Nhận xét Bài kiểm tra thường xuyên 1

Toán rời rạc (MAT3500 1, 2023-2024)

Hoàng Anh Đức
BMTH, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội
hoanganhduc@hus.edu.vn

Ngày 4 tháng 3 năm 2024

- Với bài số 1,
  - Một số bạn viết đáp án câu (c) là $\neg x \vee \neg y$, câu (d) là $x \wedge \neg y$, và câu (e) là $(x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y)$ hoặc $x \oplus y$. Các đáp án này cũng tương đương lôgic với các đáp án trong gợi ý giải và do đó đều là đáp án đúng.
- Với bài số 2,
  - Một số bạn sử dụng ký hiệu $\mathbb{N}^\star$ và không giải thích đây là tập hợp gì. Chú ý rằng khi các bạn sử dụng ký hiệu mới không có trong bài giảng, các bạn cần giải thích.
  - Phần lớn các bạn đều chứng minh được nếu n chẵn thì $7n + 4$ chẵn.
  - Một số bạn chứng minh rằng nếu $7n+4$ chẵn thì n cũng chẵn bằng phương pháp chứng minh trực tiếp như sau: Giả sử $7n+4$ chẵn. Do đó, $7n+4 = 2m$ với $m \in \mathbb{Z}^+$. Suy ra $7n = 2m-4 = 2(m-2)$. Do $2(m-2)$ chia hết cho 2 nên $7n$ cũng chia hết cho 2 và do đó n cũng chia hết cho 2.

    Chứng minh này hoàn toàn đúng và mình vẫn cho điểm các bạn làm như vậy. Tuy nhiên các bạn cần chú ý rằng **ở đây các bạn đã vận dụng một số kiến thức liên quan đến lý thuyết số để giải**. (Cụ thể, việc các bạn suy ra được n chia hết cho 2 khi biết $7n$ chia hết cho 2.)

    Theo định nghĩa, để chứng minh $x \in \mathbb{Z}$ là một số chẵn, các bạn cần chỉ ra là x có thể được viết dưới dạng $x = 2k$ với số nguyên k nào đó. Ở trong chứng minh trên, các bạn hoàn toàn không chỉ ra điều này.
  - Tương tự, một số bạn có ý tưởng chứng minh rằng nếu $7n+4$ chẵn thì n chẵn và nếu $7n+4$ lẻ thì n lẻ. Những điều này có thể được suy ra bằng cách tách $7n+4 = n+2(3n+2)$ và do đó $7n+4$ và n có cùng tính chẵn/lẻ. Chứng minh này cũng hoàn toàn chấp nhận được, mặc dù trong chứng minh không sử dụng định nghĩa mà áp dụng các tính chất của lý thuyết số.
  - Một số bạn chứng minh bằng phương pháp phản chứng như sau: Giả sử với mọi số nguyên dương n, n lẻ khi và chỉ khi $7n + 4$ chẵn, và chỉ ra mâu thuẫn. Chú ý rằng khi sử dụng phương pháp phản chứng để chứng minh mệnh đề "Với mọi số nguyên dương n, n chẵn khi và chỉ khi $7n + 4$ chẵn" = "$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ (n chẵn) $\leftrightarrow$ ($7n + 4$ chẵn)", các bạn cần giả thiết là phủ định của mệnh đề cần chứng minh là đúng, nghĩa là giải sử "$\neg(\forall n \in \mathbb{Z}^+$ (n chẵn) $\leftrightarrow$ ($7n + 4$ chẵn))" đúng. Giả thiết mà các bạn đưa ra ở trên hoàn toàn không tương đương lôgic với mệnh đề này và do đó là không chính xác.

    Một số bạn khác giả thiết là tồn tại số nguyên dương n sao cho n lẻ khi và chỉ khi $7n + 4$ lẻ, và chỉ ra mâu thuẫn. Chú ý rằng giả thiết này cũng không chính xác, vì $p \leftrightarrow q$ và $\neg p \leftrightarrow \neg q$ là hai mệnh đề tương đương lôgic với nhau.
  - Một số bạn đưa ra phản ví dụ là với $n = -2/7$ thì $7n + 4 = 2$ chẵn nhưng n không chẵn. Trong trường hợp như đề bài, một phản ví dụ, nếu tồn tại, cần thỏa mãn điều kiện n là một số nguyên dương. Tuy nhiên, ở đây, số n bạn đưa ra không phải là số nguyên và cũng không dương. Do đó phản ví dụ này không chính xác.

- Một số bạn chứng minh mỗi chiều bằng phương pháp phản chứng. Phương pháp này cũng chấp nhận được.

