ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
———————-

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II
NĂM HỌC 2022-2023
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **1**

Lớp học phần: **MAT3500 2, MAT3500 3** Ngành học: **KHMT&TT**

Thời gian làm bài: **120 phút** (không kể thời gian phát đề)

Chú ý: Đề gồm 6 câu/2 trang. Không sử dụng tài liệu. Điểm bài kiểm tra này chiếm 70% tổng số điểm của môn học. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1. (1 điểm) Một tập các toán tử lôgic $\mathcal{C}$ được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi mệnh đề phức hợp có một mệnh đề phức hợp tương đương lôgic với nó chỉ sử dụng các toán tử lôgic trong $\mathcal{C}$. Để thấy $\mathcal{C} = \{\neg, \wedge\}$ là một tập các toán tử lôgic đầy đủ, với hai mệnh đề p, q, hãy tìm các mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử lôgic trong $\mathcal{C}$ và tương đương lôgic với

(a) $p \vee q$

(b) $p \oplus q$

(c) $p \to q$

(d) $p \leftrightarrow q$

Câu 2. (1 điểm) Với một tập hợp A bất kỳ, gọi $\mathcal{P}(A)$ là tập hợp tất cả các tập con của A.

(a) Với các tập A, B bất kỳ, chứng minh rằng $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.

(b) Nếu thay $\cap$ bằng $\cup$ thì phát biểu ở phần (a) còn đúng hay không? Tại sao?

Câu 3. (2 điểm)

(a) Sử dụng Định lý Fermat nhỏ để tính $a_1 = 23^{2023} \bmod 3$, $a_2 = 23^{2023} \bmod 7$, và $a_3 = 23^{2023} \bmod 11$.

(b) Tìm số nguyên x thỏa mãn $0 \leq x < 231$ và

$$x \equiv a_1 \pmod 3 \tag{1}$$
$$x \equiv a_2 \pmod 7 \tag{2}$$
$$x \equiv a_3 \pmod{11} \tag{3}$$

trong đó a_1, a_2, a_3 là các số được tính ở phần (a). Sử dụng kết quả trên và Định lý phần dư Trung Hoa để tính $23^{2023} \bmod 231$. (Chú ý rằng $231 = 3 \times 7 \times 11$.)

Câu 4. (3 điểm)

(a) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số?

(b) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số chia hết 5?

(c) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số không chia hết cho 5?

(d) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số có ba chữ số đầu là 111 hoặc hai chữ số cuối là 00?

(e) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số có chứa 111111 (chuỗi 6 chữ số 1 liên tiếp)?

(f) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số có ít nhất hai chữ số giống nhau?

Câu 5. (1 điểm) Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng có $n \geq 2$ đỉnh.

(a) Chứng minh rằng không tồn tại đồng thời hai đỉnh phân biệt u, v thỏa mãn $\deg_G(u) = 0$ và $\deg_G(v) = n - 1$.

(b) Chứng minh rằng nếu với mọi $v \in V$ ta có $\deg_G(v) \geq n/2$ thì G là một đồ thị liên thông.

Câu 6. (2 điểm)

(a) Đồ thị C_n ($n \geq 3$) có bao nhiêu cạnh? Đồ thị Q_n ($n \geq 1$) có bao nhiêu cạnh?

(b) Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng. Chứng minh rằng nếu G có chính xác hai đỉnh bậc lẻ u và v thì có một đường đi trong G giữa u và v.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II, NĂM HỌC 2022-2023
Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **1**
Lớp học phần: **MAT3500 2, MAT3500 3** Ngành học: **KHMT&TT**

Lời giải 1. Một phương án giải là sử dụng bảng chân trị để đưa các biểu thức đã cho về dạng tuyển chuẩn tắc (DNF) hoặc dạng hội chuẩn tắc (CNF) rồi áp dụng luật De Morgan và các tương đương lôgic đã biết. **[1 điểm]**

(a) $p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$ luật De Morgan	**0.25**
(b) $p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ dạng tuyển chuẩn tắc $\equiv \neg(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge q))$ luật De Morgan hoặc $p \oplus q \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ dạng hội chuẩn tắc $\equiv \neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)$ luật De Morgan	**0.25**
(c) $p \to q \equiv \neg p \vee q$ dạng hội chuẩn tắc $\equiv \neg(p \wedge \neg q)$ luật De Morgan hoặc $p \to q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ dạng tuyển chuẩn tắc $\equiv \neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q))$ luật De Morgan	**0.25**

