ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI
KHOA TOÁN-CƠ-TIN
(Đề gồm 4 câu/4 trang)

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ
Môn: Toán rời rạc (MAT3500 1, 2023-2024)
Thời gian: 50 phút

- Điền các thông tin về Họ Tên, Mã Sinh Viên, Lớp trước khi bắt đầu làm bài.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.
- Điểm bài kiểm tra này chiếm 20% tổng số điểm của môn học. Tổng điểm nhỏ hơn hoặc bằng 10 thì giữ nguyên, còn ngược lại thì tính là 10 điểm.

Họ và Tên: ______________________________

Mã Sinh Viên: ____________________ Lớp: ____________________

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	3	3	3	3	12
Điểm:					

1. (3 điểm) Giả thuyết Goldbach "Mọi số chẵn lớn hơn hoặc bằng 4 là tổng của hai số nguyên tố" có thể được biểu diễn thông qua các vị từ, lượng từ, và mệnh đề lôgic theo một trong hai cách sau:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \left[n > 2 \wedge 2 \mid n \rightarrow \left(\exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{Z}\ \left[isPrime(p) \wedge isPrime(q) \wedge n = p + q \right] \right) \right] \tag{1}$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{Z} \left[n \leq 2 \vee 2 \nmid n \vee \left[isPrime(p) \wedge isPrime(q) \wedge n = p + q \right] \right] \tag{2}$$

trong đó $2 \mid n$ nghĩa là "n chia hết cho 2"; $2 \nmid n$ nghĩa là "n không chia hết cho 2"; và $isPrime(p)$ nghĩa là "p là một số nguyên tố". Hãy chứng minh các mệnh đề (1) và (2) là tương đương lôgic.

Lời giải: Ta có

$$\forall n \in \mathbb{Z} \left[n > 2 \wedge 2 \mid n \rightarrow \left(\exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{Z}\ \left[isPrime(p) \wedge isPrime(q) \wedge n = p + q \right] \right) \right]$$

$$\equiv \forall n \in \mathbb{Z} \left[\neg(n > 2 \wedge 2 \mid n) \vee \left(\exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{Z}\ \left[isPrime(p) \wedge isPrime(q) \wedge n = p + q \right] \right) \right] \qquad p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$\equiv \forall n \in \mathbb{Z} \left[\neg(n > 2) \vee \neg(2 \mid n) \vee \left(\exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{Z}\ \left[isPrime(p) \wedge isPrime(q) \wedge n = p + q \right] \right) \right] \qquad \text{Luật De Morgan}$$

$$\equiv \forall n \in \mathbb{Z} \left[n \leq 2 \vee 2 \nmid n \vee \left(\exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{Z}\ \left[isPrime(p) \wedge isPrime(q) \wedge n = p + q \right] \right) \right]$$

$$\equiv \forall n \in \mathbb{Z}\ \exists p \in \mathbb{Z}\ \exists q \in \mathbb{Z} \left[n \leq 2 \vee 2 \nmid n \vee \left[isPrime(p) \wedge isPrime(q) \wedge n = p + q \right] \right]$$

2. (3 điểm) Sử dụng phương pháp quy nạp, hãy chứng minh $8^n - 1$ chia hết cho 7 với mọi $n \geq 0$.

Lời giải: Gọi $P(n)$ là vị từ "$8^n - 1$ chia hết cho 7". Ta chứng minh $\forall n \geq 0\ P(n)$.

- **Bước cơ sở:** Với $n = 0$, ta có $8^0 - 1 = 0$ chia hết cho 7. Do đó $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó, nghĩa là, $8^k - 1$ chia hết cho 7. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $8^{k+1} - 1$ cũng chia hết cho 7. Thật vậy, ta có $8^{k+1} - 1 = 8(8^k - 1) + 7$. Theo giả thiết quy nạp, $8^k - 1$ chia hết cho 7, nghĩa là tồn tại $\ell \in \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện $8^k - 1 = 7\ell$. Do đó, $8^{k+1} - 1 = 8(8^k - 1) + 7 = 8 \cdot (7\ell) + 7 = 7(8\ell + 1)$. Do $8\ell + 1 \in \mathbb{N}$, ta có $8^{k+1} - 1$ chia hết cho 7, hay $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $\forall n \geq 0\ P(n)$.

3. Cho S là tập các số nguyên dương được định nghĩa theo đệ quy như sau:
   - **Bước cơ sở:** $1 \in S$.
   - **Bước đệ quy:** Nếu $n \in S$ thì $3n+2 \in S$ và $n^2 \in S$.

   (a) (2 điểm) Chứng minh rằng với mọi $n \in S$, $n = 4a+1$ với a là số nguyên không âm nào đó.

   (b) (1 điểm) Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương m thỏa mãn điều kiện $m \notin S$ và $m = 4a+1$ với a là số nguyên không âm nào đó

Lời giải:

(a) Ta chứng minh bằng quy nạp theo cấu trúc.

