi x_i là một bit ($1 \leq i \leq n$).
  - Ví dụ, 1001101010 là một chuỗi nhị phân độ dài 10
- Các *toán tử bit*: $\overline{}$ (NOT), $\wedge$ (AND), $\vee$ (OR), $\oplus$ (XOR)

x	y	$\overline{x}$	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \oplus y$
1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0

Tính toán với chuỗi nhị phân: thực hiện theo từng bit

- $\overline{x_1 \dots x_n} = (\overline{x_1}) \dots (\overline{x_n})$
- $x_1 \dots x_n \wedge y_1 \dots y_n = (x_1 \wedge y_1) \dots (x_n \wedge y_n)$
- $x_1 \dots x_n \vee y_1 \dots y_n = (x_1 \vee y_1) \dots (x_n \vee y_n)$
- $x_1 \dots x_n \oplus y_1 \dots y_n = (x_1 \oplus y_1) \dots (x_n \oplus y_n)$

Bài tập 3

(a) $\overline{11010} =$

(b) $11010 \vee 10001 =$

(c) $11010 \wedge 10001 =$

(d) $11010 \oplus 10001 =$

Các mệnh đề tương đương
Phân loại mệnh đề

- Một *hằng đúng (tautology)* là một mệnh đề phức hợp luôn luôn đúng với mọi giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần
  - Ký hiệu $\mathbf{T}$
  - $p \vee \neg p$
- Một *mâu thuẫn (contradiction)* là một mệnh đề phức hợp luôn luôn sai với mọi giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần
  - Ký hiệu $\mathbf{F}$
  - $p \wedge \neg p$
- Một *tiếp liên (contingency)* là một mệnh đề phức hợp không phải là hằng đúng cũng không phải là mâu thuẫn
  - $(p \vee q) \to r$

Bài tập 4

Xây dựng bảng chân trị cho các mệnh đề ví dụ trên

Các mệnh đề tương đương
Tương đương lôgic

- Mệnh đề phức hợp p *tương đương lôgic (logically equivalent)* với mệnh đề phức hợp q, ký hiệu $p \equiv q$ hoặc $p \Leftrightarrow q$, khi và chỉ khi mệnh đề $p \leftrightarrow q$ là một hằng đúng
- **Chú ý:** p và q là tương đương lôgic khi và chỉ khi p và q cùng nhận một giá trị chân lý giống nhau trong mỗi hàng tương ứng của các bảng chân trị của chúng

Ví dụ 3

Chứng minh rằng $\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$ (luật De Morgan)

p	q	$p \land q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \lor \neg q$	$\neg(p \land q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T

Bài tập 5

Chứng minh các tương đương lôgic sau bằng bảng chân trị

- $p \oplus q \equiv (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)$
- $p \oplus q \equiv (p \lor q) \land \neg(p \land q)$

Các mệnh đề tương đương

Tương đương lôgic

Một số tương đương lôgic quan trọng

Tên gọi	Tương đương lôgic
Luật đồng nhất (Identity laws)	$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$
Luật nuốt (Domination laws)	$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
Luật lũy đẳng (Idempotent laws)	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$
Luật phủ định kép (Double negation laws)	$\neg(\neg p) \equiv p$
Luật giao hoán (Commutative laws)	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Luật kết hợp (Associative laws)	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Luật phân phối (Distributive laws)	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Một số tương đương lôgic quan trọng (tiếp)

Tên gọi	Tương đương lôgic
Luật De Morgan (De Morgan's laws)	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
Luật hấp thụ (Absorption laws)	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Luật phủ định (Negation laws)	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$

Chú ý: Trong bảng các tương đương lôgic quan trọng ở trên, $\mathbf{T}$ là một mệnh đề phức hợp luôn đúng (hằng đúng) và $\mathbf{F}$ là một mệnh đề phức hợp luôn sai (mâu thuẫn)