(d) $$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{dạng tuyển chuẩn tắc} \\ &\equiv \neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)) && \text{luật De Morgan} \end{aligned}$$ hoặc $$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\equiv (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) && \text{dạng hội chuẩn tắc} \\ &\equiv \neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge \neg q) && \text{luật De Morgan} \end{aligned}$$	**0.25**

Lời giải 2. **[1 điểm]**

(a) Ta chứng minh $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$ và $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Lấy một tập bất kỳ $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Ta có $X \in \mathcal{P}(A)$ và $X \in \mathcal{P}(B)$. Theo định nghĩa, $X \subseteq A$ và $X \subseteq B$. Do đó, $X \subseteq (A \cap B)$. Theo định nghĩa, $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Do đó $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$. Lấy một tập bất kỳ $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Theo định nghĩa, $X \subseteq (A \cap B)$. Do đó, $X \subseteq (A \cap B) \subseteq A$ và $X \subseteq (A \cap B) \subseteq B$. Theo định nghĩa, $X \in \mathcal{P}(A)$ và $X \in \mathcal{P}(B)$, hay $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Do đó $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.	**0.5**
(b) Nếu thay $\cap$ bằng $\cup$ thì phát biểu ở phần (a) không đúng, nghĩa là tồn tại các tập A, B thỏa mãn $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$. Để thấy điều này, xét các tập A, B thỏa mãn $A \setminus B \neq \emptyset$ và $B \setminus A \neq \emptyset$. Đặt $X = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Ta chứng minh $X \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ và $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Do $\emptyset \neq (B \setminus A) \subseteq X$, ta có $X \nsubseteq A$, và do đó $X \notin \mathcal{P}(A)$. Do $\emptyset \neq (A \setminus B) \subseteq X$, ta có $X \nsubseteq B$, và do đó $X \notin \mathcal{P}(B)$. Do đó, $X \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Mặt khác, do $X = A \Delta B \subseteq A \cup B$, ta có $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Để chứng minh phát biểu ở phần (a) không đúng khi thay $\cap$ bằng $\cup$, có thể lấy ví dụ cụ thể các tập A, B thỏa mãn $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$. Ví dụ với $A = \{1\}$ và $B = \{2\}$ thì $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$ và $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$, do đó $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$. Mặt khác, $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.	**0.5**

Lời giải 3. **[2 điểm]**

(a) Theo định lý Fermat nhỏ, với p là số nguyên tố và a là số nguyên không chia hết cho p, ta có $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Áp dụng định lý Fermat nhỏ, ta có $23^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $23^6 \equiv 1 \pmod{7}$, và $23^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. Do đó, $$\begin{aligned} a_1 &= 23^{2023} \bmod 3 = (23^2)^{1011} \times 23 \bmod 3 = [(23^2 \bmod 3)^{1011} \times (23 \bmod 3)] \bmod 3 = 2 \\ a_2 &= 23^{2023} \bmod 7 = (23^6)^{337} \times 23 \bmod 7 = [(23^6 \bmod 7)^{337} \times (23 \bmod 7)] \bmod 7 = 2 \\ a_3 &= 23^{2023} \bmod 11 = (23^{10})^{202} \times 23^3 \bmod 11 = [(23^{10} \bmod 11)^{202} \times (23^3 \bmod 11)] \bmod 11 \\ &= [23^3 \bmod 11] \bmod 11 = (23 \bmod 11)^3 \bmod 11 = 1 \end{aligned}$$	**1**

(b) Ta giải hệ phương trình sau	1

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 3 && (1)\\ x &\equiv 2 \pmod 7 && (2)\\ x &\equiv 1 \pmod{11} && (3)\end{aligned}$$

(Cách 1) **Sử dụng chứng minh của Định lý phần dư Trung Hoa.**

Đặt $m_1 = 3$, $m_2 = 7$, $m_3 = 11$, và $m = m_1m_2m_3 = 3 \times 7 \times 11 = 231$. Ta có

- $M_1 = m/m_1 = 7 \times 11 = 77$ và $y_1 = -1$ là một nghịch đảo của M_1 theo môđun $m_1 = 3$.
- $M_2 = m/m_2 = 3 \times 11 = 33$ và $y_2 = 3$ là một nghịch đảo của M_2 theo môđun $m_2 = 7$.
- $M_3 = m/m_3 = 3 \times 7 = 21$ và $y_3 = -1$ là một nghịch đảo của M_3 theo môđun $m_3 = 11$.