- **Bước cơ sở:** Do $n = 1 \in S$ được định nghĩa ở bước cơ sở của định nghĩa của S, ta cần chỉ ra phát biểu đúng với $n = 1$. Thật vậy, ta có $1 = 4 \cdot 0 + 1$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử phát biểu đúng với số nguyên $n \in S$ nào đó, nghĩa là, $n = 4a+1$ với a là số nguyên không âm nào đó. Ta chứng minh phát biểu đúng với $3n+2 \in S$ và $n^2 \in S$, nghĩa là chứng minh tồn tại các số nguyên không âm c và d thỏa mãn $3n+2 = 4c+1$ và $n^2 = 4d+1$. Ta có $3n+2 = 3(4a+1)+2 = 4(3a+1)+1$ và $n^2 = (4a+1)^2 = 4a(4a+2)+1$. Do đó, ta chọn $c = 3a+1$ và $d = a(4a+2)$.

Theo nguyên lý quy nạp theo cấu trúc, ta có điều phải chứng minh.

(b) Theo định nghĩa, chú ý rằng mọi số nguyên $n \in S$ thỏa mãn $n \geq 1$. Lấy $m = 9 = 4 \cdot 2 + 1$. Ta chứng minh $9 \notin S$ bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $9 \in S$. Do đó, tồn tại số nguyên $n \in S$ thỏa mãn $3n+2 = 9$ hoặc $n^2 = 9$. Suy ra $n = 3 \in S$, do không tồn tại số nguyên n thỏa mãn điều kiện thứ nhất và $n = 3$ là số nguyên dương duy nhất thỏa mãn điều kiện thứ hai. Tương tự, do $3 \in S$, tồn tại số nguyên $n' \in S$ thỏa mãn $3n'+2 = 3$ hoặc ${n'}^2 = 3$. Đây là một mâu thuẫn vì không tồn tại số nguyên dương nào thỏa mãn ít nhất một trong hai điều kiện trên. Do đó, $9 \notin S$.

4. Hãy tìm ví dụ một hàm f từ $\mathbb{N}$ đến $\mathbb{N}$ thỏa mãn:
   (a) (1 điểm) f là đơn ánh nhưng không là toàn ánh
   (b) (1 điểm) f là toàn ánh nhưng không là đơn ánh
   (c) (1 điểm) f là song ánh và f khác hàm đồng nhất trên $\mathbb{N}$

   Ở mỗi phần, sau khi đưa ra ví dụ tương ứng, bạn cần chứng minh ví dụ của bạn thỏa mãn điều kiện đề ra.

Lời giải:

(a) $f(n) = n + 1$

- Hàm f là đơn ánh, do với mọi $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, nếu $n_1 \neq n_2$ thì $f(n_1) = n_1 + 1 \neq n_2 + 1 = f(n_2)$.
- Hàm f không là toàn ánh, do tồn tại $b = 0 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $f(n) \neq b$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(n) = \begin{cases} n & \text{nếu } n = 0 \\ n - 1 & \text{nếu } n \neq 0 \end{cases}$

- Hàm f không là đơn ánh, do tồn tại hai số $0, 1 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $0 \neq 1$ và $f(0) = f(1) = 1$.
- Hàm f là toàn ánh, do với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $n' = n + 1 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện $f(n') = n' - 1 = (n + 1) - 1 = n$. (Chú ý rằng $n' \geq 1$.)

(c) $f(n) = \begin{cases} n + 1 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ n - 1 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$

- Hàm f rõ ràng là khác hàm đồng nhất.
- Hàm f là đơn ánh do với mọi $n, n' \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $n \neq n'$, ta có
  - Nếu n, n' đều chẵn, $f(n) = n + 1 \neq n' + 1 = f(n')$.
  - Nếu n, n' đều lẻ, $f(n) = n - 1 \neq n' - 1 = f(n')$.
  - Một trong hai số n, n' là chẵn và số còn lại là lẻ. Không mất tổng quát, giả sử n chẵn và n' lẻ. Theo định nghĩa, tồn tại các số nguyên không âm k và ℓ thỏa mãn $n = 2k$ và $n' = 2\ell + 1$.
    Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng rằng f là đơn ánh. Thật vậy, nếu f không là đơn ánh, ta có $f(n) = f(n')$, hay $n + 1 = n' - 1$, nghĩa là $n' - n = 2$. Do đó, $2\ell + 1 - 2k = 2$, suy ra $2(\ell - k) = 1$. Do k và ℓ là các số nguyên, đẳng thức này luôn sai. Do đó, f là đơn ánh.
- Hàm f là toàn ánh, do với mọi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $n' = n + 1$ nếu n chẵn và $n' = n - 1$ nếu n lẻ thỏa mãn $f(n') = n$.