Bài tập 6

Chứng minh các tương đương lôgic quan trọng nêu trên bằng cách lập bảng chân trị

Ví dụ 4

Chứng minh $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ và $\neg p \wedge \neg q$ là tương đương lôgic bằng cách sử dụng các tương đương lôgic đã biết

$$
\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg((p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)) && \text{Luật phân phối}\\
&\equiv \neg(\mathbf{T} \wedge (p \vee q)) && \text{Luật phủ định}\\
&\equiv \neg((p \vee q) \wedge \mathbf{T}) && \text{Luật giao hoán}\\
&\equiv \neg(p \vee q) && \text{Luật đồng nhất}\\
&\equiv \neg p \wedge \neg q && \text{Luật De Morgan}
\end{aligned}
$$

Bài tập 7

Kiểm tra lại ví dụ trên bằng cách lập bảng chân trị

Các mệnh đề tương đương
Tương đương lôgic

- Một số tương đương lôgic liên quan đến phép kéo theo
  - $p \to q \equiv \neg p \vee q$
  - $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
  - $p \vee q \equiv \neg p \to q$
  - $p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$
  - $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
  - $(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
  - $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
  - $(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
  - $(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$
- Một số tương đương lôgic liên quan đến phép tương đương
  - $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
  - $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
  - $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
  - $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Bài tập 8

Chứng minh các tương đương lôgic trên bằng cách lập bảng chân trị hoặc sử dụng các tương đương lôgic đã biết

Ví dụ 5

Chứng minh $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ là một hằng đúng

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \to (p \vee q) &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{Từ } p \to q \equiv \neg p \vee q \\
&\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) && \text{Luật De Morgan} \\
&\equiv (p \vee \neg p) \vee (q \vee \neg q) && \text{Luật giao hoán, kết hợp} \\
&\equiv \mathbf{T} \vee \mathbf{T} && \text{Luật phủ định} \\
&\equiv \mathbf{T} && \text{Luật nuốt}
\end{aligned}
$$

Bài tập 9

Kiểm tra lại ví dụ trên bằng cách lập bảng chân trị cho $(p \wedge q) \to (p \vee q)$

Các mệnh đề tương đương
Tương đương lôgic

- Một tập $\mathcal{C}$ các toán tử lôgic được gọi là *đầy đủ (functionally complete)* nếu mỗi mệnh đề phức hợp tương đương với một mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử trong $\mathcal{C}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee\}$ là một tập (các toán tử lôgic) đầy đủ

Ví dụ 6

Tìm một mệnh đề tương đương của $p \to q$ chỉ sử dụng các toán tử $\neg, \wedge, \vee$

- Ứng với *mỗi hàng có giá trị* T ở cột $p \to q$, ta muốn tìm một biểu thức *chỉ đúng với các giá trị của* p *và* q *ở hàng đó, và sai với mọi giá trị khác*.

p	q	$p \to q$	
T	T	T	$p \wedge q$
T	F	F	
F	T	T	$\neg p \wedge q$
F	F	T	$\neg p \wedge \neg q$

- $p \to q$ đúng khi *ít nhất một* biểu thức trên có giá trị T

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Chú ý: Phương pháp sử dụng trong ví dụ trên có thể áp dụng với mọi mệnh đề phức hợp. Mệnh đề thu được gọi là *dạng tuyển chuẩn tắc (disjunctive normal form - DNF)*

Các mệnh đề tương đương

Tương đương lôgic

- Một tập $\mathcal{C}$ các toán tử lôgic được gọi là *đầy đủ (functionally complete)* nếu mỗi mệnh đề phức hợp tương đương với một mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử trong $\mathcal{C}$
  - $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee\}$ là một tập (các toán tử lôgic) đầy đủ

Ví dụ 6

Tìm một mệnh đề tương đương của $p \to q$ chỉ sử dụng các toán tử $\neg, \wedge, \vee$

