ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI
KHOA TOÁN-CƠ-TIN
*(Đề gồm 2 câu/1 trang)*

**ĐỀ KIỂM TRA THƯỜNG XUYÊN 2**
**Môn: Toán rời rạc (MAT3500 1, 2023-2024)**
Thời gian: 30 phút

- Chọn 1 trong 2 câu. Nếu làm cả 2 câu thì tính câu điểm cao nhất
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.

Họ và Tên: ______________________________

Mã Sinh Viên: ____________________ Lớp: ____________________

| Câu: | 1 | 2 | Tổng |
|---|---|---|---|
| Điểm tối đa: | 10 | 10 | 20 |
| Điểm: | | | |

1. (10 điểm) Giải hệ phương trình

$$x \equiv 2 \pmod{3} \tag{1}$$
$$x \equiv 1 \pmod{4} \tag{2}$$
$$x \equiv 3 \pmod{5} \tag{3}$$

**Lời giải:**

- **Cách 1: Sử dụng chứng minh của Định lý phần dư Trung Hoa.**
  - Ta có $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 3, m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = 5$, và $m = m_1m_2m_3 = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.
  - Ta tính $M_i = m/m_i$ với $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$M_1 = m/m_1 = 4 \cdot 5 = 20$$
$$M_2 = m/m_2 = 3 \cdot 5 = 15$$
$$M_3 = m/m_3 = 3 \cdot 4 = 12$$

  - Tính một nghịch đảo $y_i$ của $M_i$ theo môđun $m_i$ với $i \in \{1, 2, 3\}$.
    * Tính một nghịch đảo $y_1$ của $M_1 = 20$ theo môđun $m_1 = 3$. Từ thuật toán Euclid, ta có

$$20 = 3 \cdot 6 + 2$$
$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$2 = 1 \cdot 2 + 0$$

Do đó, ta cũng có

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\ &= 3 - (20 - 3 \cdot 6) \cdot 1 \\ &= -1 \cdot 20 + 7 \cdot 3 \end{aligned}$$

Suy ra $y_1 = -1$.

* Tính một nghịch đảo $y_2$ của $M_2 = 15$ theo môđun $m_2 = 4$. Từ thuật toán Euclid, ta có

$$\begin{aligned} 15 &= 4 \cdot 3 + 3 \\ 4 &= 3 \cdot 1 + 1 \\ 3 &= 1 \cdot 3 + 0 \end{aligned}$$

Do đó, ta cũng có

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \cdot 1 \\ &= 4 - (15 - 4 \cdot 3) \cdot 1 \\ &= -1 \cdot 15 + 4 \cdot 4 \end{aligned}$$

Suy ra $y_2 = -1$.

* Tính một nghịch đảo $y_3$ của $M_3 = 12$ theo môđun $m_3 = 5$. Từ thuật toán Euclid, ta có

$$\begin{aligned} 12 &= 5 \cdot 2 + 2 \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Do đó, ta cũng có

$$\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\ &= 5 - (12 - 5 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= -2 \cdot 12 + 5 \cdot 5 \end{aligned}$$

Suy ra $y_3 = -2$.

– Tính nghiệm của hệ phương trình.

$$\begin{aligned} x &\equiv \sum_{i=1}^{3} a_i y_i M_i \pmod{60} \\ &= 2 \cdot (-1) \cdot 20 + 1 \cdot (-1) \cdot 15 + 3 \cdot (-2) \cdot 12 \pmod{60} \\ &= -127 \pmod{60} \\ &= 53 \pmod{60}. \end{aligned}$$

- **Cách 2: Sử dụng phương pháp thay ngược.**

  Từ (1), tồn tại $t \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $x = 3t + 2$.

  Thay vào (2), ta có $3t + 2 \equiv 1 \pmod 4$. Do đó, $3t \equiv -1 \pmod 4$. Do $1 = 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 4$, một nghịch đảo của 3 theo môđun 4 là 3. Suy ra $t \equiv -3 \pmod 4$. Do đó, tồn tại $u \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $t = 4u - 3$. Suy ra $x = 3t + 2 = 3(4u - 3) + 2 = 12u - 7$.

  Thay vào (3), ta có $12u - 7 \equiv 3 \pmod 5$. Do đó, $12u \equiv 10 \pmod 5 \equiv 0 \pmod 5$. Do $\gcd(12, 5) = 1$, ta có $u \equiv 0 \pmod 5$. Do đó, tồn tại $v \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $u = 5v$. Suy ra $x = 12u - 7 = 12 \cdot (5v) - 7 = 60v - 7$.

  Do đó, $x \equiv -7 \pmod{60} \equiv 53 \pmod{60}$.

2. (10 điểm) Bằng phương pháp quy nạp, với mọi $n \geq 0$, hãy chứng minh

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n \tag{4}$$

**Lời giải:**

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh (4) đúng với $n = 0$. Thật vậy, với $n = 0$, ta có

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{0} C_0^k = C_0^0 = 1 = 2^0 = 2^n.$$

- **Bước quy nạp:** Giả sử (4) đúng với số nguyên $n \geq 0$ nào đó, nghĩa là, $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$. Ta chứng minh (4) đúng với $n+1$, nghĩa là chứng minh $\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k = 2^{n+1}$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k &= C_{n+1}^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \cdots + C_{n+1}^n + C_{n+1}^{n+1} \\
&= C_{n+1}^0 + (C_n^0 + C_n^1) + (C_n^1 + C_n^2) + \cdots + (C_n^{n-1} + C_n^n) + C_{n+1}^{n+1} && \text{Do } C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \\
&= 2(C_n^0 + C_n^1 + \ldots C_n^n) && \text{Do } C_n^0 = C_{n+1}^0 \text{ và } C_n^n = C_{n+1}^{n+1} \\
&= 2\sum_{k=0}^{n} C_n^k \\
&= 2 \cdot 2^n && \text{Giả thiết quy nạp} \\
&= 2^{n+1}.
\end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp, với mọi $n \geq 0$, ta có $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.