ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN HÀ NỘI
KHOA TOÁN-CƠ-TIN
(Đề gồm 4 câu/4 trang)

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA KỲ
Môn: Toán rời rạc (MAT3500 2, 2023-2024)
Thời gian: 50 phút

- Điền các thông tin về Họ Tên, Mã Sinh Viên, Lớp trước khi bắt đầu làm bài.
- Trình bày lời giải vào các khoảng trống sau đề bài. Sử dụng mặt sau nếu thiếu khoảng trống.
- Không sử dụng tài liệu. Không trao đổi, bàn bạc khi làm bài.
- Điểm bài kiểm tra này chiếm 20% tổng số điểm của môn học. Tổng điểm nhỏ hơn hoặc bằng 10 thì giữ nguyên, còn ngược lại thì tính là 10 điểm.

Họ và Tên: ______________________________

Mã Sinh Viên: ____________________ Lớp: ____________________

Câu:	1	2	3	4	Tổng
Điểm tối đa:	3	3	3	3	12
Điểm:					

1. Gọi F là tập hợp tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với tập xác định và tập giá trị là tập các số thực. (Ví dụ, hàm *plusOne* định nghĩa bởi $plusOne(x) = x + 1$ là một hàm $plusOne : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, và do đó $plusOne \in F$.) Các mệnh đề sau là đúng hay sai? Hãy giải thích đáp án của bạn.
   (a) (1 điểm) $\forall c \in \mathbb{R}\ \big[\exists f \in F\ (f(0) = c)\big]$.
   (b) (1 điểm) $\exists f \in F\ \big[\forall c \in \mathbb{R}\ (f(0) = c)\big]$.
   (c) (1 điểm) $\exists f \in F\ \big[\forall c \in \mathbb{R}\ (f(c) = 0)\big]$.

Lời giải:

(a) Mệnh đề $\forall c \in \mathbb{R}\ \big[\exists f \in F\ (f(0) = c)\big]$ là đúng. Lý do là với mỗi $c \in \mathbb{R}$, ta có thể chọn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm định nghĩa bởi $f(x) = x + c$, và ta luôn có $f(0) = c$.

(b) Mệnh đề $\exists f \in F\ \big[\forall c \in \mathbb{R}\ (f(0) = c)\big]$ là sai. Lý do là nếu tồn tại một hàm $f \in F$ thỏa mãn mệnh đề thì với các giá trị $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ bất kỳ thỏa mãn $c_1 \neq c_2$, ta cũng có $f(0) = c_1$ và $f(0) = c_2$. Do f là một hàm, ta cần có $c_1 = c_2$, đây là một mâu thuẫn.

(c) Mệnh đề $\exists f \in F\ \big[\forall c \in \mathbb{R}\ (f(c) = 0)\big]$ là đúng. Lý do là ta có thể chọn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm định nghĩa bởi $f(x) = 0$, và ta luôn có $f(c) = 0$ với mọi $c \in \mathbb{R}$.

2. (3 điểm) Sử dụng phương pháp quy nạp, hãy chứng minh $10^n - 1$ chia hết cho 9 với mọi $n \geq 0$.

Lời giải: Gọi $P(n)$ là vị từ "$10^n - 1$ chia hết cho 9". Ta chứng minh $\forall n \geq 0\ P(n)$.

- **Bước cơ sở:** Với $n = 0$, ta có $10^0 - 1 = 0$ chia hết cho 9. Do đó $P(0)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử $P(k)$ đúng với số nguyên $k \geq 0$ nào đó, nghĩa là, $10^k - 1$ chia hết cho 9. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $10^{k+1} - 1$ cũng chia hết cho 9. Thật vậy, ta có $10^{k+1} - 1 = 10(10^k - 1) + 9$. Theo giả thiết quy nạp, $10^k - 1$ chia hết cho 9, nghĩa là tồn tại $\ell \in \mathbb{N}$ thỏa mãn điều kiện $10^k - 1 = 9\ell$. Do đó, $10^{k+1} - 1 = 10(10^k - 1) + 9 = 10 \cdot (9\ell) + 9 = 9(10\ell + 1)$. Do $10\ell + 1 \in \mathbb{N}$, ta có $10^{k+1} - 1$ chia hết cho 9, hay $P(k+1)$ đúng.

Theo nguyên lý quy nạp, ta có $\forall n \geq 0\ P(n)$.