- Ứng với *mỗi hàng có giá trị* F ở cột $p \to q$, ta muốn tìm một biểu thức *chỉ sai với các giá trị của p và q ở hàng đó, và đúng với mọi giá trị khác*.

p	q	$p \to q$	
T	T	T	
T	F	F	$\neg p \vee q$
F	T	T	
F	F	T	

- $p \to q$ sai khi *tất cả* biểu thức trên có giá trị F

$$\neg p \vee q$$

Chú ý: Phương pháp sử dụng trong ví dụ trên có thể áp dụng với mọi mệnh đề phức hợp. Mệnh đề thu được gọi là *dạng hội chuẩn tắc (conjunctive normal form - CNF)*

Bài tập 10

Tìm mệnh đề tương đương chỉ sử dụng các toán tử lôgic trong $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge, \vee\}$ *của các mệnh đề*

(1) $p \oplus q$

(2) $p \leftrightarrow q$

Bài tập 11

Tập các toán tử lôgic $\mathcal{C}$ *sau có đầy đủ không? Vì sao?*

(a) $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge\}$

(b) $\mathcal{C} = \{\neg, \vee\}$

(c) $\mathcal{C} = \{\wedge, \vee\}$

Vị từ

Một *vị từ (predicate)* là một *hàm mệnh đề (propositional function)* (từ tập các đối tượng đến tập các mệnh đề) mô tả thuộc tính của các đối tượng và mối quan hệ giữa chúng

- Các biến (đối tượng) thường được ký hiệu bởi các chữ cái $x, y, z, \dots$ và có thể được thay thế bằng các giá trị cụ thể từ một *miền (domain)* $\mathcal{D}$ tương ứng cho trước
- Các chữ in hoa $P, Q, R, \dots$ thường được dùng để ký hiệu các hàm mệnh đề (vị từ)
- Với $n \geq 1$, ta gọi $P(x_1, \dots, x_n)$ là *vị từ (n-ngôi) ((n-place) predicate) xác định trên miền $\mathcal{D} = D_1 \times \cdots \times D_n$* nếu $P(a_1, \dots, a_n)$ là một mệnh đề với bộ $(a_1, \dots, a_n)$ bất kỳ trong $\mathcal{D}$ ($a_1 \in D_1, \dots, a_n \in D_n$)

Ví dụ 7

- $P(x) :=$ "x lớn hơn 3" ($P :=$ "lớn hơn 3" và x là một biến) với x là số tự nhiên. *$P(x)$ là vị từ xác định trên miền $\mathcal{D} = \mathbb{N}$*
- $Q(x, y, z) :=$ "x cho y điểm z" với x, y là tên riêng và z là số tự nhiên. *$Q(x, y, z)$ là vị từ xác định trên miền $\mathcal{D} = T \times T \times \mathbb{N}$ trong đó T là tập các tên riêng*
- *$P(x)$ không phải là mệnh đề* nhưng *$P(3)$ là mệnh đề*. *$Q(x, y, z)$ không phải là mệnh đề* nhưng *$Q(\text{Tý}, \text{Tèo}, 10)$ là mệnh đề*

Bài tập 12

$P(x) := x > 0$ *là vị từ xác định trên miền $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$. Tìm giá trị chân lý của các mệnh đề sau*

(a) $P(3) \vee P(-1)$

(b) $P(3) \wedge P(-1)$

(c) $P(3) \rightarrow P(-1)$

(d) $P(3) \rightarrow \neg P(-1)$

Lượng từ

Lượng từ (quantifier) (ví dụ như *tất cả*, *nhiều*, *một số*, *không có*, v.v...) thường được sử dụng với vị từ để định lượng (đếm) các đối tượng (biến) "thỏa mãn" vị từ đó

- Hai lượng từ quan trọng nhất

Lượng từ	**Ký hiệu**
với mọi (universal quantifier)	$\forall$
tồn tại (existential quantifier)	$\exists$

