Nhận xét Bài kiểm tra giữa kỳ

Toán rời rạc (MAT3500 1, 2023-2024)

Hoàng Anh Đức
BMTH, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Ngày 2 tháng 4 năm 2024

- Với bài số 1,
  - Phần lớn các bạn giải đúng. Tuy nhiên vẫn có một số bạn không giải dược và do đó cần xem lại phần lôgic mệnh đề và lôgic vị từ.
  - Một số bạn sử dụng bảng chân trị để chứng minh hai mệnh đề tương đương lôgic. Phương pháp này không chính xác. Chú ý rằng cách làm này không áp dụng được với các mệnh đề có chứa lượng từ và vị từ, do miền xác định của các vị từ có thể là vô hạn.
- Với bài số 2,
  - Một số bạn ở bước quy nạp giả thiết $8^k - 1$ chia hết cho 7 với số nguyên $k \geq 0$ nào đó và chứng minh $8^{k+1} - 1$ cũng chia hết cho 7 bằng cách viết $8^{k+1} - 1 = (8-1)(8^k + 8^{k-1} + \cdots + 1) = 7(8^k + 8^{k-1} + \cdots + 1)$. Điều này hoàn toàn đúng. Tuy nhiên, **đây không phải là chứng minh bằng quy nạp, do các bạn không hề sử dụng giả thiết quy nạp "$8^k - 1$ chia hết cho 7" để chỉ ra "$8^{k+1} - 1$ cũng chia hết cho 7"**.
  - Một số bạn ở bước quy nạp giả sử $8^k - 7$ chia hết cho 7 và chứng minh $8^{k+1} - 7$ cũng chia hết cho 7. Điều này hoàn toàn khác với yêu cầu của đề bài, tuy nhiên cuối cùng các bạn lại kết luận được $8^n - 1$ chia hết cho 7 với mọi $n \geq 0$?
- Với bài số 3,
  - Ở câu (a), các bạn cần sử dụng quy nạp theo cấu trúc. Một số bạn cần xem lại phần chứng minh quy nạp.
  - Ở câu (b), một số bạn lấy ví dụ $m = 13 = 4 \cdot 3 + 1$ và chỉ ra $m \notin S$ vì nếu ngược lại thì tồn tại $n \in S$ thỏa mãn $3n + 2 = 13$ hoặc $n^2 = 13$. Điều này là mâu thuẫn, do không tồn tại số nguyên dương n nào thỏa mãn một trong hai điều trên. Ví dụ này là đúng.

    Một ví dụ khác đúng là $m = 41 = 4 \cdot 10 + 1$. Lý do là nếu giả sử phản chứng rằng $41 \in S$ thì tồn tại $n \in S$ thỏa mãn $3n + 2 = 41$ hoặc $n^2 = 41$. Suy ra $n = 13$ do $3 \cdot 13 + 2 = 41$ và không tồn tại $n \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $n^2 = 41$. Nhưng do $13 \notin S$ nên đây là một mâu thuẫn.
- Với bài số 4,
  - Ở câu (a), một số bạn đưa ra ví dụ hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ định nghĩa bởi $f(x) = x/2$. Chú ý rằng f không phải là một hàm, do $f(1) = 1/2 \notin \mathbb{N}$.
  - Ở câu (a), một số bạn đưa ra ví dụ hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ định nghĩa bởi $f(x) = ax + 1$ với số nguyên $a \geq 2$ nào đó. (Các bạn thường chọn $a = 2, 3, 4, 5$.) Phần lớn các bạn đều chỉ ra được tồn tại số $b \in \mathbb{N}$ nào đó thỏa mãn $f(x) \neq b$ với mọi $x \in \mathbb{N}$.

– Ở câu (b), một số bạn đưa ra ví dụ hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ định nghĩa bởi $f(x) = \sqrt{x}$ và lý luận rằng do với mọi $\sqrt{x} = a \in \mathbb{N}$ thì luôn tồn tại $x = a^2 \in \mathbb{N}$, do đó f là toàn ánh.

  Các bạn cần xem lại định nghĩa hàm. Trong ví dụ trên, f **không phải là một hàm từ $\mathbb{N}$ đến** $\mathbb{N}$. Giả sử điều ngược lại đúng. Theo định nghĩa hàm, với mọi $x \in \mathbb{N}$, tồn tại $y \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $y = f(x)$. (Nói cách khác, với mọi $x \in \mathbb{N}$, ta có $f(x) \in \mathbb{N}$.) Điều này là một mâu thuẫn, do tồn tại $x = 2 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn với mọi $y \in \mathbb{N}$, $y \neq f(x) = \sqrt{2}$.

