ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
————-

ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II
NĂM HỌC 2022-2023
——oOo——-

Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **2**

Lớp học phần: **MAT3500 2, MAT3500 3** Ngành học: **KHMT&TT**

Thời gian làm bài: **120 phút** (không kể thời gian phát đề)

Chú ý: Đề gồm 6 câu/2 trang. Không sử dụng tài liệu. Điểm bài kiểm tra này chiếm 70% tổng số điểm của môn học. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1. (1 điểm) Một tập các toán tử lôgic $\mathcal{C}$ được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi mệnh đề phức hợp có một mệnh đề phức hợp tương đương lôgic với nó chỉ sử dụng các toán tử lôgic trong $\mathcal{C}$. Để thấy $\mathcal{C} = \{\neg, \vee\}$ là một tập các toán tử lôgic đầy đủ, với hai mệnh đề p, q, hãy tìm các mệnh đề phức hợp chỉ sử dụng các toán tử lôgic trong $\mathcal{C}$ và tương đương lôgic với

(a) $p \wedge q$

(b) $p \oplus q$

(c) $p \to q$

(d) $p \leftrightarrow q$

Câu 2. (1 điểm)

(a) Với các tập A, B, C bất kỳ, chứng minh rằng $(A \times B) \cup (C \times B) = (A \cup C) \times B$.

(b) Gọi $A = \{n \mid n \in \mathbb{Z}$ và $n^2 + n$ là một số lẻ$\}$ và $B = \{m \mid m \in \mathbb{Z}$ và $m^2 - 2m = 5\}$. Chứng minh rằng $A \subseteq B$.

Câu 3. (2 điểm)

(a) Sử dụng Định lý Fermat nhỏ để tính $a_1 = 23^{2023} \bmod 7$, $a_2 = 23^{2023} \bmod 11$, và $a_3 = 23^{2023} \bmod 13$.

(b) Tìm số nguyên x thỏa mãn $0 \leq x < 1001$ và

$$x \equiv a_1 \pmod{7} \tag{1}$$
$$x \equiv a_2 \pmod{11} \tag{2}$$
$$x \equiv a_3 \pmod{13} \tag{3}$$

trong đó a_1, a_2, a_3 là các số được tính ở phần (a). Sử dụng kết quả trên và Định lý phần dư Trung Hoa để tính $23^{2023} \bmod 1001$. (Chú ý rằng $1001 = 7 \times 11 \times 13$.)

Câu 4. (3 điểm)

(a) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số?

(b) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số chia hết 25?

(c) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số không chia hết cho 25?

(d) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số có ba chữ số đầu là 222 hoặc hai chữ số cuối là 11?

(e) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số có chứa 222222 (chuỗi 6 chữ số 2 liên tiếp)?

(f) Có bao nhiêu số thập phân có 8 chữ số có ít nhất hai chữ số giống nhau?

Câu 5. (1 điểm) Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị vô hướng có $n \geq 2$ đỉnh.

(a) Chứng minh rằng không tồn tại đồng thời hai đỉnh phân biệt u, v thỏa mãn $\deg_G(u) = 0$ và $\deg_G(v) = n - 1$.

(b) Sử dụng nguyên lý chuồng bồ câu (nguyên lý Dirichlet), hãy chứng minh rằng G luôn có hai đỉnh có cùng bậc.

Câu 6. (2 điểm)

(a) Đồ thị K_n ($n \geq 1$) có bao nhiêu cạnh? Đồ thị W_n ($n \geq 3$) có bao nhiêu cạnh?

(b) Cho $T = (V, E)$ là một cây gồm n đỉnh với $n > 1$. Gọi $V_{\geq 3}$ là tập tất cả các đỉnh v của T thỏa mãn $\deg_T(v) \geq 3$. Chứng minh rằng số đỉnh bậc 1 của T là

$$2 + \sum_{v \in V_{\geq 3}} (\deg_T(v) - 2).$$

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM
ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KÌ II, NĂM HỌC 2022-2023
Môn thi: Toán rời rạc

Mã môn học: **MAT3500** Số tín chỉ: **4** Đề số: **2**
Lớp học phần: **MAT3500 2, MAT3500 3** Ngành học: **KHMT&TT**