- $\forall x\, P(x)$ nghĩa là "*với mọi* giá trị của x trong miền xác định $\mathcal{D}$, $P(x)$ đúng"
- $\exists x\, P(x)$ nghĩa là "*tồn tại* giá trị của x trong miền xác định $\mathcal{D}$ (nghĩa là có thể có một hoặc nhiều giá trị thỏa mãn), $P(x)$ đúng"
- *$P(x)$ không phải là mệnh đề* nhưng *$\forall x\, P(x)$ và $\exists x\, P(x)$ là mệnh đề*

- $\forall x\, P(x)$: *với mọi* giá trị của x trong miền xác định $\mathcal{D}$, $P(x)$ đúng
- $\forall x\, P(x)$ là
  - *đúng* nếu $P(x)$ đúng với mọi x trong $\mathcal{D}$
  - *sai* nếu $P(x)$ sai với ít nhất một giá trị của x trong $\mathcal{D}$
  - Với $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và $P(x) :=$ "$x^2 \geq 0$", mệnh đề $\forall x\, P(x)$ đúng
  - Với $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và $P(x) :=$ "$x^2 - 1 \geq 0$", mệnh đề $\forall x\, P(x)$ sai
- Một *phản ví dụ (counterexample)* của mệnh đề $\forall x\, P(x)$ là một giá trị x trong miền $\mathcal{D}$ sao cho $P(x)$ sai
- Nếu $\mathcal{D} = \emptyset$ thì mệnh đề $\forall x\, P(x)$ đúng
- Nếu có thể liệt kê tất cả các phần tử của $\mathcal{D}$, ví dụ như $x_1, x_2, \dots, x_n$, thì $\forall x\, P(x)$ tương đương lôgic với

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$$

- $\exists x\, P(x)$: *tồn tại* giá trị của x trong miền xác định $\mathcal{D}$ (nghĩa là có thể có một hoặc nhiều giá trị thỏa mãn), $P(x)$ đúng
- $\exists x\, P(x)$
  - *đúng* nếu $P(x)$ đúng với ít nhất một x trong $\mathcal{D}$
  - *sai* nếu $P(x)$ sai với mọi x trong $\mathcal{D}$
  - Với $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và $P(x) :=$ "$x^2 = 2$", mệnh đề $\exists x\, P(x)$ đúng
  - Với $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$ và $P(x) :=$ "$x^2 = 2$", mệnh đề $\exists x\, P(x)$ sai
- Nếu $\mathcal{D} = \emptyset$ thì mệnh đề $\exists x\, P(x)$ sai
- Nếu có thể liệt kê tất cả các phần tử của $\mathcal{D}$, ví dụ như $x_1, x_2, \dots, x_n$, thì $\exists x\, P(x)$ tương đương lôgic với

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)$$

Ví dụ 8

Mô tả câu "Tất cả sinh viên trong lớp này đã học môn Đại Số" bằng vị từ và lượng từ

- $C(x)$:= "x đã học môn Đại Số"
- Nếu $\mathcal{D}$ là tập *các sinh viên trong lớp này* $\forall x\, C(x)$
- Nếu $\mathcal{D}$ là tập *tất cả mọi người*. Đặt $S(x)$:= "x là sinh viên trong lớp này" $\forall x\, (S(x) \rightarrow C(x))$

Chú ý: Tại sao không phải là $\forall x\, (S(x) \wedge C(x))$?