Một nghiệm của hệ phương trình là

$$x^\star = \sum_{i=1}^{3} a_iy_iM_i = 2 \times (-1) \times 77 + 2 \times 3 \times 33 + 1 \times (-1) \times 21 = 23.$$

Theo Định lý phần dư Trung Hoa, $x^\star$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình theo môđun 231, nghĩa là, mọi số nguyên x thỏa mãn $x \equiv x^\star \pmod{231}$ đều là nghiệm của hệ phương trình. Do đó, $x = x^\star \bmod 231 = 23$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình thỏa mãn $0 \leq x < 231$.

(Cách 2) **Sử dụng phương pháp thay ngược.**

- Từ (1), tồn tại $t \in \mathbb{Z}$ sao cho $x = 3t + 2$.
- Thay vào (2), ta có $3t + 2 \equiv 2 \pmod 7$, suy ra $3t \equiv 0 \pmod 7$, và do đó $t \equiv 0 \pmod 7$. Do đó, tồn tại $u \in \mathbb{Z}$ sao cho $t = 7u$. Suy ra $x = 3t + 2 = 3(7u) + 2 = 21u + 2$.
- Thay vào (3), ta có $21u + 2 \equiv 1 \pmod{11}$, suy ra $21u \equiv -1 \pmod{11}$, và do đó $u \equiv -10 \pmod{11} \equiv 1 \pmod{11}$. Do đó, tồn tại $v \in \mathbb{Z}$ sao cho $u = 11v + 1$. Suy ra $x = 21u + 2 = 21(11v + 1) + 2 = 231v + 23$.
- Do đó, $x = 23$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình thỏa mãn $0 \leq x < 231$.

Theo Định lý phần dư Trung Hoa, do 23^{2023} là một nghiệm của hệ phương trình, ta có $23^{2023} \equiv 23 \pmod{231}$ và do đó $23^{2023} \bmod 231 = 23$.

Lời giải 4. Giả sử $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$ là một số thập phân có 8 chữ số.

(a) Gọi A là tập các số thập phân có 8 chữ số. Để xây dựng một phần tử thuộc A, có 9 cách chọn a_1 $(1, 2, \ldots, 9)$ và 10 cách chọn $(0, 1, 2, \ldots, 9)$ mỗi chữ số trong tập $a_2, \ldots, a_8$. Do đó, có $9 \times 10^7 = 90\,000\,000$ số thập phân có 8 chữ số.	**0.5**