- Với bài số 3,
  - Một số bạn viết $\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \in A\}$. **Điều này là sai.**
  - Ở câu (a), một số bạn lý luận rằng **tập rỗng không có tập hợp con**. **Điều này không chính xác.** Với mọi tập hợp A, A có hai tập con hiển nhiên là tập rỗng $\emptyset$ và chính bản thân A. Do $\emptyset$ là một tập hợp, nó cũng có một tập con, đó là tập $\emptyset$. Các bạn cần chú ý rằng **tồn tại một tập hợp A thỏa mãn A có tập con và A không có phần tử nào, đó là tập** $A = \emptyset$. Nói cách khác, **"nếu A có một tập con thì $A \neq \emptyset$" là một mệnh đề sai**.
  - Ở câu (a), một số bạn chứng minh bằng cách giả sử A là tập hữu hạn, do đó $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} \geq 2^0 = 1$ và do $|\emptyset| = 0 < 1$ nên $\emptyset$ không là tập lũy thừa của bất kỳ tập nào. Chú ý rằng ở đây các bạn mới chỉ chứng minh cho trường hợp A là tập hữu hạn chứ chưa chứng minh cho trường hợp A không là tập hữu hạn. Do đó, chứng minh này là không hoàn chỉnh.
  - Ở câu (a), một số bạn chứng minh bằng phương pháp phản chứng bằng cách giả sử (i) $\emptyset$ là tập lũy thừa và (ii) A là một tập con bất kỳ của $\emptyset$, và sau đó chỉ ra điều mâu thuẫn. **Tại sao bạn có giả thiết (ii)?** Khi chứng minh mệnh đề "Tập hợp rỗng $\emptyset$ không phải là tập lũy thừa của bất kỳ tập nào" = "$\forall A\,(\emptyset \neq \mathcal{P}(A))$", bạn chỉ có thể bắt đầu với giả thiết rằng mệnh đề cần chứng minh là sai, nghĩa là, bạn chỉ có thể giả sử "$\exists A\,(\emptyset = \mathcal{P}(A))$" = "Tồn tại tập hợp A thỏa mãn $\emptyset = \mathcal{P}(A)$".
  - Ở câu (a), để chứng minh bằng phương pháp phản chứng, một số bạn có ý tưởng như sau. Giả sử tồn tại tập hợp A thỏa mãn $\emptyset = \mathcal{P}(A)$. Theo định nghĩa, $\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$ và $\emptyset = \{y \mid \mathbf{F}\}$. Do đó, với mọi $x \in \mathcal{P}(A)$, mệnh đề $x \subseteq A$ luôn sai. Nói cách khác, với mọi $x \in \mathcal{P}(A)$, $x \notin \mathcal{P}(A)$. Đây là một mâu thuẫn. Một số bạn chỉ ra được phần lớn các điểm trên nhưng không chỉ ra cụ thể mâu thuẫn là gì. Mình vẫn cho điểm các bạn phần này.
  - Ở câu (a), một số bạn giả sử $\emptyset$ là tập lũy thừa của một tập A nào đó và **viết $\emptyset = \bigcup C$ với C là tập con của A. Cách viết này không đúng.** Chú ý rằng $\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$. Như vậy, cách viết đúng sẽ phải là $\mathcal{P}(A) = \emptyset = \bigcup\{C\}$ chứ không phải $\mathcal{P}(A) = \emptyset = \bigcup C$. Tóm lại, $\bigcup_{C \subseteq A} C = A$ và $\bigcup_{C \subseteq A}\{C\} = \mathcal{P}(A)$.
  - Phần lớn các bạn làm sai câu (b).
  - Ở câu (c), một số bạn có ý tưởng chứng minh $\bigcup_{C \in \mathcal{P}(A)} C = A$ bằng cách chỉ ra (i) $A \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{P}(A)} C$ và (ii) $\bigcup_{C \in \mathcal{P}(A)} C \subseteq A$ như sau. Để chứng minh (i), giả sử $x \in A$, ta chứng minh $x \in \bigcup_{C \in \mathcal{P}(A)} C$. Do $\{x\} \subseteq A$, ta cũng có $x \in \{x\} \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{P}(A)} C$. Đây là điều phải chứng minh. Để chứng minh (ii), giả sử $x \in \bigcup_{C \in \mathcal{P}(A)} C$, ta chứng minh $x \in A$. Thật vậy, do $x \in \bigcup_{C \in \mathcal{P}(A)} C$, tồn tại $C \in \mathcal{P}(A)$ thỏa mãn $x \in C$. Do $C \in \mathcal{P}(A)$, ta có $C \subseteq A$, và do đó $x \in A$.
  - Ở câu (d), để chứng minh mệnh đề "Nếu $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ thì $A = B$" bằng phương pháp phản chứng, có thể làm như sau. Giả sử $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ và $A \neq B$. Ta sẽ chỉ ra tồn tại một mâu thuẫn nào đó. Do $A \neq B$, tồn tại $x \in A \setminus B$ hoặc $y \in B \setminus A$. Nếu tồn tại $x \in A \setminus B$, ta có $x \in A$ và $x \notin B$, do đó $\{x\} \subseteq A$ và $\{x\} \nsubseteq B$. Do đó, $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$ và $\{x\} \notin \mathcal{P}(B)$, mâu thuẫn với giả thiết $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$. Tương tự, nếu tồn tại $y \in B \setminus A$, ta có $x \in B$ và $x \notin A$, do đó $\{x\} \subseteq B$ và $\{x\} \nsubseteq A$. Do đó, $\{x\} \in \mathcal{P}(B)$ và $\{x\} \notin \mathcal{P}(A)$, mâu thuẫn với giả thiết $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$.
  - Một số bạn viết "nếu $x \in A$ thì $x \in \mathcal{P}(A)$". Điều này không đúng trong mọi trường hợp. Ví dụ, nếu $A = \{1\}$ thì $1 \in A$ nhưng $1 \notin \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$.