– Ở câu (b), một số bạn lấy ví dụ hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ như sau $f(x) = x^2$ và nói rằng f là toàn ánh. Điều này không đúng vì tồn tại $2 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $f(x) \neq 2$ với mọi $x \in \mathbb{N}$.

– Ở câu (b), một số bạn lấy ví dụ hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ như sau $f(x) = x^2 + 1$ và nói rằng f là toàn ánh. Điều này không đúng vì tồn tại $3 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $f(x) \neq 3$ với mọi $x \in \mathbb{N}$.

– Ở câu (b), một số bạn lấy ví dụ hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ như sau $f(x) = x^2 - 1$ với $x \geq 1$ và $f(x) = 0$ với $x < 1$ và nói rằng f là toàn ánh. Điều này không đúng vì tồn tại $2 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $f(x) \neq 2$ với mọi $x \in \mathbb{N}$.

– Ở câu (b), một số bạn lấy ví dụ hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ như sau

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{nếu } x \text{ chẵn,} \\ (x+1)/2 & \text{nếu } x \text{ lẻ.} \end{cases}$$

  Hàm f là toàn ánh do với mọi $x \in \mathbb{N}$ tồn tại $y = 2x$ nếu x chẵn và $y = 2x - 1$ nếu x lẻ thỏa mãn điều kiện $f(y) = x$. Hàm f không là đơn ánh do với $x_1 = 2$ và $x_2 = 1$ thì $f(x_1) = f(x_2) = 1$ và $x_1 \neq x_2$. Ví dụ này là đúng.

  Một số bạn lý luận là với x chẵn thì $x = 2k$ với $k \in \mathbb{N}$ và do đó $f(x) = k$. Tương tự, với x lẻ thì $x = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{N}$ và do đó $f(x) = k + 1$. Tuy nhiên, các bạn **không giải thích tại sao từ đây ta có f là toàn ánh**.

– Ở câu (b) một số bạn lấy ví dụ hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cho bởi $f(x) = 1$ và nói rằng f là toàn ánh. Điều này không đúng, vì tồn tại $n = 2 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $f(x) \neq n$ với mọi $x \in \mathbb{N}$. Nhắc lại rằng, theo định nghĩa, f là toàn ánh khi và chỉ khi với mọi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $f(x) = n$. Các bạn cần xem lại phần định nghĩa hàm.

– Ở câu (b), một số bạn lấy ví dụ hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cho bởi $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$ hoặc $f(x) = \lceil x/2 \rceil$. Các hàm này đều là toàn ánh nhưng không là đơn ánh. Các ví dụ này đều đúng.

– Ở câu (b), một số bạn lấy ví dụ hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ như sau

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x > 1, \\ 1 & \text{nếu } x = 1, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

  hoặc

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x \geq 1, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

  Các hàm trên là toàn ánh nhưng không là đơn ánh. Các ví dụ này là đúng.

– Ở câu (c) một số bạn lấy ví dụ hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cho bởi $f(x) = x - 1$. Chú ý là trong ví dụ này f không phải là một hàm, lý do là $f(0) = -1 \notin \mathbb{N}$.

– Ở câu (c) một số bạn lấy ví dụ hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cho bởi $f(x) = x + 1$. Chú ý là trong ví dụ này f không phải là một song ánh, lý do là f không phải toàn ánh vì tồn tại $0 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện với mọi $x \in \mathbb{N}$ ta có $f(x) \neq 0$.

– Ở câu (c), một số bạn lấy ví dụ hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cho bởi $f(x) = x$. Ở đây, f là song ánh nhưng đồng thời cũng là hàm đồng nhất trên $\mathbb{N}$. Do đó ví dụ này không chính xác.

– Ở câu (c), một số bạn lấy ví dụ hàm $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cho bởi $f(x) = x + 1$ với $x \geq 1$ và $f(x) = 0$ với $x = 0$. Ở đây, f không phải là một song ánh, lý do là f không phải toàn ánh vì tồn tại $1 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện với mọi $x \in \mathbb{N}$ ta có $f(x) \neq 1$.