Ví dụ 9

Mô tả câu "Một số sinh viên trong lớp này đã học môn Đại Số" bằng vị từ và lượng từ

- $C(x)$:= "x đã học môn Đại Số"
- Nếu $\mathcal{D}$ là tập *các sinh viên trong lớp này* $\exists x\, C(x)$
- Nếu $\mathcal{D}$ là tập *tất cả mọi người*. Đặt $S(x)$:= "x là sinh viên trong lớp này" $\exists x\, (S(x) \wedge C(x))$

Ví dụ 10

Giả sử biến x nhận giá trị từ miền $\mathcal{D}$. Ta chứng minh $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$. Cụ thể, ta chứng minh hai điều

(1) *Nếu* $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$ *đúng, thì* $(\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$ *đúng*

- Giả sử $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$ đúng. Do đó, với mọi $a \in \mathcal{D}$, $P(a) \wedge Q(a)$ đúng, suy ra $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng. Do $P(a)$ đúng với mọi $a \in \mathcal{D}$, $\forall x\,P(x)$ đúng. Do $Q(a)$ đúng với mọi $a \in \mathcal{D}$, $\forall x\,Q(x)$ đúng. Do đó $(\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$ đúng

(2) *Nếu* $(\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$ *đúng, thì* $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$ *đúng*

- Giả sử $(\forall x\,P(x)) \wedge (\forall x\,Q(x))$ đúng. Do đó $(\forall x\,P(x))$ đúng và $(\forall x\,Q(x))$ đúng, suy ra với mọi $a \in \mathcal{D}$, $P(a)$ đúng và $Q(a)$ đúng. Như vậy, với mọi $a \in \mathcal{D}$, $P(a) \wedge Q(a)$ đúng. Theo định nghĩa, $\forall x\,(P(x) \wedge Q(x))$ đúng.

Bài tập 13

Chứng minh $\exists x\,(P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x\,P(x)) \vee (\exists x\,Q(x))$

- Trước đó, ta thường phải chỉ rõ miền xác định $\mathcal{D}$ có chứa các giá trị của biến trước khi phát biểu mệnh đề với vị từ và lượng từ. Để thuận tiện, *có thể chỉ ra $\mathcal{D}$ ngay trong mệnh đề*
  - $\forall x > 0\, P(x)$ nghĩa là "Với mọi số $x > 0$, $P(x)$ đúng". ($\mathcal{D}$ là tập tất cả các số lớn hơn không.) Thực ra, đây là cách viết ngắn gọn của mệnh đề $\forall x\, Q(x)$ trong đó $Q(x) := (x > 0) \to P(x)$
  - $\exists x > 0\, P(x)$ nghĩa là "Tồn tại số $x > 0$, $P(x)$ đúng". ($\mathcal{D}$ là tập tất cả các số lớn hơn không.) Thực ra, đây là cách viết ngắn gọn của mệnh đề $\exists x\, Q(x)$ trong đó $Q(x) := (x > 0) \wedge P(x)$
- Các lượng từ $\forall$ và $\exists$ có *thứ tự ưu tiên cao hơn tất cả các toán tử lôgic* đã đề cập
  - $\forall x\, P(x) \vee Q(x)$ *nghĩa là* $(\forall x\, P(x)) \vee Q(x)$ chứ không phải $\forall x\, (P(x) \vee Q(x))$

- Vị từ $P(x)$ có *biến tự do (free variable)* x (nghĩa là, giá trị của x không xác định)
- Lượng từ ($\forall$ hoặc $\exists$) sử dụng với một vị từ có một hoặc nhiều biến tự do "ràng buộc" những biến này, tạo thành một biểu thức có một hoặc nhiều *biến ràng buộc (bound variable)*

Ví dụ 11

- $P(x, y)$ có hai biến tự do: x và y
- $\forall x\, P(x, y)$ có một biến tự do y và một biến ràng buộc x

- Biểu thức *không có bất kỳ biến tự do nào*, ví dụ $\forall x\, P(x)$, là mệnh đề
- Biểu thức *có một hoặc nhiều biến tự do*, ví dụ $\forall x\, P(x, y)$, không là mệnh đề

