ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI
KHOA TOÁN-CƠ-TIN
(Đề gồm 3 câu/3 trang)

ĐỀ KIỂM TRA THƯỜNG XUYÊN 1
Môn: Toán rời rạc (MAT3500 1, 2023-2024)
Thời gian: 30 phút

- Nếu tổng điểm lớn hơn 10 thì tính là 10 điểm.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Có thể sử dụng tài liệu (sách, bài giảng, vở ghi chép). Không sử dụng các thiết bị điện tử như điện thoại thông minh, máy tính xách tay, v.v... Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.

Họ và Tên: ______________________________

Mã Sinh Viên: ____________________ Lớp: ____________________

Câu:	1	2	3	Tổng
Điểm tối đa:	5	5	5	15
Điểm:				

1. Trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình, các giá trị chân lý True và False được biểu diễn tương ứng thông qua các số 1 và 0. Ví dụ như, trong Python, cả `0 == False` và `1 == True` đều có giá trị `True`. Do đó, trên thực tế, chúng ta có thể thực hiện các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia) với các giá trị chân lý! Thêm vào đó, trong rất nhiều ngôn ngữ lập trình (bao gồm Python), bất kỳ thứ gì khác `False` (hay nói cách khác, bất kỳ thứ gì khác 0) đều có thể coi là `True` khi xét các biểu thức liên quan đến điều kiện, ví dụ như `if 2 then X else Y` sẽ chạy và thực hiện `X`.

   Giả sử `x` và `y` là các biến Boole trong một ngôn ngữ lập trình mà True và False tương ứng lần lượt với 1 và 0. (Nghĩa là, giá trị của `x` và `y` là 0 hoặc 1.) Mỗi đoạn mã sau đây bao gồm một điều kiện dựa trên `x`, `y`, và các phép toán số học (cộng, trừ, nhân, chia). Hãy viết lại các điều kiện này sử dụng ngôn ngữ của lôgic mệnh đề.

   (a) (1 điểm) `if x * y ...`
   (b) (1 điểm) `if x + y ...`
   (c) (1 điểm) `if 2 - x - y ...`
   (d) (1 điểm) `if x * (1 - y) ...`
   (e) (1 điểm) `if x * (1 - y) + (1 - x) * y ...`

Lời giải: Lập bảng xét tất cả các cặp giá trị của x và y. Với mỗi cặp này, xét giá trị tương ứng của các biểu thức.

(a) Nếu $x \wedge y$ ...

(b) Nếu $x \vee y$ ...

(c) Nếu $\neg(x \wedge y)$ ...

(d) Nếu $\neg(x \rightarrow y)$ ...

(e) Nếu $\neg(x \leftrightarrow y)$ ...

2. (5 điểm) Chứng minh hoặc đưa ra phản ví dụ cho mệnh đề sau:

Với mọi số nguyên dương n, n chẵn khi và chỉ khi $7n + 4$ chẵn.

Lời giải: Với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$, ta chứng minh hai điều:

(a) Nếu n chẵn, thì $7n + 4$ chẵn.

(b) Nếu $7n + 4$ chẵn, thì n chẵn.

Cụ thể, ta có:

(a) Giả sử n chẵn. Ta chứng minh $7n + 4$ chẵn. Do $n \in \mathbb{Z}^+$ và n chẵn, $n = 2k$ với $k \in \mathbb{Z}^+$. Do đó, $7n + 4 = 7(2k) + 4 = 2(7k + 2)$. Do $7n + 4 = 2j$ với $j = 7k + 2 \in \mathbb{Z}^+$, ta có $7n + 4$ là một số chẵn.

(b) Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $7n + 4$ chẵn và n lẻ. Do $n \in \mathbb{Z}^+$ và n lẻ, $n = 2k + 1$ với $k \in \mathbb{Z}$ và $k \geq 0$. Do đó, $7n + 4 = 7(2k + 1) + 4 = 2(7k + 5) + 1$. Do $7n + 4 = 2j + 1$ với $j = 7k + 5 \in \mathbb{Z}^+$, ta có $7n + 4$ là một số lẻ, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu.

3. *Tập lũy thừa* $\mathcal{P}(A)$ của một tập hợp A là tập hợp tất cả các tập con của A. Với các tập hợp A, B, C, chứng minh rằng

   (a) (1 điểm) Tập hợp rỗng $\emptyset$ không phải là tập lũy thừa của bất kỳ tập hợp nào.

   (b) (1 điểm) Hai tập $A \times B \times C$ và $(A \times B) \times C$ có bằng nhau không? Tại sao?

   (c) (1 điểm) $\bigcup_{C \in \mathcal{P}(A)} C = A$, nghĩa là, hợp của tất cả các tập hợp con của A bằng chính nó.

   (d) (2 điểm) Nếu $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ thì $A = B$.

Lời giải:

(a) Với tập A bất kỳ, $\mathcal{P}(A)$ có ít nhất một phần tử là $\emptyset$. Do đó $\mathcal{P}(A) \neq \emptyset$ với mọi tập hợp A.

(b) $A \times B \times C \neq (A \times B) \times C$. Tập $A \times B \times C$ gồm các bộ sắp thứ tự ba phần tử (a, b, c) trong đó $a \in A$, $b \in B$, và $c \in C$. Tập $(A \times B) \times C$ gồm các bộ sắp thứ tự hai phần tử $((a, b), c)$ trong đó $(a, b) \in A \times B$ và $c \in C$.

(c) Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Đặt $D = \bigcup_{C \in \mathcal{P}(A)} C$ và giả sử $D \neq A$. Do $D \neq A \equiv \neg(D = A)$, mệnh đề $\neg((D \subseteq A) \wedge (A \subseteq D))$ đúng. Áp dụng luật De Morgan, ta có $(D \nsubseteq A) \vee (A \nsubseteq D)$ đúng. Do đó, $D \nsubseteq A$ hoặc $A \nsubseteq D$. Ta sẽ chỉ ra một mâu thuẫn trong mỗi trường hợp.

- Xét trường hợp $D \nsubseteq A \equiv \neg(D \subseteq A) \equiv \neg(\forall x\, (x \in D) \to (x \in A)) \equiv \exists x\, \neg((x \in D) \to (x \in A)) \equiv \exists x\, \neg(\neg(x \in D) \wedge (x \in A)) \equiv \exists x\, (x \in D) \wedge (x \notin A)$, nghĩa là, tồn tại $x \in D$ sao cho $x \notin A$. Do $x \in D = \bigcup_{C \in \mathcal{P}(A)} C$, tồn tại một tập con C của A thỏa mãn $x \in C$. Do $x \in C$ và $C \subseteq A$, ta có $x \in A$, mâu thuẫn với cách chọn x ban đầu.
- Xét trường hợp $A \nsubseteq D$, nghĩa là, tồn tại $x \in A$ sao cho $x \notin D$. Do $x \in A$, ta có $\{x\} \subseteq A$, nghĩa là $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$. Do đó, $x \in D = \bigcup_{C \in \mathcal{P}(A)} C$, mâu thuẫn với cách chọn x ban đầu.

(d) Giả sử $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$. Do đó, $\bigcup_{C \in \mathcal{P}(A)} C = \bigcup_{D \in \mathcal{P}(B)} D$. Áp dụng phần (c) cho cả hai vế, ta có $A = B$.

Một chứng minh khác là như sau: Ta chứng minh $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$. Thật vậy, do $A \subseteq A$, ta có $A \in \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ và do đó $A \subseteq B$. Tương tự, $B \in \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A)$ và do đó $B \subseteq A$.