3. Cho S là tập các số nguyên dương được định nghĩa theo đệ quy như sau:

- **Bước cơ sở:** $5 \in S$.
- **Bước đệ quy:** Nếu $n \in S$ thì $3n \in S$ và $n^2 \in S$.

(a) (2 điểm) Chứng minh rằng với mọi $n \in S$, $n = 10a + 5$ với a là số nguyên không âm nào đó.

(b) (1 điểm) Chứng minh rằng tồn tại một số nguyên dương m thỏa mãn điều kiện $m \notin S$ và $m = 10a + 5$ với a là số nguyên không âm nào đó

Lời giải:

(a) Ta chứng minh bằng quy nạp theo cấu trúc.

- **Bước cơ sở:** Do $n = 5 \in S$ được định nghĩa ở bước cơ sở của định nghĩa của S, ta cần chỉ ra phát biểu đúng với $n = 5$. Thật vậy, ta có $5 = 10 \cdot 0 + 5$.
- **Bước quy nạp:** Giả sử phát biểu đúng với số nguyên $n \in S$ nào đó, nghĩa là, $n = 10a + 5$ với a là số nguyên không âm nào đó. Ta chứng minh phát biểu đúng với $3n \in S$ và $n^2 \in S$, nghĩa là chứng minh tồn tại các số nguyên không âm c và d thỏa mãn $3n = 10c + 5$ và $n^2 = 10d + 5$. Ta có $3n = 3(10a + 5) = 10(3a + 1) + 5$ và $n^2 = (10a+5)^2 = 10(10a^2+10a+2)+5$. Do đó, ta chọn $c = 3a+1$ và $d = 10a^2+10a+2$.

(b) Theo định nghĩa, chú ý rằng mọi số nguyên $n \in S$ thỏa mãn $n \geq 5$. Lấy $m = 35 = 10 \cdot 3 + 5$. Ta chứng minh $35 \notin S$ bằng phương pháp phản chứng. Giả sử $35 \in S$. Do đó, tồn tại số nguyên $n \in S$ thỏa mãn $3n = 35$ hoặc $n^2 = 35$. Đây là một mâu thuẫn vì không tồn tại số nguyên dương nào thỏa mãn ít nhất một trong hai điều kiện trên. Do đó, $35 \notin S$.

4. (3 điểm) *Dãy Lucas* $\{\ell_n\}$ là một dãy được định nghĩa đệ quy như sau: $\ell_0 = 2$, $\ell_1 = 1$, và $\ell_n = \ell_{n-1} + \ell_{n-2}$ với $n \geq 2$. Tương tự, *dãy Fibonacci* f_n được cho bởi: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ với $n \geq 2$. Chứng minh rằng $f_n + f_{n+2} = \ell_{n+1}$ với mọi số nguyên dương n.

Lời giải: Ta sử dụng phương pháp quy nạp mạnh để chứng minh vị từ $P(n)$ sau:

$$f_n + f_{n+2} = \ell_{n+1}$$

đúng với mọi $n \geq 1$.

- **Bước cơ sở:** Ta chứng minh $P(1)$ và $P(2)$ đúng. Thật vậy, với $n = 1$, $f_1 + f_3 = 1 + 2 = 3$ và $\ell_2 = \ell_1 + \ell_0 = 1 + 2 = 3$. Do đó, $f_1 + f_3 = \ell_2$, nghĩa là $P(1)$ đúng. Với $n = 2$, $f_2 + f_4 = 1 + 3 = 4$ và $\ell_3 = \ell_2 + \ell_1 = 3 + 1 = 4$. Do đó, $f_2 + f_4 = \ell_3$, nghĩa là $P(2)$ đúng.
- **Bước quy nạp:** Giả sử với số nguyên $k \geq 2$ nào đó và với mọi i thỏa mãn $1 \leq i \leq k$, $P(i)$ đúng, nghĩa là $f_i + f_{i+2} = \ell_{i+1}$. Ta chứng minh $P(k+1)$ đúng, nghĩa là chứng minh $f_{k+1} + f_{k+3} = \ell_{k+2}$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
f_{k+1} + f_{k+3} &= (f_k + f_{k-1}) + (f_{k+2} + f_{k+1}) && \text{Định nghĩa dãy Fibonacci} \\
&= (f_k + f_{k+2}) + (f_{k-1} + f_{k+1}) \\
&= \ell_{k+1} + \ell_k && \text{Giả thiết quy nạp} \\
&= \ell_{k+2} && \text{Định nghĩa dãy Lucas}
\end{aligned}$$