- *Phủ định* của mệnh đề có lượng từ
  - $\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$
  - $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$
- Hai tương đương lôgic trên được gọi là *Luật De Morgan cho lượng từ (De Morgan's Laws for Quantifiers)*. Lý do của tên gọi này là nếu ta có thể liệt kê toàn bộ các phần tử trong miền $\mathcal{D}$, ví dụ như $x_1, \dots, x_n$, thì

$$\begin{aligned}
\neg\forall x\, P(x) &\equiv \neg(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)) \\
&\equiv \neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \cdots \vee \neg P(x_n) \quad \text{Luật De Morgan} \\
&\equiv \exists x\, \neg P(x) \\
\neg\exists x\, P(x) &\equiv \neg(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)) \\
&\equiv \neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \cdots \wedge \neg P(x_n) \quad \text{Luật De Morgan} \\
&\equiv \forall x\, \neg P(x)
\end{aligned}$$

Ví dụ 12

$P(x) :=$ "x đã học môn Đại Số" với x là một sinh viên trong lớp này

- $\forall x\, P(x) :=$ "Tất cả sinh viên trong lớp này đã học môn Đại Số"
- $\neg\forall x\, P(x) :=$ "Không phải tất cả sinh viên trong lớp này đã học môn Đại Số" $\equiv$ "Ít nhất một sinh viên trong lớp này đã không học môn Đại Số" $=: \exists x\, \neg P(x)$
- $\exists x\, P(x) :=$ "Tồn tại một sinh viên trong lớp này đã học môn Đại Số"
- $\neg\exists x\, P(x) :=$ "Không thể tồn tại một sinh viên trong lớp này đã học môn Đại Số" $\equiv$ "Tất cả sinh viên trong lớp này đã không học môn Đại Số" $=: \forall x\, \neg P(x)$

Ví dụ 13

$P(x, y) :=$ "x nhỏ hơn y" xác định trên miền $\mathcal{D} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

- $\exists y\, P(x, y) :=$ "có số nguyên y sao cho x nhỏ hơn y" (Biểu thức với 1 biến tự do—không phải mệnh đề)
- $\forall x\, (\exists y\, P(x, y)) :=$ "với mọi số nguyên x có số nguyên y sao cho x nhỏ hơn y" (Biểu thức với 0 biến tự do—là mệnh đề)

Bài tập 14

Cho $x \in \mathbb{Z}$ và $y \in \mathbb{Z}$ và $P(x, y) := x < y$. Xác định giá trị của các mệnh đề sau

- $\forall x \forall y\, P(x, y)$
- $\forall x \exists y\, P(x, y)$
- $\exists x \forall y\, P(x, y)$
- $\exists x \exists y\, P(x, y)$

- Một số tương đương lôgic:
  - $\forall x \forall y\, P(x, y) \equiv \forall y \forall x\, P(x, y)$
  - $\exists x \exists y\, P(x, y) \equiv \exists y \exists x\, P(x, y)$
  - Để thuận tiện, có thể nối các lượng từ cùng loại
    - $\forall x \forall y\, P(x, y) \equiv \forall x, y\, P(x, y)$
- Trừ khi tất cả các lượng từ đều là $\forall$ hoặc đều là $\exists$, *thứ tự các lượng từ là quan trọng*
  - $\forall x \exists y\, P(x, y)$ *khác với* $\exists y \forall x\, P(x, y)$
  - Ví dụ, với x, y *là các số nguyên*, mệnh đề $\forall x \exists y\, (x < y)$ *đúng*, vì với mỗi x ta có thể chọn $y = x + 1$ và hiển nhiên $x < y$. Ngược lại, mệnh đề $\exists y \forall x\, (x < y)$ *sai*, vì không tồn tại số nguyên lớn nhất

Bài tập 15

Các mệnh đề sau khi nào đúng và khi nào sai?