Lời giải 1. Một phương án giải là sử dụng bảng chân trị để đưa các biểu thức đã cho về dạng tuyển chuẩn tắc (DNF) hoặc dạng hội chuẩn tắc (CNF) rồi áp dụng luật De Morgan và các tương đương lôgic đã biết. **[1 điểm]**

(a) $p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$ luật De Morgan	**0.25**
(b) $p \oplus q \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ dạng tuyển chuẩn tắc $\equiv \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q)$ luật De Morgan hoặc $p \oplus q \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ dạng hội chuẩn tắc $\equiv \neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q))$ luật De Morgan	**0.25**
(c) $p \to q \equiv \neg p \vee q$ dạng hội chuẩn tắc hoặc $p \to q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ dạng tuyển chuẩn tắc $\equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q)$ luật De Morgan	**0.25**

(d) $$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{dạng tuyển chuẩn tắc} \\ &\equiv \neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q) && \text{luật De Morgan} \end{aligned}$$ hoặc $$\begin{aligned} p \leftrightarrow q &\equiv (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) && \text{dạng hội chuẩn tắc} \\ &\equiv \neg(\neg(p \vee \neg q) \vee \neg(\neg p \vee q)) && \text{luật De Morgan} \end{aligned}$$	**0.25**

Lời giải 2. **[1 điểm]**

(a) $$\begin{aligned} (A \times B) \cup (C \times B) &= \{(x,y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B)\} \cup \{(x,y) \mid (x \in C) \wedge (y \in B)\} && \text{định nghĩa } \times \\ &= \{(x,y) \mid ((x \in A) \wedge (y \in B)) \vee ((x \in C) \wedge (y \in B))\} && \text{định nghĩa } \cup \\ &= \{(x,y) \mid [(x \in A) \vee (x \in C)] \wedge (y \in B)\} && \text{tính chất phân phối} \\ &= \{(x,y) \mid [x \in A \cup C] \wedge (y \in B)\} && \text{định nghĩa } \cup \\ &= (A \cup C) \times B && \text{định nghĩa } \times \end{aligned}$$	**0.5**
(b) Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, một trong hai số n và $n+1$ phải là số chẵn, nghĩa là $n^2 + n = n(n+1)$ luôn là số chẵn. Do đó, $A = \{n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ và } n^2 + n \text{ là một số lẻ}\} = \emptyset \subseteq B$.	**0.5**

Lời giải 3. **[2 điểm]**

(a) Theo định lý Fermat nhỏ, với p là số nguyên tố và a là số nguyên không chia hết cho p, ta có $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Áp dụng định lý Fermat nhỏ, ta có $23^6 \equiv 1 \pmod{7}$, $23^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, và $23^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Do đó, $$a_1 = 23^{2023} \bmod 7 = (23^6)^{337} \times 23 \bmod 7 = [(23^6 \bmod 7)^{337} \times (23 \bmod 7)] \bmod 7 = 2$$ $$\begin{aligned} a_2 &= 23^{2023} \bmod 11 = (23^{10})^{202} \times 23^3 \bmod 11 = [(23^{10} \bmod 11)^{202} \times (23^3 \bmod 11)] \bmod 11 \\ &= [23^3 \bmod 11] \bmod 11 = (23 \bmod 11)^3 \bmod 11 = 1 \end{aligned}$$ $$\begin{aligned} a_3 &= 23^{2023} \bmod 13 = (23^{12})^{168} \times 23^7 \bmod 13 = [(23^{12} \bmod 13)^{168} \times (23^7 \bmod 13)] \bmod 13 \\ &= [23^7 \bmod 13] \bmod 13 = (23 \bmod 13)^7 \bmod 13 = 10^7 \bmod 13 = (10^2)^3 \times 10 \bmod 13 \\ &= (10^2 \bmod 13)^3 \times 10 \bmod 13 = 9^3 \times 10 \bmod 13 = 9^2 \times (9 \times 10) \bmod 13 \\ &= (81 \bmod 13)(90 \bmod 13) \bmod 13 = 3 \times 12 \bmod 13 = 10 \end{aligned}$$	**1**

(b) Ta giải hệ phương trình sau **1**

$$
\begin{aligned}
x &\equiv 2 \pmod{7} && (1)\\
x &\equiv 1 \pmod{11} && (2)\\
x &\equiv 10 \pmod{13} && (3)
\end{aligned}
$$

