ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI
KHOA TOÁN-CƠ-TIN
(Đề gồm 4 câu/4 trang)

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ
Môn: Toán rời rạc (MAT3500 1, 2023-2024)
Thời gian: 50 phút

- Điền các thông tin về Họ Tên, Mã Sinh Viên, Lớp trước khi bắt đầu làm bài.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.
- Điểm bài kiểm tra này chiếm 20% tổng số điểm của môn học. Tổng điểm nhỏ hơn hoặc bằng 10 thì giữ nguyên, còn ngược lại thì tính là 10 điểm.

Họ và Tên: ____________________

Mã Sinh Viên: ____________________ Lớp: ____________________

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	3	3	3	3	12
Điểm:					

1. (3 điểm) Hãy chứng minh bằng ít nhất hai cách khác nhau rằng các mệnh đề $\neg p \vee (r \to \neg q)$ và $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ là tương đương lôgic.

Lời giải:

- **Cách 1: Sử dụng các tương đương lôgic đã biết.**

$$\begin{aligned} \neg p \vee (r \to \neg q) &\equiv \neg p \vee (\neg r \vee \neg q) && p \to q \equiv \neg p \vee q \\ &\equiv \neg p \vee (\neg q \vee \neg r) && \text{Giao hoán} \\ &\equiv \neg p \vee \neg q \vee \neg r && \text{Kết hợp} \end{aligned}$$

- **Cách 2: Lập bảng chân trị.**

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$r \to \neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \vee (r \to \neg q)$	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$
T	T	T	F	F	F	F	F	F	F
T	T	F	F	F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	F	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T	T

Do các hàng tương ứng của hai mệnh đề $\neg p \vee (r \to \neg q)$ và $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ đều có giá trị giống nhau, các mệnh đề đã cho là tương đương lôgic.

2. Chứng minh các tính chất sau của hàm trần và hàm sàn, trong đó $x \in \mathbb{R}$ và $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) ($1\frac{1}{2}$ điểm) $\lfloor x \rfloor = n$ khi và chỉ khi $n \leq x < n+1$.
   (b) ($1\frac{1}{2}$ điểm) $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Lời giải:

(a) Ta chứng minh hai chiều:

($\Rightarrow$) Giả sử $\lfloor x \rfloor = n$. Ta chứng minh $n \leq x < n+1$.
Thật vậy, theo định nghĩa hàm sàn, $n \leq x$. Ta chứng minh $x < n+1$ bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $x \geq n+1$. Do đó $\lfloor x \rfloor \geq \lfloor n+1 \rfloor = n+1 > n$, mâu thuẫn với giả thiết $\lfloor x \rfloor = n$.

($\Leftarrow$) Giả sử $n \leq x < n+1$. Ta chứng minh $\lfloor x \rfloor = n$.
Thật vậy, từ giả thiết $n \leq x < n+1$, ta có $n \leq \lfloor x \rfloor < n+1$. Do $\lfloor x \rfloor$ là một số nguyên, ta có $\lfloor x \rfloor = n$.

(b) Giả sử $\lfloor x+n \rfloor = m$ với $m \in \mathbb{Z}$ nào đó. Kết hợp với câu (a), ta có $m \leq x+n < m+1$. Do đó, $m-n \leq x \leq (m-n)+1$. Kết hợp với câu (a), ta suy ra $\lfloor x \rfloor = m-n$, nghĩa là $\lfloor x \rfloor + n = m = \lfloor x+n \rfloor$.

3. (3 điểm) Sử dụng phương pháp quy nạp để chứng minh $6^{n+1} + 7^{2n-1}$ chia hết cho 43 với mọi số nguyên dương n.

Lời giải: Gọi $P(n)$ là vị từ "$6^{n+1} + 7^{2n-1}$ chia hết cho 43". Ta chứng minh $\forall n \in \mathbb{Z}^+\ P(n)$.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ đúng. Thật vậy, với $n = 1$, ta có $6^{1+1} + 7^{2\cdot 1-1} = 43$ chia hết cho 43.

- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \in \mathbb{Z}^+$ nào đó, nghĩa là $6^{k+1} + 7^{2k-1}$ chia hết cho 43. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $6^{(k+1)+1} + 7^{2(k+1)-1} = 6^{k+2} + 7^{2k+1}$ chia hết cho 43. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} 6^{k+2} + 7^{2k+1} &= 6 \cdot 6^{k+1} + 7^2 \cdot 7^{2k-1} \\ &= 6 \cdot (6^{k+1} + 7^{2k-1}) + 43 \cdot 7^{2k-1}. \end{aligned}$$

  Theo giả thiết quy nạp, $6^{k+1} + 7^{2k-1}$ chia hết cho 43, và do đó $6 \cdot (6^{k+1} + 7^{2k-1})$ cũng thế. Thêm vào đó, $43 \cdot 7^{2k-1}$ cũng chia hết cho 43. Do đó, ta có điều cần chứng minh.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $6^{n+1} + 7^{2n-1}$ chia hết cho 43 với mọi số nguyên dương n.

4. (3 điểm) Giải hệ thức truy hồi $a_n = 3a_{n-1} + 7$ $(n = 1, 2, \dots)$ với điều kiện ban đầu $a_0 = 3$.

Lời giải: Ta có

$$\begin{aligned}
a_n &= 3a_{n-1} + 7 \\
&= 3(3a_{n-2} + 7) + 7 = 3^2 a_{n-2} + (1+3)\cdot 7 \\
&= 3^2(3a_{n-3} + 7) + (1+3)\cdot 7 = 3^3 a_{n-3} + (1+3+3^2)\cdot 7 \\
&= \dots \\
&= 3^r a_{n-r} + (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{r-1})\cdot 7 \\
&= \dots \\
&= 3^n a_0 + (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1})\cdot 7 \\
&= 3^{n+1} + 7\cdot \frac{3^n - 1}{2} \\
&= \frac{13\cdot 3^n - 7}{2}.
\end{aligned}$$

Để kiểm tra dự đoán trên, ta chứng minh $a_n = \frac{13\cdot 3^n - 7}{2}$ với mọi $n \geq 0$ bằng phương pháp quy nạp.

- **Bước cơ sở:** Với $n = 0$, ta có $a_0 = \frac{13\cdot 3^0 - 7}{2} = 3$. Do đó, $a_n = \frac{13\cdot 3^n - 7}{2}$ đúng với $n = 0$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $a_k = \frac{13\cdot 3^k - 7}{2}$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó. Ta chứng minh $a_{k+1} = \frac{13\cdot 3^{k+1} - 7}{2}$ cũng đúng. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 3a_k + 7 && \text{Định nghĩa của dãy } \{a_n\} \\
&= 3\cdot \frac{13\cdot 3^k - 7}{2} + 7 && \text{Giả thiết quy nạp} \\
&= \frac{3(13\cdot 3^k - 7) + 14}{2} \\
&= \frac{13\cdot 3^{k+1} - 7}{2}.
\end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp, $a_n = \frac{13\cdot 3^n - 7}{2}$ với mọi $n \geq 0$.