(1) $\forall x \forall y\, P(x, y) \equiv \forall y \forall x\, P(x, y)$

(2) $\forall x \exists y\, P(x, y)$

(3) $\exists y \forall x\, P(x, y)$

(4) $\exists x \exists y\, P(x, y) \equiv \exists y \exists x\, P(x, y)$

Chứng minh

Một số thuật ngữ

- *Chứng minh (proof)*: một lý luận hợp lý chỉ ra tính đúng đắn của một mệnh đề toán học.
- *Tiên đề (axiom/postulate)*: một mệnh đề được giả thiết là đúng
- *Định lý (theorem)*: một mệnh đề đã được chứng minh là đúng
- *Mệnh đề (proposition)*: một định lý "không quá quan trọng"
- *Bổ đề (lemma)*: một định lý nhỏ có thể được sử dụng như một công cụ hỗ trợ chứng minh các định lý khác lớn hơn
- *Hệ quả (corollary)*: một định lý nhỏ thu được bằng cách trực tiếp áp dụng một định lý khác lớn hơn
- *Giả thuyết (conjecture)*: một mệnh đề mà tính đúng/sai của nó chưa được xác định, nhưng thường được "tin là đúng" thông qua một số bằng chứng hoặc qua kinh nghiệm, dự đoán của một chuyên gia

Mục tiêu

Chứng minh p đúng

- **Chứng minh trực tiếp (direct proof)**
- **Chứng minh gián tiếp (indirect proof):** Giả thiết $\neg p$ đúng, chứng minh $\neg p \to \mathbf{F}$ (phương pháp *Chứng minh phản chứng (Proof by Contradiction)*)

Mục tiêu

Chứng minh $p \to q$ đúng

- **Chứng minh hiển nhiên (trivial proof):** Chứng minh q đúng mà không cần giả thiết gì khác
- **Chứng minh trực tiếp (direct proof):** Giả thiết p đúng, chứng minh q
- **Chứng minh gián tiếp (indirect proof)**
  - **Chứng minh phản đảo (Proof by Contraposition) ($\neg q \to \neg p$):** Giả thiết $\neg q$ đúng, chứng minh $\neg p$
  - **Chứng minh phản chứng (Proof by Contradiction):** Giả thiết $p \land \neg q$ đúng, và chỉ ra rằng điều này dẫn đến một mâu thuẫn (nghĩa là, chứng minh $(p \land \neg q) \to \mathbf{F}$)
- **Chứng minh rỗng (vacuous proof):** Chứng minh $\neg p$ đúng mà không cần giả thiết gì khác

Một số nguyên n là số *chẵn (even)* khi và chỉ khi $n = 2k$ với k là số nguyên nào đó; n là số *lẻ (odd)* khi và chỉ khi $n = 2k + 1$ với k là số nguyên nào đó

Định lý 1

(Với mọi số nguyên n) n không thể vừa chẵn vừa lẻ

Chứng minh phản chứng.

- **Nhắc lại:** Để chứng minh p, ta chứng minh $\neg p \to \mathbf{F}$
- Giả sử tồn tại một số nguyên n vừa chẵn vừa lẻ
- Do n chẵn, $n = 2k$ với số nguyên k nào đó
- Do n lẻ, $n = 2j + 1$ với số nguyên j nào đó
- Do đó, $2k = 2j + 1$, suy ra $k - j = \frac{1}{2}$. Mệnh đề này sai với mọi số nguyên k và j, đây là một mâu thuẫn. Ta có điều phải chứng minh

Định lý 2

(Với mọi số nguyên n) Nếu n là số lẻ, thì n^2 cũng là số lẻ

Chứng minh trực tiếp.

- Nếu n lẻ, thì $n = 2k + 1$ với k là số nguyên nào đó
- Do đó, $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
- Do đó, $n^2 = 2j + 1$ với $j = 2k^2 + 2k$ là số nguyên
- Theo định nghĩa, n^2 lẻ

□

Định lý 3

(Với mọi số nguyên n) Nếu $3n + 2$ là số lẻ, thì n cũng là số lẻ

Chứng minh phản đảo.