(Cách 1) **Sử dụng chứng minh của Định lý phần dư Trung Hoa.**

Đặt $m_1 = 7$, $m_2 = 11$, $m_3 = 13$, và $m = m_1 m_2 m_3 = 7 \times 11 \times 13 = 1001$. Ta có

- $M_1 = m/m_1 = 11 \times 13 = 143$ và $y_1 = -2$ là một nghịch đảo của M_1 theo môđun $m_1 = 7$.
- $M_2 = m/m_2 = 7 \times 13 = 91$ và $y_2 = 4$ là một nghịch đảo của M_2 theo môđun $m_2 = 11$.
- $M_3 = m/m_3 = 7 \times 11 = 77$ và $y_3 = -1$ là một nghịch đảo của M_3 theo môđun $m_3 = 13$.

Một nghiệm của hệ phương trình là

$$x^\star = \sum_{i=1}^{3} a_i y_i M_i = 2 \times (-2) \times 143 + 1 \times 4 \times 91 + 10 \times (-1) \times 77 = -978.$$

Theo Định lý phần dư Trung Hoa, $x^\star$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình theo môđun 1001, nghĩa là, mọi số nguyên x thỏa mãn $x \equiv x^\star \pmod{1001}$ đều là nghiệm của hệ phương trình. Do đó, $x = x^\star \bmod 1001 = 23$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình thỏa mãn $0 \leq x < 1001$.

(Cách 2) **Sử dụng phương pháp thay ngược.**

- Từ (1), tồn tại $t \in \mathbb{Z}$ sao cho $x = 7t + 2$.
- Thay vào (2), ta có $7t + 2 \equiv 1 \pmod{11}$, suy ra $7t \equiv -1 \pmod{11}$, và do đó $t \equiv 3 \pmod{11}$. Do đó, tồn tại $u \in \mathbb{Z}$ sao cho $t = 11u + 3$. Suy ra $x = 7t + 2 = 7(11u + 3) + 2 = 77u + 23$.
- Thay vào (3), ta có $77u + 23 \equiv 10 \pmod{13}$, suy ra $77u \equiv -13 \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13}$, và do đó $u \equiv 0 \pmod{13}$. Do đó, tồn tại $v \in \mathbb{Z}$ sao cho $u = 13v$. Suy ra $x = 77u + 23 = 77(13v) + 23 = 1001v + 23$.
- Do đó, $x = 23$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình thỏa mãn $0 \leq x < 1001$.

Theo Định lý phần dư Trung Hoa, do 23^{2023} là một nghiệm của hệ phương trình, ta có $23^{2023} \equiv 23 \pmod{1001}$ và do đó $23^{2023} \bmod 1001 = 23$.

Lời giải 4. Giả sử $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8$ là một số thập phân có 8 chữ số.

(a) Gọi A là tập các số thập phân có 8 chữ số. Để xây dựng một phần tử thuộc A, có 9 cách chọn a_1 $(1, 2, \dots, 9)$ và 10 cách chọn $(0, 1, 2, \dots, 9)$ mỗi chữ số trong tập $a_2, \dots, a_8$. Do đó, có $9 \times 10^7 = 90\,000\,000$ số thập phân có 8 chữ số.	**0.5**