(b) Gọi A_5 là tập các số thập phân có 8 chữ số chia hết cho 5. Ta đếm số phần tử của A_5. Với $x \in A_5$, do x là số thập phân có 8 chữ số, ta có $10^7 \leq x < 10^8$. Kết hợp với x chia hết cho 5, ta có $x = 10^7 + 5k$ với số nguyên $k \geq 0$ nào đó. Từ $10^7 \leq x < 10^8$, ta có $10^7 \leq 10^7 + 5k < 10^8$, suy ra $0 \leq k < (10^8 - 10^7)/5 = 18 \times 10^6$. Do đó, $A_5 = \{10^7 + 5k \mid 0 \leq k < 18 \times 10^6\}$, suy ra $\lvert A_5 \rvert = 18 \times 10^6 = 18\,000\,000$.	**0.5**
(c) Từ các phần (a) và (b), số các số thập phân có 8 chữ số không chia hết cho 5 chính là số phần tử của tập $\overline{A_5} = A \setminus A_5$. Ta có $\lvert \overline{A_5} \rvert = \lvert A \rvert - \lvert A_5 \rvert = 9 \times 10^7 - 18 \times 10^6 = 72 \times 10^6 = 72\,000\,000$.	**0.5**
(d) Gọi B_{111} là tập các số thập phân có 8 chữ số có ba chữ số đầu là 111 và E_{00} là tập các số thập phân có 8 chữ số có hai chữ số cuối là 00. Số các số thập phân có 8 chữ số có ba chữ số đầu là 111 hoặc hai chữ số cuối là 00 bằng số phần tử của tập $B_{111} \cup E_{00}$. Theo nguyên lý bù trừ, $\lvert B_{111} \cup E_{00} \rvert = \lvert B_{111} \rvert + \lvert E_{00} \rvert - \lvert B_{111} \cap E_{00} \rvert$. Để xây dựng một phần tử của B_{111}, ta chỉ cần chọn các chữ số trong tập $a_4, \dots, a_8$ (do $a_1 = a_2 = a_3 = 1$), trong đó mỗi a_i ($4 \leq i \leq 8$) có 10 cách chọn $(0, \dots, 9)$. Do đó $\lvert B_{111} \rvert = 10^5$. Để xây dựng một phần tử của E_{00}, ta chỉ cần chọn các chữ số trong tập $a_1, \dots, a_6$ (do $a_7 = a_8 = 0$), trong đó a_1 có 9 cách chọn $(1, \dots, 9)$ và mỗi a_i ($2 \leq i \leq 6$) có 10 cách chọn. Do đó, $E_{00} = 9 \times 10^5$. Để xây dựng một phần tử của $B_{111} \cap E_{00}$, ta chỉ cần chọn các chữ số trong tập $a_4, \dots, a_6$ (do $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ và $a_7 = a_8 = 0$), trong đó mỗi a_i ($4 \leq i \leq 6$) có 10 cách chọn. Do đó, $\lvert B_{111} \cap E_{00} \rvert = 10^3$. Ta có $\lvert B_{111} \cup E_{00} \rvert = \lvert B_{111} \rvert + \lvert E_{00} \rvert - \lvert B_{111} \cap E_{00} \rvert = 10^5 + 9 \times 10^5 - 10^3 = 999\,000$.	**0.5**
(e) Ta xét các trường hợp dựa trên vị trí bắt đầu của dãy 111111 trong một số thập phân có 8 chữ số. • **Các số có dạng** $111111a_7a_8$**.** Mỗi chữ số a_7 và a_8 có 10 cách chọn $(0, 1, \dots, 9)$. Do đó, có 10^2 số dạng này. • **Các số có dạng** $a_1111111a_8$ **với** $a_1 \neq 1$**.** Có 8 cách chọn a_1 $(2, 3, \dots, 9)$ và có 10 cách chọn a_8 $(0, \dots, 9)$. Do đó, có 8×10 số dạng này. • **Các số có dạng** $a_1a_2111111$ **với** $a_2 \neq 1$**.** Có 9 cách chọn a_1 $(1, \dots, 9)$ và có 9 cách chọn a_2 $(0, 2, 3, \dots, 9)$. Do đó, có 9^2 số dạng này. Như vậy, theo quy tắc cộng, có $10^2 + 8 \times 10 + 9^2 = 261$ số thập phân có 8 chữ số có chứa 111111.	**0.5**

(f) Gọi D là tập các số thập phân có 8 chữ số trong đó không có hai chữ số nào giống nhau. Kết hợp với phần (a), số các số thập phân có 8 chữ số trong đó có ít nhất hai chữ số giống nhau là số phần tử của tập $\overline{D} = A \setminus D$. Để xây dựng một phần tử thuộc D: • có 9 cách chọn a_1 $(1, 2, \ldots, 9)$, • ứng với mỗi cách chọn a_1, có 9 cách chọn a_2 từ tập $\{0, \ldots, 9\} - a_1$, • ứng với mỗi cách chọn a_1, a_2, có 8 cách chọn a_3 từ tập $\{0, \ldots, 9\} - \{a_1, a_2\}$, • ứng với mỗi cách chọn a_1, a_2, a_3, có 7 cách chọn a_4 từ tập $\{0, \ldots, 9\} - \{a_1, a_2, a_3\}$, • ... • ứng với mỗi cách chọn $a_1, \ldots, a_7$, có 3 cách chọn a_8 từ tập $\{0, \ldots, 9\} - \{a_1, \ldots, a_7\}$. Do đó, $\lvert D\rvert = 9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 1\,632\,960$. Suy ra $\lvert\overline{D}\rvert = \lvert A\rvert - \lvert D\rvert = 90\,000\,000 - 1\,632\,960 = 88\,367\,040$.	**0.5**