- **Nhắc lại:** để chứng minh $p \to q$, ta chứng minh $\neg q \to \neg p$
- *(Mệnh đề phản đảo: Nếu n chẵn, thì $3n + 2$ cũng chẵn)*
- Giả sử kết luận của định lý trên là sai, nghĩa là n chẵn
- Do đó $n = 2k$ với số nguyên k nào đó
- Suy ra $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$
- Từ đó, $3n + 2 = 2j$ với $j = 3k + 1$ là số nguyên, và do đó là số chẵn
- Ta đã chứng minh $\neg$*(n lẻ)* $\to \neg$*($3n + 2$ lẻ)* đúng, do đó mệnh đề phản đảo *($3n + 2$ lẻ)* $\to$ *(n lẻ)* cũng đúng

$\square$

Định lý 4

(Với mọi số nguyên n) Nếu n vừa chẵn vừa lẻ, thì $n^2 = n + n$

Chứng minh rỗng.

- **Nhắc lại:** để chứng minh $p \to q$, ta chứng minh $\neg p$ mà không cần bất cứ giả thiết nào
- Mệnh đề "n vừa chẵn vừa lẻ" sai với mọi số nguyên n
- Ta có điều phải chứng minh (Tập các giả thiết là rỗng)

$\square$

Định lý 5

(Với mọi số nguyên n) Nếu n là tổng của hai số nguyên tố, thì hoặc n chẵn hoặc n lẻ

Chứng minh hiển nhiên.

- **Nhắc lại:** để chứng minh $p \to q$, ta chứng minh q mà không cần bất cứ giả thiết nào
- Với mọi số nguyên n, mệnh đề "hoặc n chẵn hoặc n lẻ" đúng
- Do đó, kết luận của mệnh đề cần chứng minh luôn đúng, bất luận giả thiết là đúng hay sai
- Hiển nhiên là mệnh đề cần chứng minh luôn đúng

$\square$

Chứng minh sau của Định lý 1

(Với mọi số nguyên n) n không thể vừa chẵn vừa lẻ

đúng hay sai? Tại sao?

Chứng minh phản chứng.

- Giả sử tồn tại một số nguyên n vừa chẵn vừa lẻ
- Do n chẵn, $n = 2k$ với số nguyên k nào đó
- Do n lẻ, $n = 2k + 1$ với số nguyên k nào đó
- Do đó, $2k = 2k + 1$, suy ra $0 = 1$. Mệnh đề này sai với mọi số nguyên k, đây là một mâu thuẫn. Ta có điều phải chứng minh

$\square$

Chứng minh sau của mệnh đề

$$1 = 2$$

là sai. Tại sao?

Chứng minh.

Gọi a, b là hai số nguyên dương bằng nhau.

(1) $a = b$ Giả thiết

(2) $a^2 = ab$ Nhân hai vế của (1) với a

(3) $a^2 - b^2 = ab - b^2$ Trừ b^2 từ cả hai vế của (2)

(4) $(a - b)(a + b) = (a - b)b$ Phân tích hai vế của (3) thành nhân tử

(5) $a + b = b$ Chia cả hai vế của (4) cho $a - b$

(6) $2b = b$ Thay a bởi b trong (5) vì $a = b$, và đơn giản hóa

(7) $2 = 1$ Chia cả hai vế của (6) cho b

$\square$

Chứng minh sau của mệnh đề

(Với mọi số nguyên n) Nếu n^2 chẵn, thì n cũng chẵn

là đúng hay sai. Tại sao?

Chứng minh.

- Mệnh đề đúng với $n = 0$. Do đó ta chỉ xét $n \neq 0$
- Giả sử n^2 chẵn. Do đó $n^2 = 2k$ với số nguyên k nào đó
- Chia cả hai vế cho n, ta có $n = (2k)/n = 2(k/n)$
- Do đó, tồn tại số $j = k/n$ sao cho $n = 2j$
- Do tích của j và một số nguyên (2) là một số nguyên (n), nên j cũng là số nguyên
- Do đó n chẵn

□

48