(b) Gọi A_{25} là tập các số thập phân có 8 chữ số chia hết cho 25. Ta đếm số phần tử của A_{25}. Với $x \in A_{25}$, do x là số thập phân có 8 chữ số, ta có $10^7 \leq x < 10^8$. Kết hợp với x chia hết cho 25, ta có $x = 10^7 + 25k$ với số nguyên $k \geq 0$ nào đó. Từ $10^7 \leq x < 10^8$, ta có $10^7 \leq 10^7 + 25k < 10^8$, suy ra $0 \leq k < (10^8 - 10^7)/25 = 36 \times 10^5$. Do đó, $A_{25} = \{10^7 + 25k \mid 0 \leq k < 36 \times 10^5\}$, suy ra $\|A_{25}\| = 36 \times 10^5 = 3\,600\,000$.	**0.5**
(c) Từ các phần (a) và (b), số các số thập phân có 8 chữ số không chia hết cho 25 chính là số phần tử của tập $\overline{A_{25}} = A \setminus A_{25}$. Ta có $\|\overline{A_{25}}\| = \|A\| - \|A_{25}\| = 9 \times 10^7 - 36 \times 10^5 = 864 \times 10^5 = 86\,400\,000$.	**0.5**
(d) Gọi B_{222} là tập các số thập phân có 8 chữ số có ba chữ số đầu là 222 và E_{11} là tập các số thập phân có 8 chữ số có hai chữ số cuối là 11. Số các số thập phân có 8 chữ số có ba chữ số đầu là 222 hoặc hai chữ số cuối là 11 bằng số phần tử của tập $B_{222} \cup E_{11}$. Theo nguyên lý bù trừ, $\|B_{222} \cup E_{11}\| = \|B_{222}\| + \|E_{11}\| - \|B_{222} \cap E_{11}\|$. Để xây dựng một phần tử của B_{222}, ta chỉ cần chọn các chữ số trong tập $a_4, \dots, a_8$ (do $a_1 = a_2 = a_3 = 2$), trong đó mỗi a_i ($4 \leq i \leq 8$) có 10 cách chọn $(0, \dots, 9)$. Do đó $\|B_{111}\| = 10^5$. Để xây dựng một phần tử của E_{11}, ta chỉ cần chọn các chữ số trong tập $a_1, \dots, a_6$ (do $a_7 = a_8 = 1$), trong đó a_1 có 9 cách chọn $(1, \dots, 9)$ và mỗi a_i ($2 \leq i \leq 6$) có 10 cách chọn. Do đó, $E_{00} = 9 \times 10^5$. Để xây dựng một phần tử của $B_{222} \cap E_{11}$, ta chỉ cần chọn các chữ số trong tập $a_4, \dots, a_6$ (do $a_1 = a_2 = a_3 = 2$ và $a_7 = a_8 = 1$), trong đó mỗi a_i ($4 \leq i \leq 6$) có 10 cách chọn. Do đó, $\|B_{222} \cap E_{11}\| = 10^3$. Ta có $\|B_{222} \cup E_{11}\| = \|B_{222}\| + \|E_{11}\| - \|B_{222} \cap E_{11}\| = 10^5 + 9 \times 10^5 - 10^3 = 999\,000$.	**0.5**
(e) Ta xét các trường hợp dựa trên vị trí bắt đầu của dãy 222222 trong một số thập phân có 8 chữ số. • **Các số có dạng** $222222a_7a_8$**.** Mỗi chữ số a_7 và a_8 có 10 cách chọn $(0, 1, \dots, 9)$. Do đó, có 10^2 số dạng này. • **Các số có dạng** $a_1222222a_8$ **với** $a_1 \neq 2$**.** Có 8 cách chọn a_1 $(1, 3, 4, \dots, 9)$ và có 10 cách chọn a_8 $(0, \dots, 9)$. Do đó, có 8×10 số dạng này. • **Các số có dạng** $a_1a_2222222$ **với** $a_2 \neq 2$**.** Có 9 cách chọn a_1 $(1, \dots, 9)$ và có 9 cách chọn a_2 $(0, 1, 3, 4, \dots, 9)$. Do đó, có 9^2 số dạng này. Như vậy, theo quy tắc cộng, có $10^2 + 8 \times 10 + 9^2 = 261$ số thập phân có 8 chữ số có chứa 222222.	**0.5**

(f) Gọi D là tập các số thập phân có 8 chữ số trong đó không có hai chữ số nào giống nhau. Kết hợp với phần (a), số các số thập phân có 8 chữ số trong đó có ít nhất hai chữ số giống nhau là số phần tử của tập $\overline{D} = A \setminus D$. Để xây dựng một phần tử thuộc D: • có 9 cách chọn a_1 $(1, 2, \ldots, 9)$, • ứng với mỗi cách chọn a_1, có 9 cách chọn a_2 từ tập $\{0, \ldots, 9\} - a_1$, • ứng với mỗi cách chọn a_1, a_2, có 8 cách chọn a_3 từ tập $\{0, \ldots, 9\} - \{a_1, a_2\}$, • ứng với mỗi cách chọn a_1, a_2, a_3, có 7 cách chọn a_4 từ tập $\{0, \ldots, 9\} - \{a_1, a_2, a_3\}$, • ... • ứng với mỗi cách chọn $a_1, \ldots, a_7$, có 3 cách chọn a_8 từ tập $\{0, \ldots, 9\} - \{a_1, \ldots, a_7\}$. Do đó, $\|D\| = 9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 1\,632\,960$. Suy ra $\|\overline{D}\| = \|A\| - \|D\| = 90\,000\,000 - 1\,632\,960 = 88\,367\,040$.	**0.5**