Lời giải 5. **[1 điểm]**

(a) Giả sử tồn tại hai đỉnh phân biệt u, v trong G thỏa mãn $\deg_G(u) = 0$ và $\deg_G(v) = n - 1 > 0$. Do bậc của u bằng 0, u không liền kề với bất kỳ đỉnh nào khác trong $n - 1$ đỉnh còn lại. Do đó, với mọi đỉnh $w \neq u$, ta có $\deg_G(w) \leq n - 2$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\deg_G(v) = n - 1 > n - 2$.	**0.5**
(b) Giả sử G không là đồ thị liên thông, nghĩa là, tồn tại hai đỉnh $u, v \in V$ sao cho không có đường đi giữa u và v trong G. Gọi $H = (V_H, E_H)$ và $K = (V_K, E_K)$ lần lượt là các thành phần liên thông của G chứa u và v. Ta có $\deg_H(w) = \deg_G(w)$ với mọi $w \in V_H$ và $\deg_K(w) = \deg_G(w)$ với mọi $w \in V_K$. Do đó, $\deg_H(u) \geq n/2$ và $\deg_K(v) \geq n/2$. Suy ra $\lvert V_H\rvert \geq n/2 + 1$ và $\lvert V_K\rvert \geq n/2 + 1$. Do H và K là các thành phần liên thông của G, V_H và V_K là các tập con không giao nhau của V và $V_H \cup V_K \subseteq V$. Do đó, $n = \lvert V\rvert \geq \lvert V_H\rvert + \lvert V_K\rvert \geq 2(n/2 + 1) = n + 2$. Đây là một mâu thuẫn. Một cách chứng minh khác là như sau. Ta chứng minh với mọi cặp đỉnh $u, v \in V$, tồn tại một đường đi giữa u và v trong G. Với một đỉnh $w \in V$ bất kỳ, gọi $N[w]$ là tập chứa w và các đỉnh liền kề với w trong G. Theo giả thiết $\lvert N[w]\rvert \geq n/2 + 1$. Với mọi cặp đỉnh $u, v \in V$, ta có $\lvert N[u]\rvert \geq n/2 + 1$ và $\lvert N[v]\rvert \geq n/2 + 1$. Do đó, $\lvert N[u]\rvert + \lvert N[v]\rvert \geq n + 2 > n$. Mặt khác, do $N[u] \cup N[v] \subseteq V$, ta có $n = \lvert V\rvert \geq \lvert N[u] \cup N[v]\rvert = \lvert N[u]\rvert + \lvert N[v]\rvert - \lvert N[u] \cap N[v]\rvert \geq n + 2 - \lvert N[u] \cap N[v]\rvert$. Do đó, $N[u] \cap N[v] \neq \emptyset$. Nếu $u \in N[u] \cap N[v]$ thì u và v là hai đỉnh liền kề nhau, và do đó cạnh uv là một đường đi giữa u và v trong G. Ngược lại, nếu $u \notin N[u] \cap N[v]$ thì ta cũng có $v \notin N[u] \cap N[v]$ và do đó tồn tại một đỉnh w khác với cả u và v thỏa mãn $w \in N[u] \cap N[v]$. Do đó, các cạnh uw và wv tạo thành một đường đi giữa u và v trong G.	**0.5**

Lời giải 6. **[2 điểm]**

(a) Mỗi đỉnh trong đồ thị C_n có bậc 2, do đó tổng bậc của tất cả các đỉnh trong C_n là $2n$. Theo Định lý bắt tay, số cạnh của C_n là $2n/2 = n$. Theo định nghĩa, mỗi đỉnh trong Q_n ứng với một chuỗi nhị phân độ dài n. Do đó, Q_n có 2^n đỉnh. Mỗi đỉnh trong đồ thị Q_n có bậc n, do đó tổng bậc của tất cả các đỉnh trong Q_n là $n2^n$. Theo Định lý bắt tay, số cạnh của C_n là $n2^n/2 = n2^{n-1}$.	**1**

(b) Giả sử không có đường đi nào giữa u và v trong G. Do đó, u và v không thuộc cùng một thành phần liên thông của G. Gọi $H = (V_H, E_H)$ và $K = (V_K, E_K)$ lần lượt là các thành phần liên thông của G chứa u và v. Do $u \neq v$, H và K là hai đồ thị phân biệt. Do H là một thành phần liên thông của G, với mọi $w \in V_H$, ta có $\deg_H(w) = \deg_G(w)$. Do đó, với mọi đỉnh $w \neq u$ trong H, $\deg_H(w)$ là chẵn, và $\deg_H(u)$ là lẻ. Suy ra $\sum_{w \in V_H} \deg_H(w)$ phải là một số lẻ. Điều này mâu thuẫn với Định lý bắt tay. Do đó, tồn tại một đường đi trong G giữa u và v.	**1**

Hà Nội, ngày 22 tháng 05 năm 2023
NGƯỜI LÀM ĐÁP ÁN
(ký và ghi rõ họ tên)

Hoàng Anh Đức