Lời giải 5. **[1 điểm]**

(a) Giả sử tồn tại hai đỉnh phân biệt u, v trong G thỏa mãn $\deg_G(u) = 0$ và $\deg_G(v) = n - 1 > 0$. Do bậc của u bằng 0, u không liền kề với bất kỳ đỉnh nào khác trong $n - 1$ đỉnh còn lại. Do đó, với mọi đỉnh $w \neq u$, ta có $\deg_G(w) \leq n - 2$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\deg_G(v) = n - 1 > n - 2$.	**0.5**
(b) Từ (a), có $n - 1$ khả năng cho bậc của các đỉnh của G: • Nếu G có đỉnh bậc 0 thì G không có đỉnh bậc $n - 1$, và do đó các đỉnh của G có bậc trong tập $\{0, 1, \ldots, n - 2\}$. • Nếu G có đỉnh bậc $n - 1$ thì G không có đỉnh bậc 0, và do đó các đỉnh của G có bậc trong tập $\{1, 2, \ldots, n - 1\}$. Do G có n đỉnh, theo Nguyên lý chuồng bồ câu, G có ít nhất hai đỉnh có cùng bậc.	**0.5**

Lời giải 6. **[2 điểm]**

(a) Mỗi đỉnh trong đồ thị K_n có bậc $n - 1$, do đó tổng bậc của tất cả các đỉnh trong K_n là $n(n - 1)$. Theo Định lý bắt tay, số cạnh của K_n là $n(n - 1)/2$. Đồ thị W_n có n đỉnh bậc 3 và một đỉnh bậc n, do đó tổng bậc của tất cả các đỉnh trong W_n là $3n + n = 4n$. Theo Định lý bắt tay, số cạnh của W_n là $4n/2 = 2n$.	**1**

(b) Gọi V_1 và V_2 lần lượt là tập các đỉnh có bậc 1 và bậc 2 trong cây $T = (V, E)$. Ta cần chứng minh $\|V_1\| = 2 + \sum_{v \in V_{\geq 3}} (\deg_T(v) - 2)$. Chú ý rằng $V_1, V_2, V_{\geq 3}$ là các tập đôi một không giao nhau và $V = V_1 \cup V_2 \cup V_{\geq 3}$. Ta có $$\begin{aligned} 2\|E\| &= \sum_{v \in V} \deg_T(v) \\ &= \sum_{v \in V_1} \deg_T(v) + \sum_{v \in V_2} \deg_T(v) + \sum_{v \in V_{\geq 3}} \deg_T(v) \\ &= \|V_1\| + 2\|V_2\| + \sum_{v \in V_{\geq 3}} \deg_T(v) \end{aligned}$$ Do T là một cây, T có chính xác $\|V\| - 1$ cạnh, nghĩa là $$\begin{aligned} 2\|E\| &= 2(\|V\| - 1) \\ &= 2(\|V_1\| + \|V_2\| + \|V_{\geq 3}\| - 1) \end{aligned}$$ Do đó, $$2\|E\| = \|V_1\| + 2\|V_2\| + \sum_{v \in V_{\geq 3}} \deg_T(v) = 2(\|V_1\| + \|V_2\| + \|V_{\geq 3}\| - 1).$$ Suy ra $$\|V_1\| = 2 - 2\|V_{\geq 3}\| + \sum_{v \in V_{\geq 3}} \deg_T(v) = 2 - \sum_{v \in V_{\geq 3}} 2 + \sum_{v \in V_{\geq 3}} \deg_T(v).$$ Do đó, $\|V_1\| = 2 + \sum_{v \in V_{\geq 3}} (\deg_T(v) - 2)$.	**1**

Hà Nội, ngày 22 tháng 05 năm 2023
NGƯỜI LÀM ĐÁP ÁN
(ký và ghi rõ họ tên)

Hoàng Anh Đức